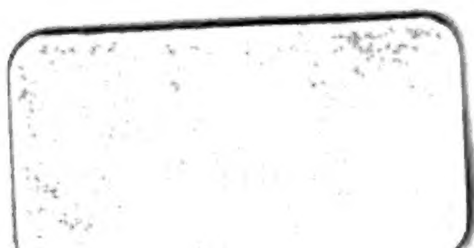


Handbuch

der

Differenzial-

und

Integralrechnung

von

Dr. Oskar Schlömilch,
ausserordentlichem Professor an der Universität zu Jena.



Erster Theil.

Differenzialrechnung.

Mit zwei Kupfertafeln.

Greifswald,
Verlag von Ferd. Otte.

1847.



Den Herren

C. G. J. Jacobi

und

G. Lejeune Dirichlet

Professoren an der Universität zu Berlin, Mitgliedern der Königlichen Akademie der Wissenschaften etc. etc.

in

dankbarer Verehrung

gewidmet.

Vorrede.

Wenn man einem Mathematiker gewöhnlichen Schlages die Forderung stellt, mit kurzen Worten den Zweck der höheren Analysis zu bezeichnen und die Bedeutung zu charakterisiren, welche dieser Calcül für unsere Erkenntniss überhaupt gewinnt, so erhält man in der Regel eine Antwort, als hätte man einen Freimaurer gefragt, was die Maurerei sei. Die ganze Auskunft besteht nämlich in beiden Fällen darin, dass man nach einigen unbestimmten Redensarten ermahnt wird, sich in die Geheimnisse dieser Künste bis zu einem gewissen Grade einweihen zu lassen, weil vorher das Wozu nur sehr schwer deutlich gemacht werden könne. Nicht geringe Schuld an dieser nichtssagenden Rede trägt wenigstens in der Mathematik (ob auch in der Maurerei, weiss ich nicht) die Vielheit der Systeme, welche geschichtlich hervorgetreten sind, und unter denen es in der That solche giebt, die ganz eigens zur Ver-

schleierung des sehr einfachen Wesens der Differenzial- und Integralrechnung aufgestellt zu sein scheinen. Es ist diese Thatsache um so schwerer und vielleicht nur aus der dem Deutschen angeborenen Systematisirsucht erklärbar, als es eine ganz leichte rein empirische Methode giebt, um den Sinn der höheren Analysis zu erkennen. Betrachtet man nämlich die erste beste Reihe von Aufgaben irgend welcher Art und gruppirt sie nach der sehr natürlichen Unterscheidung, ob ihre Lösungen den höheren Calcül nothwendig erfordern oder nicht, so bedarf es nur geringer Beobachtungsgabe, um sich zu versichern, dass alle diejenigen Aufgaben in das Gebiet des Elementaren fallen, worin die zu betrachtenden Grössen entweder als schlechthin unveränderlich oder, falls sie Aenderungen unterworfen sind, als aus diskreten Theilen zusammengesetzt angesehen werden, dass sich hingegen die Analysis des Unendlichen da mit gebieterischer Nothwendigkeit aufdrängt, wo stetig veränderliche Grössen in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden. Will man Beispiele und Belege hierzu, so braucht man nur auf solche Probleme der Geometrie hinauszusehen, in welchen einerseits der Zusammenhang zwischen den Bestandtheilen einer aus geraden und gebrochenen Linien construirten Figur oder andererseits Beziehungen zwischen geraden und krummen Linien gesucht werden; hier hat man schon den Un-

terschied; in der gebrochenen Linie — und jede aus Geraden bestehende Figur kann als solche gelten — geschehen die Richtungsveränderungen sprungweis und das Ganze besteht aus diskreten Theilen, die Curve dagegen ändert in jedem Punkte oder stetig ihre Richtung. So scharf diese Gränze ist, so leicht überschreitet man sie übrigens auch, ohne es zu bemerken. Sehen wir z. B. in einer algebraischen Gleichung die mit einem der letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnete Grösse als blose Unbekannte an, so stehen wir noch im Bereiche des Diskreten, lassen wir aber die Unbekannte zu einer Unbestimmten, d. h. zu einer willkührlich veränderlichen Grösse werden und fragen etwa, bis zu welcher Stelle der ganze Ausdruck wächst, dann wieder abnimmt u. s. w., so kommen wir schon auf unausgesetzte Aenderungen und hiermit in das Gebiet des Stetigen. So werden wir durch rein empirische Beobachtung a posteriori zu einem Resultate geführt, das sich auch a priori ableiten lässt, wenn man philosophisch eine Orientirung des Grössenbereiches überhaupt unternimmt, was weiter auseinanderzusetzen hier nicht meine Absicht sein kann. Haben wir uns nun auf diese Weise überzeugt, dass der Zweck der höheren Analysis kein anderer ist, als die Betrachtung stetig veränderlicher Grössen, so wird es sich blos noch um die Mittel handeln, dergleichen gewissermassen im Zustande der Flüs-

sigkeit befindliche Wesen so anzufassen, dass sie nach bestimmten Regeln behandelt werden können, ohne ihre charakteristische Eigenthümlichkeit einzubüssen. Hier giebt es nun eine doppelte Schwierigkeit: eine philosophische und eine mathematische, oder wenn man will, eine materielle und formelle. Die erstere liegt in der Begreiflichkeit des Stetigen überhaupt; rein anschaulich werden uns die continuirlichen Grössen gegeben, wir finden sie vor als einen der Bestandtheile unserer Anschauung nach den Formen des Raumes und der Zeit, und wenn wir daher auch wissen, dass ein Continuum möglich ist, so bleibt doch noch die Frage: wie ist ein solches möglich. Die zweite Schwierigkeit betrifft die Bearbeitung des vorhandenen Materiales nach den Regeln der Rechnung mit diskreten Grössen, und hier steht die Frage: in wie weit lassen sich die Operationen, welche zur Verknüpfung diskreter Grössen dienen, auf stetig veränderliche Grössen ausdehnen? Der Mathematiker befindet sich, wenn er seine Sphäre nicht verkennen will, bei diesen zwei Schwierigkeiten in einem sehr glücklichen Falle; die erste nämlich geht ihn gar nichts an; so wenig der Geometer die Frage stellt, was ist der Raum, eben so wenig braucht der Analytiker sich um die innere Natur des Stetigen zu bekümmern; genug für ihn, dass die Existenz desselben, gerade wie jene des Raumes, eine unmittelbare und unbe-

zweifelte Thatsache der Selbstbeobachtung ist. Die zweite Schwierigkeit dagegen darf der Mathematiker nicht von der Hand weisen, da sie recht eigentlich in sein Fach gehört; aber er besiegt sie auch sehr leicht, indem er sich den Begriff der Gränze bildet, gewissermassen die Brücke, welche aus dem Gebiete des Diskreten in das des Stetigen überführt; die genauere Nachweisung hiervon giebt die zweite Hälfte der Einleitung S. 2—8, die auf weiter kein Verdienst, als das einer Uebersetzung Newton'scher Betrachtungen in die jetzige Sprache der Wissenschaft Anspruch macht. Die Verkennung der philosophischen und mathematischen Rechte an den Begriff der Stetigkeit hat übrigens einige Confusion in die Bearbeitung der höheren Analysis gebracht; nur eine lächerliche Furcht vor jenem Begriffe war es bei Lagrange, Arbogast und einigen untergeordneten Geistern, die allen Forderungen nach natürlichem und heuristischem Gedankengange zum Trotz die ganze Lehre auf den Kopf stellen und sie zu einer blosen Ableitungsrechnung werden liess, welche dem Spiele eines müssigen Kopfes ähnlicher sah, als einer nothwendigen Entwickelungsstufe in der fortlaufenden Ausbildung der Grössenwissenschaft.

Man wird es nach diesen Bemerkungen sehr natürlich finden, wenn ich die schon mehrmals ausgesprochene Meinung, dass man die höhere Analysis gleich auf die elemen-

taren Lehren der Buchstabenrechnung und ebenen Trigonometrie folgen lassen könnte, nicht nur theile, sondern diesen Weg sogar für den einzig wissenschaftlichen halte, und ich habe daher das vorliegende Werk mit einer Einleitung versehen, welche da anhebt, wo der gewöhnliche Schulunterricht aufhört und alles Das enthält, was man später braucht und nicht gerade voraussetzen darf. Dem übrigen Inhalte habe ich die möglichste Vollständigkeit zu geben gesucht und ausserdem manches Neue hinzugefügt, was der sachkundige Leser von selbst finden wird.

Besonderen Dank endlich schulde ich noch Herrn Prof. Grunert für die Uebernahme der ersten Correktur, dem Herrn Verleger für die nette Ausstattung des Buches und Herrn Mädel II. in Weimar für die sorgfältige Ausführung der Figurentafeln.

Jena im November 1846.

Schlömilch.

Inhalt.

Cap. IX. Das Theorem von Lagrange.

Cap. X. Anwendungen auf Geometrie.

Verbesserungen.

Seite	Zeile			
VII	10	v. u.	statt	$(1+\frac{1}{m+z})^{m+}$ lies $(1+\frac{1}{m+z})^{m+2}$
X	1	v. o.	„	$(1+\frac{1}{\mu}^{\mu}$ lies $(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$
12	9	v. u.	„	$x\frac{1}{2}g^2$ lies $\frac{1}{2}gx^2$
15	5	v. u.	„	der Worte: „die selbst.....war“ muss es heissen: „wobei $F(x)$ stetig und endlich bleibt, wenn $f(x)$ es ist.“
17	8	v. o.	„	Δx lies Δ_x
19	11	v. o.	„	(Fx) lies $F(x)$
21	9	v. u.	„	$\Psi(x+\Delta x)$ lies $\psi(x+\Delta x)$
81	8	v. o.	„	$\mu_s \| _1$ lies μ_{s+1}
91	8	v. o.	„	$(-1)^n$ lies $(-1)^{n-1}$, ebenso in Formel (13) das.
173	4	v. u.	„	$F(a+$ lies $F(a+h)$



Einleitung.

Alle in der Mathematik vorkommenden höheren Rechnungsweisen unterscheiden sich von den elementaren Betrachtungen hauptsächlich durch das Gepräge grosser Allgemeinheit, welches ihnen eigenthümlich ist. Diese ausgezeichnete Eigenschaft verdankt man der Einführung eines einzigen Begriffes, welcher selbst den höchsten Grad der Allgemeinheit enthält, den man einer mathematischen Abstraktion geben kann; es ist diess der Begriff der **Funktion einer veränderlichen Grösse**. Sind nämlich zwei der Veränderung fähige Grössen so an einander geknüpft, dass die Aenderung der einen nothwendig eine Aenderung der anderen nach sich zieht, so nennt man die eine eine Funktion der anderen. Bezeichnen wir also z. B. eine ganz willkührlich veränderliche Grösse mit x, so sind die Ausdrücke wie x^2, 3^x, $\log x$, $\sin x$ etc. sämmtlich Funktionen von x, die sich hier nur dadurch unterscheiden, dass jede von ihnen x in anderer Weise enthält, oder anderer **Natur** ist. Setzt man eine solche Funktion einer anderen Grösse gleich, etwa $\log x = y$, so hat man jetzt zwei Veränderliche, x und y, von denen die erste die **unabhängige**, die zweite die **abhängige Variable** heisst, weil die Aenderungen der letzteren durch die Natur der Funktion selbst von denen der ersteren abhängen. Im Allgemeinen bezeichnet man die Funktionen durch die Buchstaben F, f, φ, ψ und ähnliche, denen man die Veränderliche, in Parenthesen eingeschlossen, beisetzt, also mit $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ etc. Eine Gleichung wie $y = f(x)$ bedeutet demnach: die abhängige Variable y ist durch irgend welche Rechnungsoperationen so an die unabhängige Variable geknüpft, dass sie sich mit jener gleichzeitig ändert.

Es giebt auch Funktionen zweier oder mehrerer Variablen; in der Gleichung $y = ax^3 + cz^2$ z. B. hängen die Aenderungen des y von denen der x und z gleichzeitig ab; man bezeichnet diess mit $y = f(x, z)$

oder $y = \psi(x, z)$. Ebenso würden die Symbole $y = F(x, z, t)$, $y = \varphi(x, z, t, v)$ Funktionen mehrerer Variablen andeuten.

Mit Hülfe der analytischen Geometrie kann man sich sehr leicht ein Bild jeder Funktion einer oder zweier Variablen verschaffen. Denkt man sich nämlich in einer Gleichung wie $y = f(x)$ die unabhängige Variable x als Abscisse, die abhängige y als Ordinate und den ganzen Ausdruck $y = f(x)$ als Gleichung einer Curve, so giebt die letztere unmittelbar ein anschauliches Bild von dem Verlaufe der Funktion $f(x)$. So würde z. B. $y = ax^2$ eine Parabel bedeuten, wobei der Scheitel der Anfangspunkt der rechtwinklichen Coordinaten und die Achse der Parabel die Ordinatenachse ist, ebenso $y = \frac{a}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel, wenn die Asymptoten zu Coordinatenachsen genommen werden. Um Funktionen zweier Veränderlichen zu construiren, muss man in den Raum hinausgehen und sich x, y, z als räumliche Coordinaten denken, dann bedeutet eine Gleichung wie $y = f(x, z)$ geometrisch eine Fläche, z. B. $y = \sqrt{r^2 - x^2 - z^2}$ eine Kugel mit dem Halbmesser r.

Da über die Werthe der unabhängigen Variablen ganz und gar keine Bestimmung gemacht ist, so steht es uns auch frei, dieselbe sich so ändern zu lassen, dass sie von irgend einer Stelle an entweder beständig ins Unendliche hinaus wächst, z. B. für $x = 1, 2, 3, 4$ u. s. f., oder unausgesetzt verringert wird, wie z. B. wenn man $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ etc. nimmt. Hierdurch wird offenbar auch eine beständige Aenderung in den Werthen der abhängigen Variablen hervorgerufen, die sich zwar wegen der grossen Allgemeinheit im Begriffe der Funktion geradezu nicht angeben lässt, für welche wir aber wenigstens drei Fälle unterscheiden können. Entweder nämlich durchlaufen die Werthe der Funktion das ganze unendliche Gebiet der Zahlen oder ein abgeschlossenes Stück desselben, oder sie nähern sich einer bestimmten angebbaren Grösse als Gränze. Als Beispiele für diese drei Fälle betrachten wir die Funktionen

$$\varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = \cos x, \quad f(x) = \frac{x}{a + x}$$

für ins Unendliche wachsende x. Die erste nimmt offenbar mit x gleichzeitig unausgesetzt zu und durchläuft das ganze Gebiet der positiven Zahlen; die zweite oszillirt beständig zwischen den Gränzen $+1$ und -1 hin und her, durchläuft also immer fort gewissermassen im

Kreise herum ein bestimmtes Intervall; die dritte endlich nähert sich einer bestimmten Gränze. Denn es ist auch

$$f(x) = 1 - \frac{a}{a+x},$$

und wenn nun x ins Unendliche wächst, so kann man offenbar $\frac{a}{a+x}$ kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl machen; es nähert sich folglich $\frac{a}{a+x}$ der Gränze Null und mithin $f(x)$ der Gränze Eins. Die Gränze selbst wird zwar nie erreicht, aber man kann ihr $f(x)$ so nahe bringen, als man nur will. Man bezeichnet einen solchen Gränzwerth durch die vorgeschriebene Sylbe Lim, also oben

$$\text{Lim}\ \frac{x}{a+x} = r,\ \text{für unendlich wachsende}\ x.$$

Gränzwerthe für unausgesetzt wachsende od. abnehmende Variable lassen sich übrigens leicht auf einander reduziren. Bezeichnet nämlich ω eine beständig wachsende, δ eine beständig abnehmende Grösse, so kann man $\frac{1}{\omega} = \delta$ setzen, weil jetzt δ continuirlich abnimmt, so wie ω wächst. Aus dieser Gleichung folgt aber $\omega = \frac{1}{\delta}$ und durch diese Substitution verwandelt sich die Gränzbestimmung für wachsende Werthe in eine für abnehmende Werthe.

Wir wollen uns nun mit der Aufsuchung einiger Gränzwerthe beschäftigen, welche für unsere weiteren Untersuchungen von der grössten Wichtigkeit sind, da die Operation des Gränzenüberganges ein Hauptmoment des höheren Calculs ist, wie sich aus der zweiten Hälfte dieser Einleitung in die Differenzialrechnung bald ergeben wird.

Eine der einfachsten Aufgaben dieser Art ist: die Gränze des Quotienten $\frac{\sin\delta}{\delta}$ zu finden, wenn wir δ unausgesetzt abnehmen oder, was das Nämliche ist, sich der Gränze Null nähern lassen. Man gelangt zu der Lösung dieses Problemes leicht durch folgende Betrachtungen. Bedeutet δ einen Bogen $< \frac{\pi}{2}$, so ist $\delta > \sin\delta$, folglich $\frac{\sin\delta}{\delta} < 1$, ferner $\tan\delta > \delta$, folglich, wenn man mit beiden in $\sin\delta$ dividirt,

$\frac{\sin\delta}{\tan\delta} < \frac{\sin\delta}{\delta}$ oder $\cos\delta < \frac{\sin\delta}{\delta}$. Wir haben so zwei Grössen gefunden, zwischen denen der fragliche Quotient liegt; es ist nämlich

$$1 > \frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta.$$

Lassen wir jetzt δ der Gränze Null zueilen, so rücken die Grössen 1 und $\cos\delta$, zwischen denen unser Quotient enthalten ist, immer näher an einander und fallen für $\delta = 0$ zusammen; da aber der Quotient nicht ausserhalb derselben liegen kann, so muss er jetzt ihrem gemeinschaftlichen Werthe $1 = \cos 0$ gleich sein. Wir haben demnach die wichtige Gleichung

$$\text{Lim}\,\frac{\sin\delta}{\delta} = 1. \qquad (1)$$

Wir können daraus gleich noch eine zweite ableiten, welche so lautet:

$$\text{Lim}\,\frac{\tan\delta}{\delta} = 1. \qquad (2)$$

Denn es ist

$$\frac{\tan\delta}{\delta} = \frac{\sin\delta}{\delta}\cdot\frac{1}{\cos\delta},$$

und da sich hier für abnehmende δ jeder der Quotienten $\frac{\sin\delta}{\delta}$ und $\frac{1}{\cos\delta}$ der Einheit nähert, so folgt unmittelbar die Richtigkeit des genannten Theorems.

Man überzeugt sich ebenso leicht auch von der Gültigkeit der olgenden Gleichungen:

$$\text{Lim}\,\frac{\delta}{\sin\delta} = 1 \text{ und } \text{Lim}\,\frac{\delta}{\tan\delta} = 1,$$

die man auch noch unter einer anderen Form darstellen kann. Setzt man nämlich in der ersten $\sin\delta = \delta'$, so folgt $\delta = \text{Arcsin}\,\delta'$, wobei unter $\text{Arcsin}\,\delta'$ der kleinste unter allen zu einem Sinus $= \delta'$ gehörenden Bögen verstanden wird. Da derselbe mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt, so ist jetzt für unausgesetzt abnehmende δ'

$$\text{Lim}\,\frac{\text{Arcsin}\,\delta'}{\delta'} = 1. \qquad (3)$$

Nimmt man ebenso in der zweiten der obigen Gleichuugen $\tan\delta = \delta'$, also $\delta = \text{Arctan}\,\delta'$, wo wieder $\text{Arctan}\,\delta'$ den kleinsten aller zu einer Tangente $= \delta'$ gehörigen Bögen bezeichnet, so ist für unbegränzt abnehmende δ'

$$\text{Lim}\ \frac{\text{Arctan}\,\delta'}{\delta'} = 1. \qquad (4)$$

Die beiden so gewonnenen Sätze (3) und (4) bilden die Umkehrungen der unter (1) nnd (2) verzeichneten.

Ein sehr fruchtbares Theorem, welches ebenfalls unter die Betrachtungen über die Gränzen der Funktionen gehört, ist das folgende: „wenn die Grösse μ nach irgend einem Gesetze ins Unendliche wächst, so nähert sich der Ausdruck

$$(1 + \frac{1}{\mu})^{\mu}$$

einer festen Gränze, welche zwischen den Zahlen 2 und 3 liegt."

Sei zuerst μ eine ganze Zahl $= m$, so lässt sich leicht zeigen, dass der fragliche Ausdruck zwar immer zunimmt, wenn m wächst, dass er aber trotz seines beständigen Wachsthumes nicht einmal die Zahl 3 erreichen kann. Denn es ist nach dem Binomialtheoreme, welches wir hier bloss für ganze positive Exponenten in Anspruch nehmen*),

*) Dasselbe lässt sich sehr einfach auf folgende Art beweisen. Es sei

$$S_m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

wo S_m die als unbekannt vorausgesetzte Summe der Reihe rechts bezeichnet. Ebenso ist analog

$$S_{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

und durch Subtraktion

$$S_m - S_{m-1} = x + \frac{m-1}{1}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^3 + \ldots$$

d. i.

$$S_m - S_{m-1} = xS_{m-1},$$

woraus

$$S_m = (1+x)S_{m-1}$$

folgt. Setzt man der Reihe nach $m, m-1, m-2, \ldots 2, 1$ für m, so erhält man die m Gleichungen

$$\begin{aligned} S_m &= (1+x)S_{m-1} \\ S_{m-1} &= (1+x)S_{m-2} \\ S_{m-2} &= (1+x)S_{m-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_2 &= (1+x)S_1 \\ S_1 &= (1+x)S_0. \end{aligned}$$

$$(1+\frac{1}{m})^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots\dots(m-\overline{m-1})}{1.2.3\dots\dots m}\left(\frac{1}{m}\right)^m$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(1+\frac{1}{m})^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})}{1.2.3} + \dots$$
$$+ \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\dots\dots(1-\frac{m-1}{m})}{1.2.3\dots\dots m}. \qquad (5)$$

Ebenso würde sein

$$(1+\frac{1}{m+1})^{m+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m+1}}{1.2} + \frac{(1-\frac{1}{m+1})(1-\frac{2}{m+1})}{1.2.3} + \dots$$
$$\frac{(1-\frac{1}{m+1})(1-\frac{2}{m+1})\dots\dots(1-\frac{m}{m+1})}{1.2.3\dots\dots(m+1)}. \qquad (6)$$

Vergleichen wir zwei Glieder gleicher Nummer aus beiden Reihen etwa die $k$ten Glieder, so ist das $k$te Glied der ersten Reihe:

$$\frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})(1-\frac{3}{m})\dots\dots(1-\frac{k-2}{m})}{1.2.3\dots\dots(k-1)}$$

offenbar kleiner als das $k$te Glied der zweiten Reihe

$$\frac{(1-\frac{1}{m+1})(1-\frac{2}{m+1})(1-\frac{3}{m+1})\dots\dots(1-\frac{k-2}{m+1})}{1.2.3\dots\dots(k-1)},$$

weil wegen $m < m+1$

Multiplizirt man diese m Gleichungen mit einander und bemerkt, dass der ursprünglichen Bedeutung von S_m nach $S_0 = 1$ ist, so folgt

$$S_1 S_2 S_3 \dots S_{m-1} S_m = (1+x)^m S_1 S_2 S_3 \dots S_{m-1}$$

d. i.

$$S_m = (1+x)^m,$$

womit die gesuchte Summe gefunden und zugleich das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten bewiesen ist.

$$1-\frac{1}{m}<1-\frac{1}{m+1}$$
$$1-\frac{2}{m}<1-\frac{2}{m+1}$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$1-\frac{k-2}{m}<1-\frac{k-2}{m+1}$$

folglich auch der Zähler dort kleiner als hier ist. Ausserdem aber, dass jedes Glied in der Reihe (5) kleiner ist, als das entsprechende in (6), enthält auch die letztere Reihe noch ein Glied mehr als die vorhergehende, folglich ist um so stärker

$$(1+\frac{1}{m})^m<(1+\frac{1}{m+1})^{m+1}.$$

Da offenbar nun wieder

$$(1+\frac{1}{m+1})^{m+1}<(1+\frac{1}{m+2})^{m+}<(1+\frac{1}{m+3})^{m+3}\,..$$

ist, so ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$(1+\frac{1}{m})^m$$

beständig zunimmt, wenn m wächst. Die Zunahme fängt an bei dem Werthe 2, welcher $m=1$ entspricht, aber sie geht nicht ins Unendliche fort. In der Reihe (5) nämlich sind die Grössen $\frac{1}{m}$ $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}, \ldots \frac{m-1}{m}$ ächte Brüche und mithin sind es auch die Differenzen

$$1-\frac{1}{m},\ 1-\frac{2}{m},\ 1-\frac{3}{m},\ \ldots\ldots 1-\frac{m-1}{m}$$

wenigstens übersteigen sie die Einheit nicht, wie gross auch m werden möge. Daraus folgt, dass auch die Produkte

$$(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m}),\ (1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})(1-\frac{3}{m}) \text{ etc.}$$

d. h. die Zähler der Reihenglieder in (5) die Einheit nicht übersteigen können; es kann mithin der Ausdruck $(1+\frac{1}{m})^m$ nicht grösser werden, als die Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}, \qquad (7)$$

wenn auch m unbegränzt zunimmt. Es ist aber

$$\frac{1}{2.3} < \frac{1}{2.2} \text{ d. i. } < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2.3.4} < \frac{1}{2.2.2} \text{ d. i. } < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

u. s. f.

folglich

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots m}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1},$$

oder nach der Summenformel für die geometrische Progression

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots m}$$

$$< 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m}{1 - \frac{1}{2}} \text{ d. i. } < 3 - \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Weil aber der Ausdruck $(1 + \frac{1}{m})^m$ nicht grösser als die Summe der Reihe (7), diese aber kleiner als $3 - \frac{1}{2^{m-1}}$ ist, so folgt jetzt ganz sicher

$$(1 + \frac{1}{m})^m < 3 - \frac{1}{2^{m-1}} \text{ mithin auch } < 3,$$

und diess gilt, wie gross auch m sein möge. Da nun $(1 + \frac{1}{m})^m$ mit m gleichzeitig immer zunimmt, gleichwohl aber immer kleiner als die Zahl 3 bleibt, so muss sich der fragliche Ausdruck einer bestimmten und zwar festen Gränze < 3 nähern, weil ein Oszilliren von $(1 + \frac{1}{m})^m$ durch den Nachweis seines beständigen Wachsthums ausgeschlossen ist. Man hat für diese Gränze den besonderen Buchstaben e eingeführt, welcher in der Analysis ebenso ausschliesslich zur Bezeichnung von Lim $(1 + \frac{1}{m})^m$ gebraucht wird, wie in der Geometrie der Buchstabe π für die Ludolphsche Zahl. Es ist übrigens vermöge der Definition von e, nämlich

$$e = \text{Lim}\,(1 + \frac{1}{m})^m \qquad (8)$$

sehr leicht einen Näherungswerth für e zu finden, indem man für m eine ziemlich grosse Zahl setzt und die Potenzirung wirklich ausführt; so erhält man z. B. für $m = 1000000$, $e = 2{,}71828$. Eine bequemere Methode für die Berechnung von e, welches, beiläufig gesagt, eine irrationale Zahl ist, werden wir später unter Anwendung der Differenzialrechnung kennen lernen, wobei sich ergiebt: $e = 2{,}7182818284590452\ldots$

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass die Gränze, welcher sich der allgemeinere Ausdruck $(1 + \frac{1}{\mu})^\mu$ für nach irgend einem Gesetze ins Unendliche wachsende μ nähert, ebenfalls die Zahl e ist. Wäre nämlich μ ein ins Unendliche zunehmender Bruch (wie z. B. wenn man der Reihe nach $\mu = \sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ etc. setzte), so giebt es doch immer zwei auf einander folgende ganze Zahlen m u. $n = m + 1$, zwischen denen in jedem Falle der Werth von μ enthalten ist. Wegen $m < \mu < n$ ist dann $\frac{1}{m} > \frac{1}{\mu} > \frac{1}{n}$, ebenso $1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{\mu} > 1 + \frac{1}{n}$ und folglich auch

$$(1 + \frac{1}{m})^\mu > (1 + \frac{1}{\mu})^\mu > (1 + \frac{1}{n})^\mu.$$

Da aber μ zwischen m und $n = m + 1$ liegt, so können wir $\mu = m + \alpha$ und $\mu = n - \beta$ setzen, wo α und β jedenfalls ächte Brüche sind; wir haben daher auch

$$(1 + \frac{1}{m})^{m+\alpha} > (1 + \frac{1}{\mu})^\mu > (1 + \frac{1}{n})^{n-\beta}$$

oder, was offenbar das Nämliche ist,

$$\left[(1 + \frac{1}{m})^m\right]^{1+\frac{\alpha}{m}} > (1 + \frac{1}{\mu})^\mu > \left[(1 + \frac{1}{n})^n\right]^{1-\frac{\beta}{n}}.$$

Lassen wir nun μ ins Unendliche zunehmen, so wachsen auch m und und n über alle Gränzen hinaus und wir haben daher

$$\text{Lim}\,(1 + \frac{1}{m})^m = e,\ \text{Lim}\,(1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Ferner nähern sich die Exponenten $1 + \frac{\alpha}{m}$ und $1 - \frac{\beta}{m}$ der gemeinschaftlichen Gränze Eins, mithin haben die beiden Ausdrücke, zwischen denen

$(1+\frac{1}{\mu})^{\mu}$ immer liegt, den gemeinschaftlichen Gränzwerth $e^1 = e$ und folglich muss auch

$$\text{Lim } (1+\frac{1}{\mu})^{\mu} = e \qquad (9)$$

sein, wo nun μ irgend eine **positive** unausgesetzt wachsende Grösse bezeichnet. — Wäre endlich μ negativ, also der Gränzwerth von $(1-\frac{1}{\mu})^{-\mu}$ aufzusuchen, so bemerke man, dass

$$\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu}$$

ist und setze jetzt $\mu = 1+\lambda$, so wird

$$\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^{1+\lambda} = \left[(1+\frac{1}{\lambda})^{\lambda}\right]^{1+\frac{1}{\lambda}}.$$

Nimmt nun μ ins Unendliche zu, so ist diess offenbar auch mit $\lambda = \mu - 1$ der Fall, folgl. $\text{Lim } (1+\frac{1}{\lambda})^{\lambda} = e$ und $\text{Lim } (1+\frac{1}{\lambda}) = 1$, mithin

$$\text{Lim } (1-\frac{1}{\mu})^{-\mu} = e. \qquad (10)$$

Fassen wir nun die unter (8), (9) und (10) gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich für **jedes** nach irgend einem Gesetze ins Unendliche wachsende μ die wichtige Gleichung

$$\text{Lim } (1+\frac{1}{\mu})^{\mu} = e. \qquad (11)$$

Nehmen wir $\frac{1}{\mu} = \delta$ also $\mu = \frac{1}{\delta}$, so stellt sich dieselbe in folgender Form dar:

$$\text{Lim } (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e, \qquad (12)$$

wobei sich das Zeichen Lim auf die unausgesetzte Abnahme von δ bezieht.

Man kann hieraus auch leicht den Gränzwerth von

$$(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

ableiten, wenn man voraussetzt, dass sich die Grösse a während der unbegränzten Abnahme von δ nicht ändert. Man hat nämlich

$$(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}} = [(1+a\delta)^{\frac{1}{a\delta}}]^{a}.$$

Hier nimmt die Grösse $a\delta$ mit δ gleichzeitig bis zur Null ab, und folglich ist auch

$$\mathrm{Lim}\,(1+a\delta)^{\frac{1}{a\delta}}=e,$$

mithin nach dem Vorigen

$$\mathrm{Lim}\,(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}}=e^a. \qquad (13)$$

Grössen von der Form e^a kommen in der Analysis häufig vor und führen da den Namen Exponenzialgrössen.

Man hat die Zahl e, welche in den vorigen Untersuchungen eine so wichtige Rolle spielte, auch zur Basis eines logarithmischen Systemes gemacht, dessen Logarithmen man die natürlichen nennt und mit log nat oder einem blossen l bezeichnet Es gilt von denselben ein sehr bemerkenswerther Satz, zu dem man auf folgende Weise gelangt. Bezeichnet log den Logarithmen irgend eines Systemes, so ist offenbar

$$\frac{\log(1+\delta)}{\delta}=\log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right],$$

folglich, wenn wir zur Gränze für abnehmende δ übergehen,

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\log(1+\delta)}{\delta}=\log e.$$

Da es für das Bestehen dieses Satzes ganz gleichgültig ist, nach welchem Gesetze δ abnimmt, wenn man es nur der Null so nahe bringen kann, als man will, so hindert nichts, $\delta=a^\varepsilon-1$ zu setzen, wo a die Basis der mit log bezeichneten Logarithmen und ε eine bis zur Null abnehmende Grösse bezeichnet. Es ist dann die einzige dem δ auferlegte Bedingung erfüllt und

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\varepsilon}{a^\varepsilon-1}=\log\,e,\ \text{bas}\ a$$

oder, wenn wir umkehren und δ für ε schreiben,

$$\mathrm{Lim}\,\frac{a^\delta-1}{\delta}=\frac{1}{\log e},\ \text{bas}\ a.$$

Vermöge der Bedeutung von a ist aber

$$a^{\log e}=e,$$

folglich, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$\log e\, la=le=1,$$

mithin

$$\frac{1}{\log e} = la$$

und jetzt nach dem Vorigen

$$\text{Lim}\,\frac{a^{\delta}-1}{\delta} = la. \qquad (14)$$

Die beiden unter (13) und (14) gefundenen Gleichungen haben, abgesehen von ihrer Wichtigkeit für die Differenzialrechnung, schon an sich eine ganz eigenthümliche Bedeutung. Sie zeigen uns nämlich, dass die Operation der Gränzbestimmung zu einem Uebergangsmittel werden kann, um aus dem Bereiche der einen Funktion in den einer anderen zu gelangen. So giebt uns die Formel (13) ein Mittel an die Hand, um aus einer Potenz wie b^{μ} eine Exponenzialgrösse abzuleiten, indem man nur $b = 1 + a\delta$, $\mu = \frac{1}{\delta}$ zu setzen und zur Gränze für abnehmende δ überzugehen braucht; ebenso würde man nach Formel (14) aus b^{μ} für $b = a$, $\mu = \delta$ mit Hülfe einer Subtraktion, Division und eines Gränzenüberganges Logarithmen aus Potenzen berechnen können. Wir thun hier also einen tieferen Blick in das Gewebe der Funktionen, indem wir die Potenz als die gemeinschaftliche Quelle der Exponenzialgrössen und Logarithmen und zugleich auch die Operationen kennen lernen, durch welche der Uedergang vermittelt wird.

Die Wissenschaft ist dem allgemeinen Gedanken, welcher sich hier ausspricht, nämlich Beziehungen zwischen anscheinend ganz verschiedenen Funktionen aufzusuchen und hierdurch den Zusammenhang zwischen den letzteren aufzudecken, noch weiter nachgegangen und ist so glücklich gewesen, auch zwischen der Exponenzialgrösse und den goniometrischen Funktionen einerseits, so wie zwischen dem Logarithmus und den cyklometrischen Funktionen andererseits Relationen zu entdecken, welche die nämlichen Dienste leisten wie oben die Gleichungen (13) und (14). Das verbindende Mittelglied ist hier nicht ein Gränzenübergang, sondern das eine numerische Unmöglichkeit bedeutende Symbol $\sqrt{-1}$, und diess hat zur Folge, dass die betreffenden Relationen nicht wie jene zur numerischen Berechnung taugen; da sie aber analytisch uns sehr wichtig werden, so möge hier eine Entwickelung derselben folgen.

Bezeichnen wir die unmögliche oder, wie man auch sagt, imaginäre Zahl $\sqrt{-1}$ der Kürze wegen ein für allemal mit i, so dass

$$i^2=-1,\ i^4=+1,\ i^6=-1,\ \ldots$$
$$i^3=-i,\ i^5=+i,\ i^7=-i,\ \ldots$$

ist, und multipliziren die beiden ähnlich gebildeten Binome $\cos x+i \sin x$ und $\cos y+i\sin y$ mit einander, so ergiebt sich leicht

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)$$
$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y+i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)$$

d. i. nach zwei bekannten Formeln der Goniometrie

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)=\cos(x+y)+i\sin(x+y).$$

Multipliziren wir beiderseits mit $\cos z+i\sin z$ und wenden auf der rech ten Seite das gefundene Theorem selbst wieder an, so wird

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)(\cos z+i\sin z)$$
$$=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z).$$

Beiderseitige Multiplikation mit $\cos u+i\sin u$ gäbe

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)(\cos z+i\sin z)(\cos u+i\sin u)$$
$$=\cos(x+y+z+u)+i\sin(x+y+z+u).$$

Man übersieht leicht, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen liesse und dass für m willkührliche Bögen Θ_1, Θ_2, Θ_3,... Θ_m die Gleichung gilt

$$(\cos\Theta_1+i\sin\Theta_1)(\cos\Theta_2+i\sin\Theta_2)\ldots(\cos\Theta_m+i\sin\Theta_m)$$
$$=\cos(\Theta_1+\Theta_2+\ldots+\Theta_m)+i\sin(\Theta_1+\Theta_2+\ldots+\Theta_m).$$

Von diesem Satze ist hauptsächlich derjenige spezielle Fall wichtig, in welchem die Grössen Θ_1, Θ_2, ... Θ_m sämmtlich einander gleich und etwa $=\Theta$ sind; es geht dann unsere Gleichung in die folgende über

$$(\cos\Theta+i\sin\Theta)^m=\cos m\Theta+i\sin m\Theta, \qquad (15)$$

die unter dem Namen des Moivre'schen Theoremes bekannt ist.

Man kann aus demselben leicht zwei schöne Sätze ableiten, mittelst deren man $\cos m\Theta$ und $\sin m\Theta$ durch Potenzen von $\cos\Theta$ und $\sin\Theta$ ausdrücken kann. Wendet man nämlich auf die linke Seite das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten an und berücksichtigt die oben angegebenen Werthe von i^2, i^3, i^4, i^5 etc., so findet man leicht

$$\cos m\Theta + i \sin m\Theta$$
$$= m_0 \cos^m\Theta - m_2 \cos^{m-2}\Theta \sin^2\Theta + m_4 \cos^{m-4}\Theta \sin^4\Theta - \ldots$$
$$+ i\{m_1 \cos^{m-1}\Theta \sin\Theta - m_3 \cos^{m-3}\Theta \sin^3\Theta + m_5 \cos^{m-5}\Theta \sin^5\Theta - \ldots\}$$

und hieraus durch Vergleichung *) der reellen und imaginären Partieen

$$\left.\begin{array}{c}\cos m\Theta = \\ m_0 \cos^m\Theta - m_2 \cos^{m-2}\Theta \sin^2\Theta + m_4 \cos^{m-4}\Theta \sin^4\Theta - \ldots\end{array}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{array}{c}\sin m\Theta = \\ m_1 \cos^{m-1}\Theta \sin\Theta - m_3 \cos^{m-3}\Theta \sin^3\Theta + m_5 \cos^{m-5}\Theta \sin^5\Theta - \ldots,\end{array}\right\} \quad (17)$$

wobei die erste Reihe nach geraden, die zweite nach ungeraden Potenzen von $\sin\Theta$ fortschreitet. Dividirt man beide Gleichungen durch $\cos^m\Theta$, so erhält man noch die folgenden bemerkenswerthen Resultate:

$$\frac{\cos mx}{\cos^m x} = m_0 - m_2 \tan^2 x + m_4 \tan^4 x - \ldots \quad (18)$$

$$\frac{\sin mx}{\cos^m x} = m_1 \tan x - m_3 \tan^3 x + m_5 \tan^5 x - \ldots \quad (19)$$

Eine andere nicht minder wichtige Anwendung des Moivreschen Theoremes ist die folgende. Da in no. (15) die Grösse Θ ganz beliebig ist, so steht es frei, $\Theta = \frac{x}{m}$ zu nehmen, woraus sich ergiebt

$$\left(\cos\frac{x}{m} + i \sin\frac{x}{m}\right)^m = \cos x + i \sin x$$

oder

$$\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left(1 + i \tan\frac{x}{m}\right)^m = \cos x + i \sin x,$$

und wenn wir $\frac{1}{m} = \vartheta$ setzen, wo ϑ einen Bruch mit dem Zähler 1 aber beliebigen Nenner bedeutet,

$$(\cos\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} (1 + i \tan\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = \cos x + i \sin x. \quad (20)$$

*) Aus einer Gleichung wie $A + Bi = a + bi$ folgt nämlich immer $A = a$ und $B = b$. Denn man hat zunächst $A - a = (b - B)i$ und durch beiderseitige Erhebung aufs Quadrat unter der Bemerkung, dass $i^2 = -1$ ist,

$$(A - a)^2 = -(b - B)^2 \text{ oder } (A - a)^2 + (b - B)^2 = 0.$$

Quadrate sind immer positive Grössen; die Summe zweier positiven Grössen kann aber nur dann Null sein, wenn jede für sich $= 0$ ist. Daher muss $(A - a)^2 = 0$ und $(b - B)^2 = 0$ sein, woraus $A = a$, $B = b$ folgt, w. z. b. w.

Da nun die vorige Gleichung für jedes auch noch so grosse m gilt und nie zu gelten aufhört, so muss sie auch dann noch richtig bleiben, wenn man m unbegränzt zunehmen, folglich ϑ sich der Null nähern lässt und die Gränze sucht, welcher sich in diesem Falle der ganze Ausdruck links in (20) nähert. Wir betrachten zu diesem Zwecke jeden der Faktoren einzeln.

Zuvörderst ist

$$(\cos\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = (1-\sin^2\vartheta x)^{\frac{1}{2\vartheta}}$$
$$= \left[(1-\sin^2\vartheta x)^{\frac{1}{\sin^2\vartheta x}}\right]^{\frac{\sin\vartheta x}{\vartheta x}\cdot\frac{x\sin\vartheta x}{2}},$$

wovon man sich durch Multiplikation der beiden Exponenten überzeugen kann. Nimmt nun ϑ unausgesetzt ab, so vermindern sich auch ϑx $\sin\vartheta x$ und $\sin^2\vartheta x$ bis zur Gränze Null. Es ist daher nach Formel (13) für $a=-1$, $\delta=\sin^2\vartheta x$

$$\operatorname{Lim}(1-\sin^2\vartheta x)^{\frac{1}{\sin^2\vartheta x}} = e^{-1} = \frac{1}{e};$$

ferner nach no. (1) für $\delta = \vartheta x$

$$\operatorname{Lim}\frac{\sin\vartheta x}{\vartheta x} = 1,$$

und weil ausserdem $\operatorname{Lim}\sin\vartheta x = 0$ ist, so wird jetzt

$$\operatorname{Lim}(\cos\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = \left[\frac{1}{e}\right]^{1\cdot\frac{x\,.\,0}{2}} = 1,$$

womit der Gränzwerth des ersten Faktors in (20) gefunden ist.

Was den zweiten Faktor in (20) anbetrifft, so ist offenbar

$$(1+i\tan\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = \left[(1+i\tan\vartheta x)^{\frac{1}{i\tan\vartheta x}}\right]^{\frac{\tan\vartheta x}{\vartheta x}xi}.$$

Die Grössen ϑx und $\tan\vartheta x$ nehmen hier mit ϑ gleichzeitig bis zur Null ab; es ist daher nach Formel (12)

$$\operatorname{Lim}(1+i\tan\vartheta x)^{\frac{1}{i\tan\vartheta x}} = e$$

und zwar reell, obgleich die Funktion imaginär ist, weil $i\tan\vartheta x$ mit ϑ gleichzeitig verschwindet und es also für den Endeffekt gleichgültig sein muss, ob die Grösse δ in (12) aus einer reellen oder imaginären

Gegend her bis zur Stelle Null gekommen ist. Ferner haben wir nach Formel (2) für $\delta = \vartheta x$

$$\text{Lim}\,\frac{\tan\vartheta x}{\vartheta x} = 1,$$

mithin zusammen

$$\text{Lim}\,(1 + i\tan\vartheta x)^{\frac{1}{\vartheta}} = e^{1\cdot xi} = e^{xi}.$$

Benutzen wir nun die gefundenen Resultate für die Gleichung (20), so ergiebt sich die formell sehr merkwürdige Relation

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x, \qquad (21)$$

welche uns ein Mittel giebt, um von der Exponenzialgrösse auf den Cosinus und Sinus zu kommen.

Diese Gleichung gilt übrigens ebenso allgemein, als die goniometrischen Formeln, von denen wir ausgegangen sind; man darf daher auch $-x$ an die Stelle von x setzen, wodurch man findet

$$e^{-xi} = \cos x - i\sin x.$$

Combinirt man diese Gleichung mit der vorigen durch Addition und Subtraktion, so gelangt man leicht zu den beiden Formeln

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \qquad (22)$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}; \qquad (23)$$

welche häufig gebraucht werden. Es würde hiernach auch leicht sein, alle übrigen goniometrischen Funktionen durch Exponentialgrössen mit imaginären Exponenten auszudrücken.

Die Gleichung (21) lässt sich leicht in einige andere Formen bringen, welche uns später ebenfalls von Wichtigkeit werden. Multiplizirt man nämlich beiderseits mit $e^{lr} = r$, so ist

$$e^{lr + xi} = r\cos x + ir\sin x, \qquad (24)$$

wobei man auch $r\cos x = \alpha$ und $r\sin x = \beta$ setzen kann, woraus folgt

$$(r\cos x)^2 + (r\sin x)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

oder

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

und ferner

$$\frac{r\sin x}{r\cos x} = \tan x = \frac{\beta}{\alpha},$$

mithin

$$x = \text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha} + k\pi,$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Vermöge der neuen Werthe für $r\cos x$, $r\sin x$, r und x ist nun nach Formel (24)

$$e^{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+i[\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}+k\pi]} = \alpha+\beta i.$$

Da aber für $\beta = 0$ die Gleichung sich auf die Identität $e^{l\alpha} = \alpha$ reduziren muss, so folgt $k = 0$ und mithin einfacher

$$\alpha+\beta i = e^{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+i\,\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{25}$$

wonach man jedes aus einem reellen und imaginären Theile bestehende Binom in Form einer Exponenzialgrösse darstellen kann.

Man kann die gefundene Gleichung auch umkehren, wenn man bemerkt, dass aus einer Gleichung wie $A = e^a$ immer folgt $lA = a$, was bekanntlich die Definition des Logarithmus ist. Behalten wir diese Definition auch hier bei, so folgt jetzt

$$l(\alpha+\beta i) = \tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}. \tag{26}$$

Ebenso leicht würde man für negativ β finden

$$l(\alpha-\beta i) = \tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) - i\,\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha},$$

und wenn man diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt und mit $2i$ dividirt

$$\frac{1}{2i}[l(\alpha+\beta i) - l(\alpha-\beta i)] = \text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}. \tag{27}$$

Hier lässt sich die in Klammern stehende Differenz nach der Regel $lx - ly = l\frac{x}{y}$ zusammenziehen, weil diese Regel auch für imaginäre x und y gilt. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. Die Formel $lx - ly = l\frac{x}{y}$ ist bekanntlich eine unmittelbare Folge der Gleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, sobald man auf diese die Definition des Logarithmus $e^{lz} = z$ anwendet. Die Gleichung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ gilt aber auch für imaginäre x und y; denn man hat

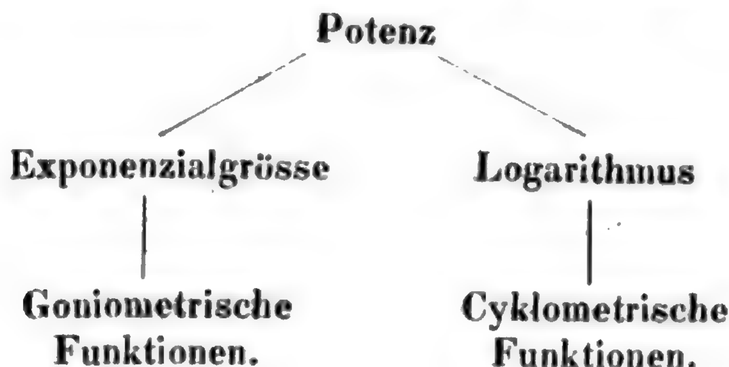
$$\begin{aligned} e^{xi} \cdot e^{yi} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{(x+y)i}; \end{aligned}$$

da nun die Definition des imaginären Logarithmus der des reellen analog gebildet ist, so muss die Regel $lx - ly = l\frac{x}{y}$ auch für imaginäre x und y gelten. Demnach ist aus Formel (27)

$$\frac{1}{2i}\, l\left(\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i}\right) = \text{Arctan}\,\frac{\beta}{\alpha}, \qquad (28)$$

wodurch der Uebergang vom Logarithmus zu den cyklometrischen Funktionen überhaupt hergestellt ist, da man die übrigen Funktionen Arcsin $\frac{\beta}{\alpha}$, Arccos $\frac{\beta}{\alpha}$ etc. leicht durch Arctan $\frac{\beta}{\alpha}$ ausdrücken kann.

Ein Blick auf den ganzen Gedankengang zeigt uns nun den Zusammenhang der verschiedenen Funktionen nach folgendem Schema:



Der erste Uebergang von der Potenz zur Exponenzialgrösse und zum Logarithmus geschieht mittelst einer Gränzbestimmung; von da kommen wir mit Hülfe der imaginären Beziehungen auf der linken Seite zu den goniometrischen, auf der rechten zu den cyklometrischen Funktionen. Zugleich sind die einander gegenüberstehenden Funktionen die Umkehrungen von einander.

Wir können uns jetzt leicht einen Begriff von dem nützlichen Gebrauche des obigen Schema's machen, wenn es auch hier nicht möglich ist, ein Beispiel davon zu geben. Gesetzt, man hätte die Potenz für jeden Werth des Exponenten in eine Reihe, ein Produkt, einen Kettenbruch verwandelt, oder in sonst eine andere analytische Form gebracht, so wäre es sehr leicht, für die übrigen Funktionen des obigen Schema's die entsprechende analytische Form aufzufinden. Man brauchte nur auf jedes Glied der Reihe, des Kettenbruches etc. ganz dieselben Operationen anzuwenden, durch welche man die neue Funktion aus der alten ableitet. So würde man z. B. aus einer Reihe für b^μ eine Reihe für e^a dadurch entwickeln, dass man in jedem einzelnen

Reihengliede $1 + a\delta$ für b, $\frac{1}{\delta}$ für μ setzte und dann zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ überginge. Die wirkliche Ausführung dieses Gedankens bei verschiedenen analytischen Formen ist das Geschäft des speziellen Theiles der algebraischen Analysis, welchem der oben schematisch angegebene organische Zusammenhang einer gewissen Reihe von Funktionen als leitender Faden zu Grunde liegt, woran sich die verschiedenen Resultate aufreihen. Indessen ist das Detail hiervon für unsere Zwecke nicht nöthig, und wir verlassen daher diese Betrachtungen, um uns dagegen einem anderen Kreise von Untersuchungen zuzuwenden, worin wir den höheren Rechnungsweisen näher treten und uns über Mittel und Zwecke derselben völlig verständigen können.

Die grösste Schwierigkeit, welche die Mathematik im Verlaufe ihrer stufenweisen Ausbildung zu überwinden hatte, war die Lösung des Problemes: das Gesetz der Stetigkeit, nach welchem sich alle in Raum oder Zeit ausgedehnten Grössen bilden, auf mathematische Begriffe zu bringen und es hiermit entweder durch Construktion oder durch Rechnung in den Kreis ihrer Betrachtungen zu verflechten. Schon in der Arithmetik kommen einige Fälle vor, bei welchen sich die genannte Schwierigkeit fühlbar macht (z. B. bei den periodischen Dezimalbrüchen und irrationalen Wurzeln) und noch häufiger begegnet man ihr in der algebraischen Analysis, die sich zur Ueberwindung derselben den eigenthümlichen Begriff der Gränze bilden muss. Theilen wir z. B. eine Grösse nach irgend einem Theilungsgesetze, etwa durch fortgesetzte Halbirung, in immer kleinere Theile und versuchen wir nachher dieselbe wieder aus ihren Theilen zusammenzusetzen, so stossen wir auf das für den ersten Anblick paradoxe Problem der Summirung einer unendlichen Menge immer kleiner werdender Grössen (der einzelnen Theile); hier liegt die Schwierigkeit blos in der vermöge des Gesetzes der Stetigkeit unbegränzten Theilbarkeit der ursprünglich vorgenommenen Grösse; denn wenn man im Verlaufe der successiven Theilung auf ein untheilbares Letztes käme, so würde die entsprechende Reihe eine endliche sein. In weit verwickelterer Gestalt aber erscheint die Forderung, sich des Stetigkeitsgesetzes mathematisch zu versichern, da, wo wir es nicht mit einer Grösse allein, sondern mit einem System zweier oder mehrerer Grössen zu thun haben, in welchem die eine Grösse den stetigen Aenderungen der anderen ihre Existenz zu verdanken hat. Betrachtungen dieser eigenthümlichen Art kommen ganz besonders häufig in der Mechanik vor und geben dann immer zu einigen Aufgaben Veranlassung, deren hauptsächlichste im Allgemeinen so lautet: welcher ist der Totaleffekt einer Ursache, welche eine gewisse Zeit lang wirksam gewesen ist, vorausgesetzt, dass man entweder, wenn die Intensität der Ursache während jener

Zeit constant bleibt, diese Intensität selbst kennt, oder, wenn sich die Intensität mit der Zeit ändert, ihren anfänglichen Grad und das Gesetz ihrer Aenderung weiss? Es giebt aber auch Probleme der Geometrie, welche ganz das nämliche Gepräge tragen und namentlich gehören hieher alle Aufgaben über die Quadratur und Rektifikation der Curven, die Cubatur und Complanation der Flächen. So können wir uns z. B. in fig. 1 die von der Geraden AB, den Senkrechten AP, BQ und der Curve $PN_1N_2\ldots Q$ eingeschlossene Fläche dadurch entstanden denken, dass eine auf OX senkrechte Linie XY aus der Lage AP parallel mit sich selbst bis BQ stetig fortgerückt ist, während der Endpunkt Y auf ihr selbst stetig auf und abstieg und so die begränzende Curve erzeugte. Natürlich muss in jedem bestimmten Falle das Gesetz bekannt sein, nach welchem der Punkt Y auf- und absteigt, wenn er gerade diese oder jene bestimmte Curve beschreiben soll. Dieses Beispiel bildet ein vollkommenes Analogon zu dem obenangeführten Probleme der Mechanik, welches man sehr leicht dadurch auf dasselbe reduziren kann, dass man sich die Zeit auf der Geraden OX ausgedehnt, die veränderliche Ursache als die variabele Ordinate XY und die während einer bestimmten Zeit AB hervorgebrachte Wirkung als die überstrichene Fläche $ABQP$ denkt. Wir können demnach die Quadratur einer krummen Linie als das allgemeine Schema dieser ganzen Klasse von Aufgaben gelten lassen *).

Vergleichen wir mit dieser Entstehungsweise einer Grösse die anfangs betrachtete in der algebraischen Analysis vorkommende, so finden wir einen wesentlichen Unterschied. Dort würden wir die Fläche aus ihren Theilen, etwa ihrer Hälfte, dem Viertel, Achtel etc., also wieder aus Flächen zusammensetzen, oder überhaupt irgend eine Grösse als Aggregat ihrer mit ihr selbst gleichartigen Theile ansehen, hier aber lassen wir die Fläche durch stetige Bewegung einer Geraden, und überhaupt eine Grösse durch stetige Veränderung einer mit ihr ungleichartigen entstehen. Während sich also die algebraische Analysis vorzüglich mit Beziehungen zwischen gleichartigen Grössen beschäftigt, bekommen wir es auf unserem Felde mit Relationen zwischen solchen Grössen zu thun, welche entweder geradezu

*) Sehr schöne synthetische Betrachtungen dieses Genre's kommen in Newtons Principiis philos. nat. vor (de motu corporum liber primus sectio I), womit man überhaupt diese ganze Einleitung zusammenhalten möge.

ungleichartig sind, oder es wenigstens werden, sobald man ihnen eine geometrische oder physikalische Bedeutung unterlegt.

Treten wir jetzt näher an die vorhin angeregte Aufgabe über die Quadratur einer Curve, die wir als allgemeinen Typus unserer sämmtlichen Aufgaben anzusehen haben. Für die Elementargeometrie ist dieselbe ohne Zuziehung eines neuen Prinzipes offenbar ganz unlösbar, weil vermöge des Gesetzes der Stetigkeit kein Theil einer krummen Linie, sei er auch noch so klein, eine Gerade ist und folglich kein Theil der fraglichen Fläche als geradlinig begränzt angesehen und danach seine Grösse berechnet werden könnte. Wenn wir nun aber auch vor der Hand auf eine vollkommen genaue Lösung unserer Aufgabe Verzicht leisten müssen, so wäre es bei der Wichtigkeit derselben doch wohl der Mühe werth, wenigstens eine angenäherte Bestimmung der unbekannten Fläche zu versuchen, was für manche, namentlich praktische Zwecke, schon hinreichen könnte. Hierzu bietet sich ganz von selbst ein sehr einfacher Gedanke an.

Theilen wir die Basis AB unserer Fläche in beliebig viele Theile AM_1, M_1M_2, $M_2M_3, \ldots M_{n-1}B$, deren Anzahl n betragen möge, und ziehen wir durch jeden der Theilpunkte $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ eine Senkrechte auf AB, so zerfällt die ganze Fläche in eine Reihe von Streifen, welche wir mit einiger Aufopferung der Genauigkeit als Rechtecke ansehen und danach ihre Inhalte berechnen können. Lassen wir ferner, um eine bestimmte Bezeichnung einführen zu können, $y=f(x)$ die Gleichung der Curve bedeuten, wenn für O als Anfangspunkt der Coordinaten $OX=x$, $XY=y$ und $f(x)$ eine beliebige Funktion von x ist, setzen wir endlich

$$OA=a,\ OB=b, \text{ mithin } AB=b-a$$

und

$$AM_1=\delta_1,\ M_1M_2=\delta_2,\ M_2M_3=\delta_3, \ldots M_{n-1}B=\delta_n,$$

also

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_{n-1}=b-a,$$

so ist vermöge der Gleichung der Curve

$$AP=f(a),\ M_1N_1=f(a+\delta_1),\ M_2N_2=f(a+\delta_1+\delta_2), \ldots$$
$$M_{n-1}N_{n-1}=f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}),\ BQ=f(b);$$

und folglich haben wir näherungsweis:

$$AM_1 N_1 P = AM_1 . AP = \delta_1 f(a)$$
$$M_1 M_2 N_2 N_1 = M_1 M_2 . M_1 N_1 = \delta_2 f(a+\delta_1)$$
$$M_2 M_3 N_3 N_2 = M_2 M_3 . M_2 N_2 = \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M_{n-1} BQN_{n-1} = M_{n-1} B . M_{n-1} N_{n-1} = \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})$$

und durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich jetzt folgende Näherungsformel für die Fläche $ABQP$:

$$\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}),$$

wobei nicht zu vergessen ist, dass die Bedingung

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_{n-1} = b - a$$

erfüllt sein muss.

Aber diese Näherung muss als eine noch ganz rohe bezeichnet werden, da wir nicht im Stande sind, den Grad derselben zu beurtheilen, oder, was auf das Nämliche hinauskommt, da wir die Gränzen nicht kennen, zwischen denen der begangene Fehler liegt. Wir werden daher genöthigt sein, diesen Mangel durch eine schärfere Auffassung unseres Problemes zu ergänzen, was vielleicht sogar die Möglichkeit gewähren könnte, uns von einer ungefähren Angabe des gesuchten Flächeninhaltes zu einer vollkommen genauen Berechnung desselben zu erheben. Hierzu führen die folgenden Untersuchungen. Die in den Entfernungen δ_1, δ_2, δ_3, etc. gezogenen Ordinaten $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, $M_3 N_3$, etc. kann man immer so legen, dass die begränzende Curve zwischen je zweien von ihnen entweder blos steigt oder blos fällt. In der That ist hierzu weiter nichts nöthig, als dass man zuerst von den höchsten und tiefsten Punkten der krummen Linie (in fig. 1 z. B. N_1, N_3, etc.) Perpendikel auf die Basis AB herablässt und zwischen diesen dann beliebig viele andere Ordinaten einschaltet. Unter allen den verschiedenen, theils positiven, theils negativen Differenzen, welche diese Ordinaten bilden, also unter den Grössen

$$f(a+\delta_1) - f(a),\ f(a+\delta_1+\delta_2) - f(a+\delta_1), \ldots$$
$$f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n) - f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})$$

muss es nun nothwendig eine absolutgrösste geben, welche etwa durch zwei in der Entfernung δ_k von einander stehende Ordinaten gebildet

wird, wobei δ_k eine unter den Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ bezeichnet. Nennen wir p die Entfernung des Fusspunktes der ersten dieser Ordinaten vom Anfangspunkte O, so sei

$$f(p+\delta_k)-f(p)=\lambda$$

das Maximum der Ordinatendifferenzen. Ist ferner in fig. 2. $MM'Q'Q$ irgend einer der Streifen, in welche bei der vorigen Construktion die krummlinigbegränzte Fläche zerlegt wurde, und $AM = \delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1}$, $MM'=\delta_h$, so nehme man von Q aus $QL=QL' = \lambda$ und vollende das Rechteck $LGG'L'$; hier liegt, weil TQ' kleiner als das Ordinatendifferenzenmaximum $TG=\lambda$ ist, der Punkt G jedenfalls über Q', und G' unter Q', ebenso L über Q, und L' unter Q. Da nun die Curve während des Intervalles MM' entweder blos steigt oder blos fällt, so muss das Stück QQ' derselben ganz innerhalb des Rechteckes $LGG'L'$ liegen *), und hieraus folgt unmittelbar

$$MM'Q'Q < MM'GL \text{ und } MM'Q'Q > MM'G'L'$$

oder

$$MM'Q'Q < MM'.ML \text{ und } MM'Q'Q > MM'.ML',$$

oder wenn man für MM' seinen vorher bestimmten Werth setzt und bemerkt, dass $ML=MQ+\lambda$, $ML'=MQ-\lambda$ ist,

$$MM'Q'Q < \delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})+\lambda],$$
$$MM'Q'Q > \delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})-\lambda];$$

und wenn man den Streifen $MM'Q'Q$ mit u_h bezeichnet,

$$\delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})+\lambda] > u_h > \delta_h[f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{h-1})-\lambda],$$

und diess gilt auch dann noch, wenn $OM=p$, also $\delta_h=\delta_k$ wäre, wo die Ordinatendifferenz ihr Maximum erreicht. Denn für diesen Fall würde sich die Zeichnung nur darin ändern, dass Q' mit einem der Punkte G, G' zusammenfiele.

Denken wir uns jetzt die vorige Betrachtung auf jeden der in fig. 1. vorkommenden Streifen angewendet, so haben wir folgende Reihe von Ungleichungen:

---

*) Diese Behauptung nebst ihren Consequenzen würde falsch sein, wenn die begränzende Curve während jenes Intervalles zugleich steigen und fallen dürfte. Dann könnte sich nämlich die Zeichnung wie in fig. 3. gestalten, wo man nicht behaupten kann, dass $MM'Q'Q < MM'GL$ sein müsse.

$$\delta_1 [f(a)+\lambda] > u_1 > \delta_1 [f(a)-\lambda]$$
$$\delta_2 [f(a+\delta_1)+\lambda] > u_2 > \delta_2 [f(a+\delta_1)-\lambda]$$
$$\delta_3 [f(a+\delta_1+\delta_2)+\lambda] > u_3 > \delta_3 [f(a+\delta_1+\delta_2)-\lambda]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_n [f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})+\lambda] > u_n > \delta_n [f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})-\lambda],$$

aus deren Addition die neue Ungleichung entspringt:

$$\begin{aligned}
&\delta_1 f(a)+\delta_2 f(a+\delta_1)+\delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2)+\ldots+\delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}) \\
&\quad +\lambda(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots\ldots+\delta_n) \\
&\quad > u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_n > \\
&\delta_1 f(a)+\delta_2 f(a+\delta_1)+\delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2)+\ldots+\delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}) \\
&\quad -\lambda(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots\ldots+\delta_n).
\end{aligned}$$

Hier ist die Reihe $\delta_1 f(a)+\delta_2 f(a+\delta_1)+$ etc. die Summe der Rechtecke, die uns früher zur näherungsweisen Bestimmung der gesuchten Fläche führte; wir wollen sie mit S_n bezeichnen, so dass

$$S_n = \delta_1 f(a)+\delta_2 f(a+\delta_1)+\delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2)+\ldots \\ \ldots+\delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})$$

ist. Ferner hat man $\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_n = b-a$ und die Summe der krummlinigbegränzten Streifen u_1, u_2, $u_3 \ldots u_n$ gleich der gesuchten Fläche über $AB=b-a$, die wir, weil sie eine Funktion der Basis ist, $=F(b-a)$ setzen wollen. Durch Einführung dieser Abkürzungen geht die obige Ungleichung in die folgende über:

$$S_n+\lambda(b-a) > F(b-a) > S_n-\lambda(b-a).$$

Hiermit ist das Problem gelöst, die Gränzen zu finden, innerhalb welcher der Fehler liegen muss, den man dadurch begeht, dass man statt der krummlinigbegränzten Fläche $F(b-a)$ die Rechtecksumme S_n setzt. Denn es folgt jetzt

$$\lambda(b-a) > F(b-a)-S_n > -\lambda(b-a),$$

so dass also der absolute Werth des begangenen Fehlers kleiner als das Produkt aus der Basis und dem Maximum der Ordinatendifferenzen ist.

Wir haben nun blos noch einen Schritt zu thun, um uns zu überzeugen, dass die Annäherung der Rechtecksumme an die Fläche so weit getrieben werden kann, als es nur verlangt wird. Denken wir uns nämlich die Ordinaten $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, ... $M_{n-1} N_{n-1}$ festgehalten und zwischen ihnen eine beliebige Menge anderer eingeschaltet, so

wird die Begränzungscurve auch zwischen je zweien unter allen den nunmehr dastehenden Ordinaten entweder blos steigen oder blos fallen, und folglich sind die neuen Differenzen kleiner als die alten. Nun ist aber die begränzende krumme Linie durch eine stetige Bewegung entstanden, mithin selbst eine stetig verlaufende; fahren wir daher mit der Einschaltung immer neuer Ordinaten fort, so können wir die Differenzen der benachbarten Ordinaten kleiner als jede noch so kleine angebbare Grösse machen und folglich auch das Differenzenmaximum λ und ebenso das Produkt $\lambda(b-a)$ auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabbringen. Der Fehler $F(b-a)-S_n$ ist also, wenn man die Anzahl n der Ordinaten vermehrt und die Entfernungen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ derselben beständig verringert, einer unbegränzten Verkleinerung fähig. Könnte man $\lambda=0$ machen, so wäre $F(b-a)-S_n=0$, folglich vollkommen genau $F(b-a)=S_n$. Diess lässt sich aber durch Construktion nicht erreichen; denn wie viele Ordinaten man auch eingeschaltet haben, wie gross also n und wie klein auch δ_k sein mag, so ist doch $\lambda=f(p+\delta_k)-f(p)$ nicht schlechthin $=0$. Dagegen kann man arithmetisch zum Ziele kommen, wenn man die Null als den **Gränzwerth** betrachtet, dem sich alle die Grössen nähern, die einer unbegränzten Verringerung fähig sind. Gehen wir daher zur Gränze über für unausgesetzt abnehmende $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k, \ldots \delta_n$ und unbegränzt wachsende n, so wird

$$\operatorname{Lim} \lambda = 0,\ \operatorname{Lim}\{F(b-a)-S_n\}=0,$$
$$\text{oder}\quad F(b-a)=\operatorname{Lim} S_n,$$

und vermöge der Bedeutung von S_n:

$$F(b-a)=$$
$$\operatorname{Lim}\{\delta_1 f(a)+\delta_2 f(a+\delta_1)+\delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2)+\ldots+\delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})\},$$

wobei immer

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_n=b-a$$

sein muss.

Hiermit ist nun eine vollkommen genaue Formel gefunden. Dieselbe gestaltet sich noch etwas einfacher, wenn man die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ einander gleich und $=\delta$ setzt; es ist dann:

$$F(b-a)=$$
$$\operatorname{Lim}\{\delta[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\}.$$
$$(n\delta=b-a).$$

Nimmt man noch $a = 0$, $b = x$, so wird

$$F(x) = \text{Lim}\,\{\delta\,[f(0) + f(\delta) + f(2\delta) + \ldots + f(\overline{n-1}\,\delta)]\},$$
$$(n\delta = x),$$

oder weil aus $n\delta = x$, $\delta = \frac{x}{n}$ folgt:

$$F(x) = \text{Lim}\left\{\frac{x}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{x}{n}\right) + f\left(\frac{2x}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)\right]\right\}$$

Die beiden letzten Formeln geben die über der Strecke $OX = x$ (in fig. 1.) stehende, durch $OR = f(0)$, $XY = f(x)$ und die Curve $RPQY$ begränzte Fläche. Man kann daraus die vorige Fläche leicht wieder erhalten, wenn man $x = b$, $x = a$ setzt und die beiden so entstehenden Werthe, nämlich die Flächen $OBQR$ und $OAPR$, von einander abzieht.

Es spricht sich in den obenentwickelten Formeln auch ein ganz allgemeines Gesetz aus, welches eine Relation zwischen den beiden verschiedenen Entstehungsweisen einer Grösse angiebt. Die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ bedeuten nämlich ungleichartige Grössen, von denen die erstere durch stetige Aenderung der letzteren entstanden ist, unsere Formel aber, welche der analytische Ausdruck für diesen Process ist, verlangt zwei Operationen, erstlich die Addition der Produkte $\frac{x}{n}f(0)$, $\frac{x}{n}f\left(\frac{x}{n}\right)$, $\frac{x}{n}f\left(\frac{2x}{n}\right)$ etc. und darauf einen Gränzenübergang. Bemerken wir nun, dass jene Produkte mit $F(x)$ gleichartig sind, weil sie Theile von $F(x)$ bedeuten, so haben wir folgendes allgemeine Theorem:

Von den zwei möglichen verschiedenen Entstehungsweisen einer Grösse, die man vielleicht nicht unpassend einer unorganischen Anhäufung und einem organischen Processe vergleichen könnte, lässt sich die zweite auf die erste zurückführen, wenn man mit dieser die Operation eines Gränzenüberganges verbindet.

Als Beispiele hierzu wollen wir in der letzten der gefundenen Formeln folgende spezielle Fälle der Funktion $f(x)$ betrachten.

1) Es sei $f(x) = gx$, wo g einen constanten Faktor bedeutet. Es ist dann

$$F(x)=\text{Lim}\left\{\frac{x}{n}\left[g\frac{x}{n}+g\frac{2x}{n}+g\frac{3x}{n}+\ldots+g\frac{\overline{n-1}x}{n}\right]\right\}$$
$$=\text{Lim}\{g\frac{x^2}{n^2}[1+2+3+\ldots+(n-1)]\}.$$

Andererseits hat man aber nach einer bekannten Formel

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

folglich

$$\frac{x^2}{n^2}[1+2+3+\ldots+(n-1)]=\frac{x^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=(1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2}$$

und hieraus durch Uebergang zur Gränze für unausgesetzt wachsende n

$$F(x)=\text{Lim}\,g(1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2}=g\frac{x^2}{2}.$$

Diess stimmt in der That mit dem Resultate zusammen, welches sich unmittelbar aus der Geometrie ergiebt, wenn man bemerkt, dass für $f(x)=gx$ die Curven RY zu einer durch den Punkt O gehenden Geraden wird und mithin die Fläche $OXYR$ sich in das Dreieck OXY verwandelt, dessen Inhalt $=\frac{1}{2}OX.XY=\frac{1}{2}x.gx=g\frac{x^2}{2}$ ist.*)

2) Für $f(x)=gx^2$ findet sich sehr leicht

$$F(x)=\text{Lim}\{g\frac{x^3}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]\},$$

oder weil bekanntlich

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(2n-1)n(n-1)}{6}$$

ist, auch

$$F(x)=\text{Lim}.\,g\frac{(2n-1)n(n-1)}{n^3}\cdot\frac{x^3}{6}=\text{Lim}.\,g(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})\frac{x^3}{6}$$

oder

$$F(x)=g\frac{x^3}{3}.$$

Hierin spricht sich die von Archimedes gefundene Quadratur der Para-

*) Denkt man sich x als die verfliessende Zeit, gx als Geschwindigkeit eines bewegten Punktes und $F(x)$ als den von ihm durchlaufenen Raum, so ergiebt sich der Satz: „nimmt die Geschwindigkeit eines Punktes der Zeit proportional zu, so verhalten sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten“, der als das Galileische Fallgesetz bekannt ist.

bel aus. Ziehen wir nämlich durch den Scheitel O einer Parabel (fig. 4) OX senkrecht auf die Achse und setzen $OX = x$, $XY = y$, so ist bekanntlich $y = gx^2$ die Gleichung der Parabel. Schreibt man das gefundene Resultat unter der Form $\frac{x \cdot gx^2}{3}$, so erkennt man auf der Stelle, dass die Fläche $OXYQ$ ein Drittheil von der Fläche des Rechtecks $OXYZ$ ist, woraus folgt, dass die Fläche $OQYZ$ zwei Drittheile desselben ausmacht, was zuerst von Archimedes bewiesen wurde.

3) Für $f(x) = a^x$ hat man

$$F(x) = \text{Lim} \left\{ \frac{x}{n} [1 + a^{\frac{x}{n}} + a^{\frac{2x}{n}} + \ldots + a^{\frac{\overline{n-1}x}{n}}] \right\}.$$

Die eingeklammerte Reihe lässt sich leicht summiren, wenn man sie in folgender Form darstellt

$$1 + a^{\frac{x}{n}} + (a^{\frac{x}{n}})^2 + (a^{\frac{x}{n}})^3 + \ldots + (a^{\frac{x}{n}})^{n-1}$$

und nun die bekannte Summenformel

$$1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^{n-1} = \frac{u^n - 1}{u - 1}$$

für $u = a^{\frac{x}{n}}$ in Anwendung bringt. Man findet so:

$$F(x) = \text{Lim} \frac{x}{n} \cdot \frac{(a^{\frac{x}{n}})^n - 1}{a^{\frac{x}{n}} - 1} = \text{Lim} \frac{a^x - 1}{(a^{\frac{x}{n}} - 1) : \frac{x}{n}}.$$

Nach Formel (14) auf Seite XII ist aber für unausgesetzt abnehmende δ

$$\text{Lim} \frac{a^\delta - 1}{\delta} = la,$$

wo la den natürlichen Logarithmus von a bedeutet, folglich wenn $\delta = \frac{x}{n}$ gesetzt wird und jetzt n ins Unendliche wächst,

$$\text{Lim} (a^{\frac{x}{n}} - 1) : \frac{x}{n} = la.$$

Unter Anwendung dieses Satzes ergiebt sich aus dem Vorigen

$$F(x) = \frac{a^x - 1}{la}.$$

Man wird aus diesen Beispielen leicht ersehen, in welcher Weise die bei der allgemeinen Formel angedeuteten Rechnungsoperationen auszuführen sind. Zuvörderst hat man in jedem speziellen Falle die Summe der endlichen Reihe

$$f(0)+f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{2x}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)$$

aufzusuchen, weil man ohne diese den Totaleffekt nicht beurtheilen kann, welchen das beständige Anwachsen der Zahl n hervorbringt. Diese Nothwendigkeit der Summirung einer endlichen Reihe verursacht eine nicht geringe Schwierigkeit in der Behandlung aller Aufgaben dieser Art. Wir kennen nämlich nur von einigen wenigen endlichen Reihen die Summen, aber auch selbst diese würden für eine systematische Bearbeitung unseres Problemes nur von sehr untergeordneter Bedeutung sein. Denn hier käme es zunächst darauf an, für alle die aus der algebraischen Analysis bekannten Funktionen:

$$f(x)=x^a,\ a^x,\ lx,\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ldots$$
$$\operatorname{Arcsin} x,\ \operatorname{Arccos} x,\ \operatorname{Arctan} x,\ldots$$

die zugehörigen Funktionen $F(x)$ aufzusuchen, die gewissermassen die Grundpfeiler des ganzen neuen Calcüls ausmachen würden. Aber da stossen wir schon bei der ersten Aufgabe auf eine grosse Schwierigkeit; es wäre nämlich zu ihrer Lösung nothwendig, die Summe der Reihe

$$\left(\frac{x}{n}\right)^a+\left(\frac{2x}{n}\right)^a+\left(\frac{3x}{n}\right)^a+\ldots+\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right)^a$$

d. h. die der etwas einfacheren

$$1^a+2^a+3^a+\ldots+(n-1)^a$$

für jedes beliebige a ausfindig zu machen, was in dieser Allgemeinheit mit den Hülfsmitteln der gewöhnlichen Algebra — und andere haben wir hier nicht — geradezu unmöglich ist. Nicht besser würde es uns für $f(x)=\tan x$, $\operatorname{Arcsin} x$ etc. gehen.

Wie aber, wenn man statt fruchtloser Bemühungen, die angedeuteten Schwierigkeiten zu beseitigen, eine Umgehung derselben versuchte? Könnte man nicht vielleicht einen indirekten Weg einschlagen, etwa durch Umkehrung der Aufgabe selbst? Es ist nicht schwer,

diese Frage gehörig zu beurtheilen. Nehmen wir an, es sei die umgekehrte Aufgabe gelöst und man habe für verschiedene Funktionen $F(x)$ die entsprechenden $f(x)$ gefunden, so würde man sich eine Tabelle dieser Resultate machen können, welche etwa so aussähe:

Gegebene $F(x)$	Gesucht $f(x)$
$\frac{1}{2}gx^2$	gx
$\frac{1}{3}gx^3$	gx^2
$\frac{a^x-1}{la}$	a^x

Wollte man nun dagegen zu einem gegebenen $f(x)$ das zugehörige $F(x)$ finden, so brauchte man blos nachzusehen, ob die vorgelegte Funktion $f(x)$ unter der Rubrik $f(x)$ vorkommt; die links daneben stehende Funktion wäre dann das gesuchte $F(x)$. Ja, was noch mehr ist, es muss sogar möglich sein, allgemeine Regeln zu entdecken, nach welchen man zu einer Funktion, die zwar selbst nicht unter der Ueberschrift $f(x)$ steht, die aber aus anderen zusammengesetzt ist, die einzeln unter dieser Ueberschrift vorkommen, die zugehörige Funktion aus denjenigen Funktionen ableiten kann, welche den Theilen der gegebenen Funktion entsprechen. So wird man z. B. aus der allgemeinen Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen $f(x)$ und $F(x)$ angiebt, leicht das Theorem ableiten: wenn zu $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ die Funktionen $F(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ gehören und

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

ist, so muss auch

$$F(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$$

sein. Daraus folgt z. B., dass der Funktion $f(x) = gx + gx^2$ die Funktion $F(x) = x\,\frac{1}{2}g^2 + {}_3gx^3$ entspricht.

Soll aber die praktische Ausführung des Gedankens, vorerst aus der Natur der Funktion $F(x)$ die von $f(x)$ zu bestimmen, möglich sein, so müssen sich die Rechnungsoperationen, mittelst welcher man $f(x)$ aus $F(x)$ abzuleiten hätte, einfacher als die gestalten, welche wir der umgekehrten Aufgabe dienen sahen. Ehe wir diess entscheiden können, müssen wir natürlich die fraglichen Operationen erst kennen zu lernen suchen und zu diesem Zwecke wenden wir uns an fig. 5. In dieser sei wie bisher $OX = x$, $XY = f(x)$ und die Fläche $OXYR$

$= F(x)$, wobei wir jetzt die letztere Funktion als bekannt anzusehen haben. Geben wir dem x einen Zuwachs $XX' = \delta$, so nimmt $F(x)$ um den Streifen $XX'Y'Y$ zu. Da die Grösse δ noch beliebig ist, so können wir dieselbe immer so gross oder nöthigenfalls so klein nehmen, dass die Curve RYY' von Y bis Y' entweder blos steigt oder blos fällt. Wir haben nun $OX'Y'R = F(x+\delta)$, $XX'Y'Y = F(x+\delta) - F(x)$; ziehen wir $YT' \parallel Y'T \parallel XX'$, so ist, wenn ein beständiges Steigen der Curve Statt findet,

$$XX'Y'T > XX'Y'Y > XX'T'Y$$

oder

$$XX'.X'Y' > XX'Y'Y > XX'.XY$$

d. i. nach unserer Bezeichnungsweise

$$\delta f(x+\delta) > F(x+\delta) - F(x) > \delta f(x),$$

und wenn die Curve beständig fällt wie in fig. 6.

$$XX'T'Y > XX'Y'Y > XX'Y'T$$

oder

$$XX'.XX > XX'Y'X > XX'.XX'$$

d. i.

$$\delta f(x) > F(x+\delta) - F(x) > \delta f(x+\delta).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen ergeben sich durch Division mit δ die beiden folgenden:

$$f(x+\delta) > \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} > f(x),$$

$$f(x) > \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} > f(x+\delta);$$

welche man dadurch in eine einzige zusammenfassen kann, dass man sagt: der Quotient

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

liegt jedenfalls zwischen $f(x)$ und $f(x+\delta)$, gleichviel welcher von den beiden letzteren Ausdrücken der grössere ist. Aus dieser Eigenschaft von $f(x)$ und $f(x+\delta)$ ergiebt sich nun leicht ein Mittel, um $f(x)$ durch $F(x)$ auszudrücken. Lassen wir nämlich δ beständig abnehmen, so rücken die Werthe von $f(x)$ und $f(x+\delta)$ immer näher an einander und folglich auch immer näher an den zwischen ihnen liegenden Quotienten. Hat endlich δ die Gränze Null erreicht, so fallen die beiden

äussersten Werthe zusammen und da der fragliche Quotient immer zwischen ihnen bleibt, so muss er ihrem gemeinschaftlichen Werthe $f(x)$ gleich sein. Die bisherige Ungleichung verwandelt sich daher in die folgende Gleichung:

$$f(x) = \text{Lim} \frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta},$$

mit welcher unser Problem gelöst ist.

Vergleichen wir die Operationen, durch die $f(x)$ aus $F(x)$ abgeleitet wird, mit denen, welche zur Lösung der früheren direkten Aufgabe nöthig waren, so werden wir in Absicht auf die Einfachheit derselben einen wesentlichen Unterschied wahrnehmen. Während dort die Summirung einer Reihe verlangt wurde, haben wir es hier blos mit einer Differenz zu thun, im Uebrigen aber bleibt sich Alles gleich, da wir beiderseits die Operation des Gränzenüberganges ausführen müssen. Da gar kein Zweifel darüber sein kann, welche von beiden Operationen die einfachere und leichtere ist, so werden wir nun den bereits angedeuteten Gedankengang wirklich ausführen, indem wir zuerst die Aufgabe behandeln, aus einer gegebenen Funktion $F(x)$ die entsprechende $f(x)$ abzuleiten und dann die andere, $F(x)$ aus $f(x)$ zu bestimmen, nicht, wie früher, direkt lösen, sondern sie auf die vorhergegangene reduziren. Die beiden verschiedenen Arten von Calcül, welche hieraus entspringen, führen die Namen: Differenzialrechnung und Integralrechnung und verhalten sich ungefähr zu einander wie Subtraktion und Addition. Die Probleme der Integralrechnung sind die direkten, von der Natur der stetigen Grössen unmittelbar gebotenen, ihre Lösungen zeigen uns in der mathematischen Physik den Verlauf der Wirkungen gegebener Ursachen, die Probleme der Differenzialrechnung sind die indirekten aber dafür leichter zu lösenden.

Erste Abtheilung.

Theorie der Differenzialrechnung.

Cap. I. Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Differenzialrechnung.

§ 1.

Bezeichnungsweise in der Differenzialrechnung.

Wir können für die Lösung der bereits angedeuteten Hauptaufgabe der Differenzialrechnung: „aus einer gegebenen Funktion $F(x)$ eine andere $f(x)$ der Art abzuleiten, dass

$$f(x) = \text{Lim}\, \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

ist“, drei verschiedene Geschäfte des Calcüls unterscheiden; zuvörderst nämlich haben wir der unabhängigen Variablen x einen Zuwachs δ ertheilt, wodurch sich im Allgemeinen der abhängigen Variablen vergrössert oder verringert; hierauf dividiren wir die Aenderung der abhängigen Veränderlichen durch die der unabhängigen und gehen endlich zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ über. Hinsichtlich der letzten dieser Operationen sind nun hauptsächlich zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nämlich lässt sich das δ im Nenner gegen ein möglicherweise im Zähler vorkommendes δ heben und dann muss die Vollführung des Gränzenüberganges zu einer völlig bestimmten Funktion $f(x)$ führen, die selbst stetig und endlich ist, wenn es $F(x)$ war, wie unmittelbar aus der Einleitung hervorgeht, oder man kann oder will auch vielleicht δ nicht gegen ein δ im Zähler heben, in welchem Falle man aber auf eine unmittelbare Angabe der fragl. Lim. selbst verzichten muss, weil sich dieselbe, wenn man wirklich noch δ bis

zur Gränze Null abnehmen lassen wollte, unter der unbestimmten und vieldeutigen Form $\frac{0}{0}$ präsentiren würde. Diese zwei verschiedenen Fälle führen von selbst zu einer doppelten Bezeichnungsweise. Im ersten Falle nennt man die sich ergebende Funktion $f(x)$ die aus $F(x)$ derivirte Funktion und bezeichnet sie mit $F'(x)$. Man hat hiernach z. B. für $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$F'(x) = \text{Lim}\,\frac{\frac{1}{3}(x+\delta)^3 - \frac{1}{3}x^3}{\delta} = \text{Lim}\,\frac{x^2\delta + x\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3}{\delta}$$
$$= \text{Lim}(x^2 + x\delta + \tfrac{1}{3}\delta^2) = x^2,$$

und etwas verwickelter für $F(x) = \sqrt{a+x}$,

$$F'(x) = \text{Lim}\,\frac{\sqrt{a+x+\delta} - \sqrt{a+x}}{\delta}$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a+x+\delta} + \sqrt{a+x}$ multiplicirt und den Satz $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \alpha - \beta$ in Anwendung bringt

$$F'(x) = \text{Lim}\,\frac{(a+x+\delta) - (a+x)}{\delta(\sqrt{a+x+\delta} + \sqrt{a+x})}$$
$$= \text{Lim}\,\frac{1}{\sqrt{a+x+\delta} + \sqrt{a+x}} = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}.$$

Wird dagegen, wie der zweite der unterschiedenen Fälle angiebt, in der Formel

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

das δ des Nenners nicht gegen ein δ im Zähler gehoben, so muss man die Operation des Gränzenüberganges angedeutet lassen, wobei man aber die Bezeichnungsweise etwas einfacher und bequemer machen kann. Zuerst wird es hier darauf ankommen, den Zuwachs oder die Aenderung δ der unabhängigen Variablen so zu bezeichnen, dass man aus dem Symbole selbst erkennen kann, dass es lediglich zu x gehört und nicht etwa den Zuwachs einer anderen Veränderlichen bedeutet. Denn wenn z. B. in einer Funktion mehrere Variable x, y, z vorkämen, von denen x in $x+\delta$, y in $y+\varepsilon$, z in $z+\zeta$ überginge, so würde man das Gedächtniss immer mit der Bemerkung belästigen müssen, dass δ zu x, ε zu y und ζ zu z gehöre. Diesem Uebelstande weicht man dadurch sehr leicht aus, dass man nur einen Buchstaben δ braucht,

ihm aber die Veränderliche, deren Inkrement er bildet, als Marke anhängt. Man würde also statt δ, ε, ζ im vorigen Beispiele jetzt δ_x, δ_y, δ_z schreiben, wobei es übrigens gewöhnlich geworden ist, statt des kleinen δ ein grosses zu brauchen, so dass der Zusammenhang zwischen $f(x)$ und $F(x)$ sich nun in folgender Form darstellen würde:

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{F(x + \Delta_x) - F(x)}{\Delta_x}.$$

So wie aber Δ_x die Aenderung der Variablen x, oder was das Nämliche ist, die Differenz $(x + \Delta x) - x$ bezeichnet, so wird entsprechend $\Delta_{F(x)}$ die Aenderung der Funktion $F(x)$ d. h. die Differenz $F(x + \Delta_x) - F(x)$ bezeichnen müssen, und demnach nimmt die vorige Gleichung die folgende Gestalt an

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x},$$

worin man Δ_x und $\Delta_{F(x)}$ die Differenzen von x_x und $F(x)$ nennt. Wie nun schon bemerkt worden ist, würde man bei dem Versuche, die durch Lim angedeutete Operation des Gränzenüberganges wirklich auszuführen, auf das vage Resultat $\frac{0}{0}$ kommen, weil $\Delta_{F(x)}$ im Allgemeinen mit Δ_x gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Da hierdurch der Ueberblick über die Entstehungsweise der beiden Nullen gänzlich verloren gehen würde, so pflegt man die unbegränzte Abnahme von Δ_x und $\Delta_{F(x)}$ blos anzudeuten, wobei man sich dahin vereinigt hat, in diesem Falle d für Δ zu schreiben und gleichzeitig die Sylbe Lim, deren beständige Wiederholung sehr lästig werden müsste, wegzulassen. Demnach ist identisch

$$f(x) = \text{Lim}\,\frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x} = \frac{d_{F(x)}}{d_x}$$

und hierbei nennt man die Grössen d_x und $d_{F(x)}$ die Differenziale von x und $F(x)$. Differenziale sind also Differenzen, auf welchen die Bedingung haftet, sie successiv bis zur Gränze Null abnehmen zu lassen.

Vergleichen wir jetzt die beiden verschiedenen Formen, welche wir für $f(x)$ gefunden haben, so ist

$$\frac{d_{F(x)}}{d_x} = F'(x).$$

Differentialquotient und derivirte Funktion bilden demnach zwei verschiedene Ansichten für eine und die nämliche Sache; den Diffe-

renzialquotienten erhält man dadurch, dass man den Gränzwerth des Differenzenquotienten $\frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x}$ im Einzelnen andeutet, die derivirte Funktion dagegen, wenn man den fraglichen Gränzwerth im Ganzen wirklich bestimmt. Die obige Gleichung enthält also auf der linken Seite die Aufforderung zur Ausführung einer Operation (der unbegränzten Abnahme von $d_{F(x)}$ und d_x), zugleich aber auf der rechten Seite das Resultat, welches nach Vollendung jener Operation zum Vorschein kommt. Der einfache Sinn einer Gleichung wie

$$\frac{d_{\sqrt{a+x}}}{d_x} = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}$$

ist hiernach: das Verhältniss zwischen den Aenderungen des x und den durch sie hervorgerufenen Aenderungen von $\sqrt{a+x}$ nähert sich, wenn die Aenderungen selbst beständig vermindert werden, der Gränze $\frac{1}{2\sqrt{a+x}}$ und zwar bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit.

Statt einer solchen Werthangabe des Differenzialquotienten mit Hülfe der derivirten Funktion, schreibt man auch öfter eine sogenannte Differenzialgleichung. Denkt man sich nämlich in der identischen Gleichung

$$\Delta_{F(x)} = \frac{\Delta_{F(x)}}{\Delta_x}\,\Delta_x$$

das Δ_x im Nenner nicht gegen den Faktor Δ_x, sondern gegen ein in $\Delta_{F(x)}$ vorkommendes Δ_x gehoben und geht man jetzt zur Gränze für unbegränzt abnehmende Δ_x über, so ergiebt sich

$$\text{Lim}\ \Delta_{F(x)} = F'(x)\,\text{Lim}\ \Delta_x.$$

Hier würde man, weil $\text{Lim}\ \Delta_x = 0$ und ebenso $\text{Lim}\ \Delta_{F(x)} = 0$ ist, auf das Resultat $0 = F'(x).0$ kommen, womit weiter Nichts anzufangen wäre, weil man mit Nullen schlechthin nicht weiter rechnen kann. Um aber wieder die Entstehungsweise dieser Nullen im Auge behalten zu können, führt man die Operation des Gränzenüberganges gar nicht aus, sondern lässt es bei einer blosen Andeutung derselben bewenden, indem man $d_{F(x)}$ und d_x für $\text{Lim}\ \Delta_{F(x)}$ und $\text{Lim}\ \Delta_x$ schreibt. Demnach ist der Sinn der Gleichung

$$d_{F(x)} = F'(x)\,d_x,$$

je kleiner ein paar spezielle Werthe der im Zustande beständiger Ab-

nahme begriffenen Grössen $d_{F(x)}$ und d_x sind, desto genauer gilt die obige Relation. Zugleich spricht sich hierin eine der wichtigsten Eigenschaften der sich stetig ändernden Grössen aus, nämlich die, dass man für ein sehr kleines Intervall die Aenderung der abhängigen Veränderlichen der Aenderung der unabhängigen Variablen beinahe proportional setzen kann und zwar um so genauer, je kleiner das Intervall selbst ist, wie wir schon in der Einleitung für den Fall erkannt haben, dass $F(x)$ die Fläche einer Curve und $f(x) = F'(x)$ die begränzende Ordinate derselben bezeichnet.

Zu bemerken ist endlich noch, dass man die Bezeichnung zum praktischen Gebrauche bequemer macht, wenn man die Indices $x, (Fx)$ den Buchstaben Δ und d nicht anhängt, sondern sie ihnen in gleicher Linie nebenordnet, also Δx, dx, $\Delta F(x)$ und $dF(x)$ für Δ_x, d_x $\Delta_{F(x)}$ und $d_{F(x)}$ schreibt, wobei man sich nur hüten muss, Δ und d mit Faktoren zu verwechseln. Die Fundamentalformeln der Differenzialrechnung nehmen dann die folgende Gestalt an

$$\frac{dF(x)}{dx} = \operatorname{Lim} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \mathfrak{F}'(x)$$

$$dF(x) = F'(x)\,dx,$$

in welcher wir sie künftig immer brauchen werden.

§ 2.

Allgemeine Regeln zur Differenziation der Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten.

Das Nächste, was uns jetzt obliegt, ist die Aufsuchung allgemeiner Regeln, nach welchen man die Differenziation der aus einfachen Funktionen zusammengesetzten Funktionen auf die Differenziation ihrer Bestandtheile reduziren könnte. So entstehen die Aufgaben: den Differenzialquotienten einer Summe, Differenz, eines Produktes und eines Quotienten zweier oder mehrerer Funktionen durch die Differenzialquotienten der einzelnen Funktionen auszudrücken, deren Lösung durch die nachherigen Betrachtungen erlangt wird. — Zuvor indess noch eine Bemerkung. Differenziation ist nur möglich, wenn man eine veränderliche Grösse dazu voraussetzt; wäre dagegen $F(x)$ einer Constanten A gleich, so hätte man auch $F(x+\Delta x) = A$, mithin $F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F(x) = 0$ gleichviel, wie gross oder klein Δx sein möge.

Es findet daher auch keine Annäherung an eine Gränze Statt, wenn man in den Quotienten $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ das Inkrement Δx ins Unendliche abnehmen lässt und diess durch dx andeutet, sondern es ist schlechtweg

$$\frac{dA}{dx}=0, \quad dA=0dx=0,$$

wovon wir in dem Folgenden mehrmals Gebrauch machen werden.

I. **Differenziation der Summen und Differenzen zweier oder mehrerer Funktionen.**

Sei $F(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ beliebig gegeben sind, so ist:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{[\varphi(x+\Delta x)+\psi(x+\Delta x)]-[\varphi(x)+\psi(x)]}{\Delta x},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}+\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}.$$

Geht man zur Gränze für unendlich abnehmende Δx über, so entsteht folgende Gleichung zwischen den derivirten Funktionen

$$F'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)$$

oder auch, wenn man statt der derivirten Funktionen die gleichgeltenden Differenzialquotienten setzt,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\psi(x)}{dx}$$

d. i. vermöge des Werthes von $F(x)$,

$$\frac{d[\varphi(x)+\psi(x)]}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\psi(x)}{dx}, \tag{1}$$

wofür man auch die Differenzialgleichung

$$d[\varphi(x)+\psi(x)]=d\varphi(x)+d\psi(x) \tag{2}$$

aufstellen kann.

Durch einen völlig analogen Calcül wird man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Relationen überzeugen: für $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ ist

$$F'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x),$$

$$\frac{d[\varphi(x) - \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{d\psi(x)}{dx}$$

oder

$$d[\varphi(x) - \psi(x)] = d\varphi(x) - d\psi(x).$$

Aus diesen für die Addition und Subtraktion zweier Funktionen geltenden Regeln kann man sogleich die allgemeinere bilden: wenn $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $\omega(x)$ etc. verschiedene Funktionen von x sind und zugleich

$$F(x) = \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \chi(x) \pm \omega(x) \pm \cdots \tag{3}$$

ist, so hat man

$$F(x) = \varphi'(x) \pm \psi'(x) \pm \chi'(x) \pm \omega'(x) \pm \cdots \tag{4}$$

oder

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \frac{d\psi(x)}{dx} \pm \frac{d\chi(x)}{dx} \pm \frac{d\omega(x)}{dx} \pm \cdots \tag{5}$$

und auch

$$dF(x) = d\varphi(x) \pm d\psi(x) \pm d\chi(x) \pm d\omega(x) \pm \cdots \tag{6}$$

II. Differenziation von Produkten.

Für $F(x) = \varphi(x)\psi(x)$ hat man

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x)\Psi(x + \Delta x) - \varphi(x)\psi(x)}{\Delta x}.$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \varphi(x)\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \varphi(x + \Delta x)\frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}.$$

Lassen wir nun Δx ins Unbegränzte abnehmen, so nähern sich die Ausdrücke

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}, \quad \varphi(x + \Delta x), \quad \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}$$

den Gränzen

$$\varphi'(x), \quad \varphi(x), \quad \psi'(x)$$

und wir erhalten folglich

$$F'(x) = \psi(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,\psi'(x) \tag{7}$$

oder

$$\frac{d[\varphi(x)\,\psi(x)]}{dx} = \psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}, \tag{8}$$

woraus die Differenzialgleichung entspringt

$$d[\varphi(x)\,\psi(x)] = \psi(x)\,d\varphi(x) + \varphi(x)\,d\psi(x). \tag{9}$$

Als spezieller Fall ist hier die Annahme, einer der Faktoren, etwa $\psi(x)$ sei constant $= a$ bemerkenswerth. Man hat dann wegen $\frac{da}{dx} = 0$,

$$\frac{d[a\varphi(x)]}{dx} = a\,\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

und

$$d,[a, \varphi(x)] = ad\varphi(x).$$

Die Gleichung (7) lässt sich noch in eine sehr elegante Form bringen, wenn man beiderseits mit $F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$ dividirt. Man findet dann

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

Hieraus erhält man leicht, indem man $\psi(x)\;\chi(x)$ für $\psi(x)$, also

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} \text{ für } \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \text{ setzt,}$$

$$F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}$$

und ebenso leicht allgemeiner:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\,\omega(x)\ldots.\\ \frac{F'(x)}{F(x)} &= \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} + \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\,\omega(x)\ldots}\;\frac{d[\varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\,\omega(x)\ldots}{dx}\\ &= \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{1}{\psi(x)}\frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{1}{\chi(x)}\frac{d\chi(x)}{dx} + \frac{1}{\omega(x)}\frac{d\omega(x)}{dx} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

III. Differenziation der Quotienten.

Für $F(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ wird

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)}-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{\varphi(x+\Delta x)\psi(x)-\psi(x+\Delta x)\varphi(x)}{\psi(x+\Delta x)\psi(x)}}{\Delta x},$$

woraus man leicht findet

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\psi(x)\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-\varphi(x)\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}}{\psi(x+\Delta x)\psi(x)}.$$

Durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx ergiebt sich hieraus

$$F'(x)=\frac{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}, \tag{11}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{d\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}{dx}=\frac{\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}-\varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}}{[\psi(x)]^2} \tag{12}$$

und die Differenzialgleichung

$$d\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\psi(x)\,d\varphi(x)-\varphi(x)\,d\psi(x)}{[\psi(x)]^2}. \tag{13}$$

Man wird hier eine gewisse Analogie der Formeln (11), (12) und (13) mit denen unter (7), (8) und (9) bemerken und in der That kann man auch die einen aus den anderen ableiten. Um z. B. die Formel (11) mit Hülfe der in (7) gefundenen zu entwickeln, beachte man, dass aus der Gleichung $F(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ folgt $\varphi(x)=F(x)\,\psi(x)$. Nach der Regel für die Differenziation der Produkte ist dann

$$\varphi'(x)=\psi(x)\,F'(x)+F(x)\,\psi'(x),$$

woraus folgt

$$F'(x)=\frac{\varphi'(x)-F(x)\,\psi'(x)}{\psi(x)}$$

und vermöge des Werthes von $F(x)$

$$F(x) = \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

übereinstimmend mit dem Vorigen.

Als specieller Fall ist die Annahme $\varphi(x) = a$ von Interesse. Man hat dann

$$F'(x) = \frac{-a\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

und

$$d\frac{a}{\psi(x)} = -a\frac{d\psi(x)}{[\psi(x)]^2}.$$

Cap. II. Differenzialformeln für die einfachen Funktionen.

§ 3.

Vorbemerkungen.

Die einfachen Funktionen, mit deren Differenzialen wir uns jetzt beschäftigen wollen, sind dieselben, welche in der algebraischen Analysis unter anderen Gesichtspunkten betrachtet werden. Die Resultate, welche man dort erhalten hat, werden uns hier die wichtigsten Dienste leisten und namentlich sind es die verschiedenen Sätze über die Gränzwerthe mancher Funktionen, welche wir für unsere weitere Betrachtungen ganz besonders in Anspruch nehmen müssen, weil jeder Uebergang von einer Funktion zu ihrer Derivirten eine Gränzenbetrachtung erfordert. So werden die aus der Einleitung bekannten Gleichungen

$$\text{Lim}\frac{a^\delta - 1}{\delta} = la, \qquad (1)$$

$$\text{Lim}\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e \qquad (2)$$

$$\text{Lim}\frac{\sin\delta}{\delta} = 1 \qquad (3)$$

$$\text{Lim}\frac{\text{Arcsin}\,\delta}{\delta} = 1 \qquad (4)$$

$$\text{Lim}\frac{\text{Arctan}\,\delta}{\delta} = 1 \qquad (5)$$

für uns die Fundamentalformeln des ganzen Capitels. Zu bemerken ist noch, dass sich aus ihnen einige anderweite Theoreme ähnlicher Art ableiten lassen, von denen wir ebenfalls Gebrauch machen werden.

Setzt man nämlich in no. (1) $a = e^\mu$, so wird

$$\text{Lim}\ \frac{e^{\mu\delta}-1}{\delta} = \mu.$$

Dabei steht es noch frei, nach welchem Verhältnisse man δ will abnehmen lassen, vorausgesetzt, dass man es jedenfalls der Null so nahe bringen kann, als es nur verlangt wird. Ist nun δ' eine ebenfalls bis zur Gränze Null abnehmende Grösse, so hindert nichts, $\delta = l(1+\delta')$ zu nehmen, wodurch die einzige dem δ auferlegte Bedingung erfüllt ist. Es wird dann

$$e^{\mu\delta} = (e^\delta)^\mu = [e^{l(1+\delta')}]^\mu = (1+\delta')^\mu,$$

folglich

$$\text{Lim}\ \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{l(1+\delta')} = \mu. \tag{6}$$

Hieraus folgt z. B., wenn man das ganz beliebige $\mu = 1$ nimmt,

$$\text{Lim}\ \frac{\delta'}{l(1+\delta')} = 1 \tag{7}$$

und auch

$$\text{Lim}\ \frac{l(1+\delta')}{\delta'} = 1. \tag{8}$$

Mit Hülfe der Formel (7) kann man aus no. (6) wieder ein neues Theorem ableiten, indem man die Grösse $l(1+\delta')$ aus beiden Gleichungen eliminirt.

Da nämlich

$$\frac{(1+\delta')^\mu-1}{l(1+\delta')} = \frac{(1+\delta')^\mu-1}{\delta'} \cdot \frac{\delta'}{l(1+\delta')}$$

ist, so hat man nach (6)

$$\text{Lim}\ \frac{(1+\delta')^\mu-1}{l(1+\delta')}$$

$$= \text{Lim}\ \frac{(1+\delta')^\mu-1}{\delta'} . \text{Lim}\ \frac{\delta'}{l(1+\delta')} = \text{Lim}\ \frac{(1+\delta')^\mu-1}{\delta'}$$

und da man nach (6) den Werth der linken Seite schon weiss

$$\text{Lim}\ \frac{(1+\delta')^\mu-1}{\delta'} = \mu \tag{9}$$

gültig für jedes beliebige μ.

§ 4.

Differenzialformeln für die Potenz, die Exponenzialgrösse und den Logarithmus.

1. Sei zuvörderst $F(x) = x^\mu$, wobei μ eine beliebige reelle Grösse bedeutet; man hat dann

$$\frac{Fx(+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x}$$

$$= [(1+\frac{\Delta x}{\Delta})^\mu - 1]\frac{x^\mu}{\Delta x}$$

oder wenn zur Abkürzung $\frac{\Delta x}{x} = \delta'$ gesetzt wird, woraus $\Delta x = x\delta'$ folgt

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{(1+\delta')^\mu - 1}{\delta'} x^{\mu-1}.$$

Lassen wir nun Δx der Gränze Null zueilen, so nimmt auch $\frac{\Delta x}{x} = \delta'$ ins Unendliche ab und es ergiebt sich unter Anwendung des Satzes (9) im vorigen Paragraphen,

$$F'(x) = \mu x^{\mu-1}$$

oder

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1},\ d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}\, dx. \qquad (1)\ *)$$

*) Man könnte auch auf ganz anderem Wege ohne Kenntniss des Theoremes (9) zu dem nämlichen Resultate gelangen.

Es sei nämlich in dem allgemeinen Satze (10) in § 2,

$$\varphi(x) = x^\alpha,\ \psi(x) = x^\beta,\ \chi(x) = x^\gamma, \text{ etc.},$$

so ist

$$\frac{1}{x^\alpha . x^\beta . x^\gamma \ldots} \cdot \frac{d[x^\alpha . x^\beta . x^\gamma \ldots]}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^\alpha} \cdot \frac{d(x^\alpha)}{dx} + \frac{1}{x^\beta} \cdot \frac{d(x^\beta)}{dx} + \frac{1}{x^\gamma} \cdot \frac{d(x^\gamma)}{dx} + \ldots$$

Wird nun überhaupt die Funktion

II. Für die Differenziation der Exponenzialgrösse sei $F(x) = a^x$. Es folgt daraus

$$\frac{F(x+\varDelta x)-F(x)}{\varDelta x} = \frac{a^{x+\varDelta x}-a^x}{\varDelta x} = a^x \frac{a^{\varDelta x}-1}{\varDelta x}.$$

Lassen wir $\varDelta x$ ins Unendliche abnehmen und wenden das Theorem (1) in § 3 für $\delta = \varDelta x$ an, so erhalten wir

$$F'(x) = a^x\, la$$

oder

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x\, la, \quad d(a^x) = a^x\, la\, dx. \tag{2}$$

III. Sei $F(x) = \log x$, wobei die Basis des logarithmischen Systems eine beliebige ist. Man hat dann:

$$\frac{F(x+\varDelta x)-F(x)}{\varDelta x} = \frac{\log(x+\varDelta x)-\log x}{\varDelta x}$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{\varDelta x}{x}\right)}{\varDelta x}.$$

$$\frac{1}{x^\mu} \cdot \frac{d(x^\mu)}{dx}$$

mit $f(\mu)$ bezeichnet, so geht die rechte Seite der vorigen Gleichung in $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \ldots$ über. Aber auch die linke Seite derselben ist durch die Funktion f ausdrückbar; sie ist nämlich

$$\frac{1}{x^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}} \frac{d[x^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}]}{dx} = f(\alpha+\beta+\ldots)$$

und durch Vergleichung mit dem Vorigen ergiebt sich nun folgende Eigenschaft der Funktion f,

$$f(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \ldots$$

Hieraus lässt sich die Natur derselben bestimmen; es ist nämlich nach einem bekannten Theoreme:

$$f(\mu) = \mu f(1)$$

folglich hier vermöge der Bedeutung von $f(\mu)$

$$\frac{1}{x^\mu}\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu \frac{1}{x}\frac{d(x')}{dx} = \mu\frac{1}{x}$$

oder

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1}$$

wie vorher.

Für $\frac{\Delta x}{x} = \delta$, also $\Delta x = x\delta$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\log(1+\delta)}{x\delta} = \frac{1}{x} \log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right].$$

Lassen wir nun Δx unbegränzt abnehmen, so vermindert sich auch $\frac{\Delta x}{x} = \delta$ ebenso unbegränzt und wir erhalten demnach unter Anwendung des Theoremes (2) in § 3

$$F'(x) = \frac{1}{x} \log e$$

oder

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{\log e}{x}, \; d\log x = \frac{\log e}{x} dx. \qquad (3)$$

Statt des künstlichen Logarithmus der Basis des natürlichen Systemes kann man auch leicht den natürlichen Logarithmus der Basis des hier vorkommenden künstlichen Systemes einführen, wenn man bemerkt, dass für b als Basis der mit log bezeichneten künstlichen Logarithmen

$$b^{\log e} = e$$

ist, woraus dadurch, dass man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt, folgt

$$\log e \, lb = le = 1,$$

mithin

$$\log e = \frac{1}{lb},$$

wobei man $\frac{1}{lb}$ bekanntlich den Modulus des künstlichen Systemes genannt hat. Für

$$\frac{1}{lb} = M \qquad (4)$$

ist dann nach (3)

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{M}{x} \, d\log x = \frac{M}{x} dx \quad (\text{bas}\, b), \qquad (5).$$

Sind die Logarithmen natürliche, so hat man $b = e$, $M = \frac{1}{le} = 1$ und folglich die Gleichungen

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}, \; dlx = \frac{1}{x} ax,$$

welche vielfach gebraucht werden.

§ 5.

Differenzialformeln für die goniometrischen Funktionen.

I. Setzen wir $F(x) = \sin x$, so wird

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

und durch Anwendung der bekannten goniometrischen Relation

$$\sin a - \sin b = 2\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}(a+b)$$

für $a = x + \Delta x$, $b = x$,

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$$

und wenn wir $\frac{1}{2}\Delta x = \delta$ setzen

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\sin\delta}{\delta}\cos(x+\delta).$$

Gehen wir zur Gränze für unendlich abnehmende Δx über und bemerken, dass δ mit Δx gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt, so bekommen wir unter Anwendung des Theoremes (3) in § 3,

$$F'(x) = \cos x,$$

mithin

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\quad d\sin x = \cos x\,dx \qquad (1)$$

II. Ist ferner $F(x) = \cos x$, so wird

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

und unter Anwendung der Formel

$$\cos a - \cos b = -2\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b)$$

für $a = x + \Delta x$, $b = x$,

$$\frac{F(x+\Delta x)F-(x)}{\Delta x}=-\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=-\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$$

$$=-\frac{\sin\delta}{\delta}\sin(x+\delta)$$

wenn wir wieder $\frac{1}{2}\Delta x = \delta$ setzen. Hieraus folgt durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx und δ,

$$F'(x) = -\sin x$$

oder

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad d\cos x = -\sin x\, dx. \qquad (2)$$

III. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Differenzialformeln für die Tangente und Cotangente zu entwickeln. Denn für $F(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ lässt sich die allgemeine Regel

$$\text{wenn } F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ist

$$F'(x) = \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

in Anwendung bringen, sobald man $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$ setzt, woraus nach I und II $\varphi'(x) = \cos x$, $\psi'(x) = -\sin x$ folgt. Man hat also

$$F'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad d\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx. \qquad (3)$$

Ebenso leicht erhält man für $F(x) = \cot x$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \sin x$, also $\varphi'(x) = -\cos x$, $\psi'(x) = \sin x$,

$$F(x) = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

oder

$$\frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad d\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx \qquad (4)$$

IV. Auch die Differenzialquotienten von $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ lassen sich auf ähnliche Weise entwickeln, wenn man die allgemeine Regel

$$\text{für } F(x) = \frac{1}{\psi(x)}$$

$$\text{ist } F(x) = -\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

in Anwendung bringt.

Für $\psi(x) = \cos x$, also $\psi'(x) = -\sin x$ und $F(x) = \sec x$ ergiebt sich aus derselben

$$F'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

oder

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ d \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx. \qquad (5)$$

Ebenso erhält man für $\psi(x) = \sin x$ also $\psi'(x) = \cos x$ und $F(x) = \operatorname{cosec} x$,

$$F'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

oder

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x},\ d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx. \qquad (6)$$

§ 6.

Differenzialformeln für die cyklometrischen Funktionen.

1. Soll die Funktion $F(x) = \operatorname{Arcsin} x$ differenzirt werden, so hat man

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arcsin}(x+\Delta x) - \operatorname{Arcsin} x}{\Delta x}$$

und mit Hülfe der Formel *)

$$\operatorname{Arcsin} a - \operatorname{Arcsin} b = \operatorname{Arcsin}\,(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2})$$

für $a = x + \Delta x,\ b = x$,

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arcsin}[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{\Delta x}.$$

---

*) Ihre Ableitung ist kurz folgende. Sind u und v zwei spitze Bögen und $\sin u = a$, $\sin v = b$, so folgt $\cos u = \sqrt{1-a^2}$, $\cos v = \sqrt{1-b^2}$ und hierdurch geht die bekannte goniometrische Formel

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$$

über in

$$\sin(u-v) = a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$$

oder weil $u - v$ ein spitzer Bogen ist,

$$u - v = \operatorname{Arcsin}(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}).$$

Aus $\sin u = a$, $\sin v = b$ folgt aber, da u und v als Bögen des ersten Quadranten vorausgesetzt wurden, $u = \operatorname{Arcsin} a$, $v = \operatorname{Arcsin} b$ und durch Substitution dieser Werthe erhält man jetzt unmittelbar die citirte Formel.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2} = \delta,$$

so haben wir auch

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arcsin} \delta}{\delta} \cdot \frac{(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}}{\Delta x},$$

was sich durch Multiplikation des Zählers und Nenners rechts mit

$$(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}$$

folgendermassen gestaltet:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arcsin} \delta}{\delta} \cdot \frac{(x + \Delta x)^2(1 - x^2) - x^2[1-(x + \Delta x)^2]}{\Delta x[(x+\Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}]}$$

oder endlich, weil der Zähler gleich

$$(x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

ist, auch

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arcsin} \delta}{\delta} \cdot \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}}.$$

Lassen wir jetzt Δx unbegränzt abnehmen, so vermindert sich auch δ ins Unendliche hinab, wie man aus der Bedeutung von δ augenblicklich erkennen wird. Unter Anwendung des Theoremes (4) in § 3 und unter der Bemerkung, dass

$$\operatorname{Lim}(2x + \Delta x) = 2x$$

$$\operatorname{Lim}[(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}] = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

ist, folgt jetzt

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

mithin

$$\frac{d \operatorname{Arcsin} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d \operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx. \qquad (1)$$

Man könnte ein ähnliches Verfahren für die Differenziation von Arccos anwenden, gelangt aber kürzer zum Ziele, wenn man die aus der geometrischen Bedeutung von Arcsin x und Arccos x sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$$

differenziirt. Man erhält nämlich

$$\frac{d \operatorname{Arccos} x}{dx} = -\frac{d \operatorname{Arcsin} x}{dx}, \; d \operatorname{Arccos} x = -d \operatorname{Arcsin} x$$

oder

$$\frac{d \operatorname{Arccos} x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; d \operatorname{Arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx. \quad (2)$$

II. Sei ferner $F(x) = \operatorname{Arctan} x$; man hat dann mit Benutzung der Relation*)

$$\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a-b}{1+ab}$$

die folgenden Gleichungen

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arctan}(x+\Delta x) - \operatorname{Arctan} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{Arctan} \dfrac{\Delta x}{1 + x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\Delta x}{1 + x(x+\Delta x)} = \delta$$

setzt, auch

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Arctan} \delta}{\delta} \cdot \frac{\dfrac{\Delta x}{1 + x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{Arctan} \delta}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + x(x+\Delta x)}.$$

Nimmt nun Δx ins Unendliche ab, so vermindert sich auch δ ins Unendliche und es ergiebt sich unter Anwendung des Theorems (5) in § 3,

---

*) Wenn nämlich u und v ein paar Bögen des ersten Quadranten bedeuten und $\tan u = a$, $\tan v = b$ gesetzt wird, so verwandelt sich die goniometrische Formel

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

in

$$\tan(u - v) = \frac{a-b}{1+ab}$$

oder weil $u - v$ ebenfalls im ersten Quadranten liegt,

$$u - v = \operatorname{Arctan} \frac{a-b}{1+ab}.$$

Aus $\tan u = a$, $\tan v = b$ folgt aber nach den gemachten Voraussetzungen $u = \operatorname{Arctan} a$, $v = \operatorname{Arctan} b$ und hierdurch geht die vorige Formel in die oben angegebene über.

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

oder

$$\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2},\quad \mathrm{Arctan}\,x = \frac{1}{1+x^2}\,dx. \qquad (3)$$

Die Differenzialformeln für $\mathrm{Arccot}\,x$ erhält man hieraus durch Differenziation der leicht zu entwickelnden Gleichung

$$\mathrm{Arccot}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x.$$

Man findet nämlich

$$\frac{d\,\mathrm{Arcot}\,x}{dx} = -\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,x}{dx},\quad d\,\mathrm{Arccot}\,x = -\,d\,\mathrm{Arctan}\,x$$

oder

$$\frac{d\,\mathrm{Arccot}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},\quad d\,\mathrm{Arccot}\,x = -\frac{1}{1+x^2}\,dx. \qquad (4)$$

Durch die in den Paragraphen (4), (5) und (6) entwickelten Formeln ist jetzt die Aufgabe, alle aus der algebraischen Analysis bekannten einfachen Funktionen der Operation des Differenzirens zu unterwerfen, vollständig gelöst.

Cap. III. Differenziation zusammengesetzter Ausdrücke und der Funktionen mehrerer Variabelen.

§ 7.

Differenziation zusammengesetzter Funktionen.

Nimmt man mit einer unabhängigen veränderlichen Grösse irgend eine Rechnungsoperation vor und dann mit dem, was auf diese Weise herauskommt (der abhängigen Variabelen) wieder eine neue Rechnungsoperation, so erhält man die Funktion einer Funktion und man kann diess auf folgende Weise bezeichnen:

$$F(x) = f[\varphi(x)], \qquad (1)$$

wobei φ und f die nach einander vorzunehmenden Operationen, $F(x)$ das Gesammtresultat andeutet. Auf diese Weise zusammengesetzte Funktionen sind z. B.

$$e^{\sin x}\ ,\ \log\sin x\ ,\ \operatorname{Arctan}(x^{\mu})\ \text{etc.}$$

und mit ihrer Differenziation hätten wir uns jetzt zu beschäftigen.

Setzen wir in (1) zur Abkürzung

$$y = \varphi(x), \tag{2}$$

so wird

$$F(x) = f(y). \tag{3}$$

Wenn nun x den Zuwachs Δx erhält, so nimmt $\varphi(x)$ um $\Delta\varphi(x)$ d. h. y um Δy zu und wir haben aus (3)

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta x}.$$

Erinnern wir uns aber, dass $\Delta y = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$ ist, so können wir die vorstehende Gleichung durch Zusetzung des Faktors

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta y}=1$$

auch in folgender Form darstellen:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Lassen wir nun Δx bis zur Gränze Null abnehmen, so vermindert sich auch Δy ins Unendliche hinab; dabei nähert sich offenbar der Quotient

$$\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}$$

der Gränze $f'(y)$ gerade so, als wäre Δy eine von x unabhängige abnehmende Grösse. Denn um von einer Funktion auf ihre Derivirte zu kommen, ist es nach der Definition der letzteren blos nöthig, dass man in dem Aenderungenquotienten die Aenderung der Veränderlichen der Funktion bis zur Gränze Null abnehmen lässt, gleichviel w i e d. h. nach welchem Gesetze diese Abnahme geschieht; es kommt daher auch nichts darauf an, ob dieses Gesetz selbst durch andere Umstände (oben durch x) bestimmt ist, oder nicht. Nach dieser Bemerkung folgt jetzt aus no. (4) durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx (und Δy)

$$F'(x) = f'(y)\,\varphi'(x) \tag{5}$$

oder was das Nämliche ist,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \tag{6}$$

und ebenso die Differenzialgleichung

$$dF(x) = f'(y)\,\varphi'(x)\,dx \tag{7}$$

oder

$$dF(x) = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\,dx, \tag{8}$$

wobei man noch für y seinen Werth zu setzen hat. Man kann hieraus die folgende praktische Regel bilden. „Um einen Ausdruck wie

$$F(x) = f[\varphi(x)]$$

zu differenziren, setze man erst $\varphi(x) = y$ und differenzire jetzt nach y, als wäre diese Grösse die unabhängige Veränderliche. Nach geschehener Differenziation substituire man für y seinen ursprünglichen Werth und für $\frac{dy}{dx}$ oder dy das, was man durch Differenziation der Gleichung $y = \varphi(x)$ nach x bekommt."

Wie leicht die Anwendung dieser Regel ist, werden die folgenden Beispiele zeigen.

I. Wenn $F(x) = \log \sin x$ ist, setze man $y = \varphi(x) = \sin x$, $f(y) = \log y$, man hat dann nach (5)

$$f'(y) = \frac{M}{y},\ \varphi'(x) = \cos x$$

folglich

$$F'(x) = \frac{M}{y}\cos x = \frac{M}{\sin x}\cos x = M \cot x$$

oder

$$\frac{d \log \sin x}{dx} = M \cot x$$

und folglich

$$d \log \sin x = M \cot x\ dx.$$

Praktisch kürzer, ohne Benutzung der Zeichen F, f, φ kann man so verfahren. Es sei $\sin x = y$; man hat dann

$$d \log \sin x = d \log y = \frac{M dy}{y}$$

und weil aus $y = \sin x$ folgt, $dy = \cos x\ dx$

$$d \log \sin x = M\,\frac{\cos x}{y}\,dx = M \cot x\,dx. \tag{9}$$

II. Um $\log \cos x$ zu differenziren, sei $\cos x = y$; man findet dann

$$d \log \cos x = d \log y = \frac{M\,dy}{y}$$

und weil aus $y = \cos x$ folgt, $dy = -\sin x\, dx$,

$$d \log \cos x = -\frac{M \sin x}{y}\, dx = -M \tan x\, dx. \qquad (10)$$

Man hat auch oft Gelegenheit, diese Regel mit den in § 2 entwickelten Gesetzen zugleich anzuwenden. Z. B.

III. Soll man $(a + bx^n)^\mu$ differenziren, so setze man

$$y = a + bx^n$$

so ist

$$d[(a + bx^n)^\mu] = d[y^\mu] = \mu y^{\mu-1} dy$$

Aus der vorhergehenden Gleichung folgt aber

$$\begin{aligned} dy &= da + d(bx^n) \\ &= 0 + bd(x^n) \\ &= bnx^{n-1} dx \end{aligned}$$

folglich ist jetzt

$$d[(a + bx^n)^\mu] = \mu nb\, y^{\mu-1} x^{n-1}\, dx,$$

oder vermöge des Werthes von y,

$$d[(a + bx^n)^\mu] = \mu nb\, (a + bx^n)^{\mu-1} . x^{n-1}\, dx. \qquad (11)$$

Als specieller Fall ist von Interesse $n = 2$, $\mu = \frac{1}{2}$, mithin

$$d\sqrt{a + bx^2} = \frac{bx}{\sqrt{a + bx^2}}\, dx. \qquad (12)$$

IV. Um den Ausdruck $l(\sqrt{b}x + \sqrt{a + bx^2})$, in welchem a und b als positiv vorausgesetzt werden, zu differenziren sei

$$y = \sqrt{b}\, x + \sqrt{a + bx^2}. \qquad (13)$$

Man hat dann

$$dl(\sqrt{b}x + \sqrt{a + bx^2}) = dly = \frac{dy}{y}. \qquad (14)$$

Andererseits ist

$$dy = d\sqrt{b}\, x + d\sqrt{a + bx^2}$$

oder nach (12)

$$dy = \sqrt{b}\, dx + \frac{bx}{\sqrt{a + bx^2}}\, dx$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{b}\, x}{\sqrt{a + bx^2}}\right) \sqrt{b}\, dx$$

und durch Reduktion auf gleichen Nenner

$$dy = \frac{\sqrt{a+bx^2} + \sqrt{b}\,x}{\sqrt{a+bx^2}}\sqrt{b}\,dx.$$

Substituiren wir nun die vorstehende Gleichung und die unter no. (13) in no. (14), so ergiebt sich

$$dl(\sqrt{b}\,x + \sqrt{a+bx^2}) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx \qquad (15)$$

ein durch die Einfachheit der derivirten Funktion ausgezeichnetes Resultat.

V. Für die Differenziation des Ausdrucks $l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$ sei wieder

$$y = \frac{a+bx}{a-bx}. \qquad (16)$$

Es ist dann

$$dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = dly = \frac{dy}{y}. \qquad (17)$$

Aus no. (16) findet sich nun unter Anwendung des Theorems (13) in § 2

$$dy = \frac{(a-bx)\,d(a+bx) - (a+bx)\,d(a-bx)}{(a-bx)^2}$$

$$= \frac{(a-bx)\,b\,dx + (n+bx)\,b\,dx}{(a-bx)^2}$$

$$= \frac{2ab\,dx}{(a-bx)^2}.$$

Hiernach und vermöge der Bedeutung von y erhält man aus (17)

$$dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \frac{2ab\,dx}{(a-bx)^2} : \frac{a+bx}{a-bx}$$

$$= \frac{2ab\,dx}{a-bx} : (a+bx)$$

oder

$$dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \frac{2ab}{a^2-b^2x^2}\,dx. \qquad (18)$$

Schreibt man $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ für a und b, so ist auch

$$dl\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x}\right) = \frac{2\sqrt{ab}}{a-bx^2}\,dx, \qquad (19)$$

VI. Bemerkenswerth sind noch die Formeln, welche man durch

Differenziation von Arcsin $\frac{b}{a}x$ und Arctan $\frac{b}{a}$ erhält. Nimmt man in jedem Falle $\frac{b}{a}x = y$, so wird

$$d\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{b}{a}x = d\,\mathrm{Arcsin}\,y = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$d\,\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}x = d\,\mathrm{Arctan}\,y = \frac{dy}{1+y^2}.$$

Substituirt man für y seinen Werth und bemerkt, dass $dy = \frac{b}{a}dx$ ist, so ergiebt sich

$$d\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{b}{a}x = \frac{b}{a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2}}\,dx$$

$$d\,\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}x = \frac{b}{a\,1+\frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx$$

oder

$$d\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{b}{a}x = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx \qquad (20)$$

$$d\,\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}x = \frac{ab}{a^2+b^2x^2}\,dx. \qquad (21)$$

Setzt man noch $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ für a und b, so ist auch

$$d\,\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx \qquad (22)$$

$$d\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x = \frac{\sqrt{ab}}{a+bx^2}\,dx, \qquad (23)$$

wo nun a und b nothwendig positiv sein müssen, weil sie die Stellvertreter der früheren a^2 und b^2 sind, welche niemals negativ sein können.

Die Gleichungen (15) und (22), (19) und (23) stehen in einer besonderen Beziehung zu einander, welche wir bald näher kennen lernen werden.

§ 8.

Differenziation der Funktionen mehrerer abhängigen Variabelen.

In ähnlicher Weise, wie wir vorhin die Frage nach der Differenzialformel für $f(y)$, wo y wieder eine Funktion von x ist, beant-

wortet haben, können wir auch die Frage erledigen, nach welchem Gesetze sich die Differenzialformeln für eine Funktion zweier Veränderlichen $f(y, z)$ bilden, vorausgesetzt, dass diese beiden Veränderlichen von einer dritten unabhängigen Variabelen x abhängen, dass also etwa $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ ist. Sei nun

$$f(y, z) = f[\varphi(x), \psi(x)] = F(x). \tag{1}$$

Aendert sich nun x um das Increment Δx, so ändern sich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ um $\Delta\varphi(x)$ und $\Delta\psi(x)$ d. h. y und z und Δy und Δz; man findet hiernach leicht

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y, z)}{\Delta x},$$

wofür man durch Zusatz des Ausdrucks

$$f(y+\Delta y, z) - f(y+\Delta y, z)$$

im Zähler auch schreiben kann

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(y+\Delta y, z)-f(y, z)}{\Delta x} + \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y+\Delta y, z)}{\Delta x}.$$

Setzt man noch in den einzelnen Gliedern die Faktoren

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta y} = 1, \quad \frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta z} = 1$$

zu, so nimmt die vorige Gleichung folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(y+\Delta y, z)-f(y, z)}{\Delta y}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \\ &+ \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y+\Delta y, z)}{\Delta z}\cdot\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Lassen wir nun Δx unbegränzt abnehmen, vermindern also auch Δy und Δz ins Unendliche hinab, so nähert sich der Quotient

$$\frac{f(y+\Delta y, z)-f(y, z)}{\Delta y}$$

derjenigen derivirten Funktion, welche man erhält, wenn man y als einzige unabhängige Variabele, z aber in Bezug auf die Aenderungen des y als constant ansieht. Wir wollen diese derivirte Funktion mit

$f'(y)$ bezeichnen und dabei durch die Weglassung des z andeuten, dass man bei dem Uebergange von $f(y, z)$ zu $f'(y)$ keine Rücksicht auf die Anwesenheit des z nimmt.

Was ferner den Quotienten

$$\frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y+\Delta y, z)}{\Delta z}$$

anbelangt, so kann man, weil Δy und Δz sich der gemeinschaftlichen Gränze Null nähern, von ihm behaupten, dass er sich der nämlichen Gränze nähere, wie der folgende

$$\frac{f(y, z+\Delta z)-f(y, z)}{\Delta z},$$

indem der Zuwachs des y am Ende wieder verschwindet. Der vorliegende Quotient nähert sich aber der Gränze $f'(z)$, wenn man analog dem Vorigen unter $f'(z)$ diejenige derivirte Funktion von $f(y, z)$ versteht, bei deren Ableitung y als constant und z als einzige unabhängige Variabele angesehen wird. Nach diesen beiden Bemerkungen ergiebt sich jetzt aus no. (2) der Uebergang zur Gränze für gleichzeitig abnehmende Δx, Δy und Δz,

$$F'(x) = f'(y)\,\varphi'(x) + f'(z)\,\psi'(x)$$

oder auch wenn man statt der derivirten Funktionen die Differenzialquotienten setzt und zur Abkürzung wieder y und z für $\varphi(x)$, $\psi(x)$ braucht,

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{df(y,z)}{dx} = \dfrac{df(y,z)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{df(y,z)}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}\\ y = \varphi(x), \quad z = \psi(x).\end{array}\right\} \quad (3)$$

Die Differenzialquotienten

$$\frac{df(y,z)}{dy} \text{ und } \frac{df(y,z)}{dz},$$

in denen man successive die erste und zweite abhängige Variabele als unabhängige Variabele, die jedesmalige andere aber als Constante betrachtet, nennt man dabei die partiellen Differenzialquotienten der gegebenen Funktion.

Aus der Gleichung (3) folgt noch

$$\frac{df(y,z)}{dx}\,dx = \frac{df(y,z)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx + \frac{df(y,z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\,dx$$

oder einfacher

$$\left.\begin{array}{c}\frac{df(y,z)}{dx}dx = \frac{df(y,z)}{dy}dy + \frac{df(y,z)}{dz}dz \\ y = \varphi(x), \quad z = \psi(x)\end{array}\right\} \qquad (4)$$

und dabei sind $\frac{df(y,z)}{dy}dy$ und $\frac{df(y,z)}{dz}dz$ die partiellen Differenziale der Funktion $f(y,z)$ nach y und z genommen *).

Man übersieht leicht, wie sich dieses Theorem noch erweitern lässt; wäre z. B. $f(y, z, t)$ eine Funktion dreier Veränderlichen, die sämmtlich von einer einzigen x abhängen, etwa vermöge der Gleichungen

$$y = \varphi(x), \; z = \psi(x), \; t = \chi(x)$$

so wäre

$$\frac{df(y,z,t)}{dx}$$
$$= \frac{df(y,z,t)}{dy}dy + \frac{df(y,z,t)}{dz}dz + \frac{df(y,z,t)}{dt}dt$$

und ähnlich für mehrere Veränderliche.

Man kann hieraus folgende praktische Regel machen: „Hat man eine Funktion mehrerer Veränderlichen, welche alle von einer einzigen unabhängigen Veränderlichen abhängen, nach dieser unabhängigen zu differenziren, so sehe man jene abhängige Variabelen als ebenso viele unabhängige an und suche in Bezug auf sie die partiellen Differenziale der gegebenen Funktion; die Summe der partiellen Differenziale giebt dann das gesuchte Differenzial, in welchem man dann noch für die abhängigen Variabelen und deren Differenziale ihre Werthe, ausgedrückt durch die unabhängige Veränderliche, setzen kann."

Als Beispiele betrachten wir die folgenden speciellen Fälle.

I. Sei $f(\sin x, \cos x)$ zu differenziren. Man setze

$$y = \sin x, \quad z = \cos x,$$

so ist

$$df(y,z) = \frac{df(y,z)}{dy}\, d\sin x + \frac{df(y,z)}{dz}\, d\cos x$$

d. i.

---

*) Es ist hier absichtlich nicht weiter gehoben worden, weil man sonst in der Gleichung $df(y,z) = df(y,z) + df(y,z)$ nicht wüsste, nach welchen Veränderlichen die Differenziationen vor sich gehen, wenn man nicht besondere Marken anhängt, wie etwa:

$$\underset{x}{d}f(y,z) = \underset{y}{d}f(y,z) + \underset{z}{d}f(y,z).$$

$$df(y,z) = \left[\frac{df(y,z)}{dy}\cos x - \frac{df(y,z)}{dz}\sin x\right] dx.$$

Als speziellen Fall nehme man etwa

$$f(y,z) = z^2 - y^2,$$

so wäre

$$\frac{df(y,z)}{dy} = -2y,\ \frac{df(y,z)}{dz} = +2z,$$

folglich weil $y = \sin x$, $z = \cos x$ ist,

$$d\left[\cos^2 x - \sin^2 x\right]$$
$$= [-2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x]\,dx = -2\sin 2x\,dx,$$

wovon man sich auch dadurch überzeugen kann, dass man die Gleichung $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ beachtet.

II. Wollte man die Funktion

$$e^{ax^2} \operatorname{Arcsin} x$$

differenziren, so nehme man

$$x^2 = y,\quad \operatorname{Arcsin} x = z$$
$$f(y,z) = e^{ayz},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{df(y,z)}{dy} = ae^{ayz},\quad \frac{df(y,z)}{dz} = e^{ay}$$

$$dy = 2x\,dx,\ dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

folglich

$$d\,(e^{ayz}) = (2a\,xze^{ay} + \frac{e^{ay}}{\sqrt{1-x^2}})\ dx.$$

und nach Wiedereinführung der Werthe von y und z,

$$d(e^{ax^2} \operatorname{Arcsin} x) = (2ax \operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,e^{ax^2}\,dx.$$

§ 9.

Differenziation der unentwickelten Funktionen.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Lehren des vorigen Paragraphen ist die Bestimmung der Differenzialquotienten solcher Funktionen, die nicht völlig entwickelt angegeben sind, sondern für welche

nur eine Bedingungsgleichung gezeigt wird, aus der sie sich allenfalls der Form nach bestimmen liessen. Wird nämlich eine Bedingungsgleichung

$$f(x, y) = 0$$

aufgestellt, welche für alle möglichen x und y erfüllt sein soll, so ist y nicht mehr von x unabhängig, sondern eine gewisse Funktion $y = \varphi(x)$ derselben, deren Form erhalten wird, wenn man in der obigen Gleichung y als unbekannt, x als bekannt ansieht und sie nach y auflöst. In dem Falle, wo diess allgemein möglich ist, hat es dann auch keine Schwierigkeit, den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ zu entwickeln.

Es kommt aber sehr häufig vor, dass man nicht im Stande ist, die Gleichung $f(x, y) = 0$ ganz im Allgemeinen aufzulösen, (z. B. wenn der Grad von y den vierten übersteigt, oder die Gleichung eine transcendente ist) und in solchen Fällen muss man sich nach einer Methode umsehen, welche den Differenzialquotienten $\varphi'(x)$ ohne Auflösung der obigen Gleichung bestimmen lehrt.

Nun ist aber dieses Problem nur ein spezieller Fall der im vorigen Paragraphen behandelten Aufgabe, nämlich derjenige, in welchem

$$z = \psi(x) = x, \quad f(y, z) = f(x, y) = 0$$

ist. Man hat folglich nach no. (3) in § 8

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df(x,y)}{dx},$$

wobei die beiden Differenzialquotienten rechts

$$\frac{df(x,y)}{dy} \text{ und } \frac{df(x,y)}{dx}$$

als partielle anzusehen sind, in denen x und y als unabhängige Variabelen fungiren. Substituirt man aber in den totalen Differenzialquotienten links den Werth von $y = \varphi(x)$, so muss

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{df[x, \varphi(x)]}{dx} = 0$$

sein. Denn vermöge der Bedingungsgleichung $f(x, y) = 0$, aus der sich erst $y = \varphi(x)$ fand, ist die Gleichung

$$f(x,y) = f[x, (\varphi(x)] = 0$$

eine rein identische, für jedes x erfüllte und daraus folgt unmittelbar

durch Differenziation das vorher Behauptete. Wir haben daher auch nach dem Obigen

$$0=\frac{df(x,y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{df(x,y)}{dx}$$

und mithin

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\frac{df(x,y)}{dy}}. \tag{2}$$

Um also den Differenzialquotienten der ihrer Form nach unbekannten Funktion $y=\varphi(x)$ zu bestimmen, braucht man blos die partiellen Differenzialquotienten der gegebenen Bedingungsgleichung aufzusuchen und diese durcheinander zu dividiren. Die Formel für $\varphi'(x)$ enthält zwar noch y, welches man im Allgemeinen nicht angeben kann, dessen Werth aber doch gefunden werden kann, sobald x einen speziellen Zahlenwerth bekommt, weil sich dann die Gleichung $f(x,y)=0$ in eine numerische verwandelt. Man ist also im Stande, für jeden Zahlenwerth von x die zugehörigen Zahlenwerthe von $y=\varphi(x)$ und $\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)$ anzugeben. Diess wird aus den folgenden Beispielen noch deutlicher erhellen.

I. Wäre zur Bestimmung von $y=\varphi(x)$ die Gleichung

$$f(x,y)=y^5x^3-2y^4x^2+3y-6x=0 \tag{3}$$

gegeben, so würde man im Allgemeinen y nicht durch x ausdrücken, also auch seinen Differenzialquotienten nicht finden können. Dagegen hat man nach dem Vorigen:

$$\frac{df(x,y)}{dx}=3y^5x^2-4y^4x-6,$$

$$\frac{df(x,y)}{dy}=5y^4x^3-8y^3x^2+3,$$

mithin

$$\varphi'(x)=-\frac{3y^5x^2-4y^4x-6}{5y^4x^3-8y^3x^2+3}. \tag{4}$$

Wollte man z. B. wissen, welchen Werth $\varphi'(x)$ für $x=1$ annimmt, so setze man in der Gleichung (3) $x=1$, wodurch

$$y^5-2y^4+3y-6=0$$

wird. Hieraus ergeben sich 5 Werthe von y, unter denen sich aber

nur ein einziger reeller $y=2$ findet. Es entsprechen also auch dem Werthe $x=1$ in (4) fünf verschiedene Werthe von $\varphi'(x)$; der einzige reelle darunter ist:

$$\varphi'(1)=-\frac{3.2^5-4.2^4-6}{5.2^4-8.2^3+3}=-\frac{26}{19}.$$

Ebenso würde man für jeden anderen numerischen Werth von x die zugehörigen numerischen Werthe von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ suchen können.

II. Findet zwischen x und y die Bedingungsgleichung

$$f(x,y)=x^y-y^x=0 \qquad (5)$$

statt, so hat man

$$\frac{df(x,y)}{dx}=yx^{y-1}-y^x\,ly,$$

$$\frac{df(x,y)}{dy}=x^y\,lx-xy^{x-1},$$

folglich

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=\frac{yx^{y-1}-y^x\,ly}{xy^{x-1}-x^y lx},$$

oder wenn man im Zähler und Nenner für y^x das kraft no. (5) gleichgeltende x^y setzt und dann mit x^y hebt

$$\varphi'(x)=\frac{y^2-xy\,ly}{x^2-xylx}. \qquad (6)$$

So hat man z. B. für $x=2$, $y=\varphi(x)=4$, mithin

$$\varphi'(2)=\frac{4(1-l2)}{1-2l2}.$$

Eben so leicht würde man $\varphi'(\frac{9}{4})$, $\varphi'(\frac{64}{27})$ etc. bestimmen können, weil für $x=\frac{9}{4}$, $\frac{64}{27}$ etc. aus der Gleichung (5) die Werthe $y=\frac{27}{8}$, $\frac{256}{81}$ folgen *).

---

*) Bringt man die Gleichung (5) auf die Form

$$y^{\frac{1}{y}}=x^{\frac{1}{x}}$$

so erhellt, dass sich die Aufsuchung des y für ein gegebenes x auf das Problem der Auflösung der transscendenten Gleichung

$$y^{\frac{1}{y}}=a,$$

worin a eine bekannte Grösse ist, reduzirt. Ehe wir zeigen, wie sich diese näherungsweis lösen lässt, wollen wir erst bemerken, dass man immer belie-

§. 10.

Differenziation imaginärer Funktionen.

Man kommt sehr oft in den Fall, Funktionen differenziren zu müssen, welche imaginäre Grössen enthalten und die man unter der Form:

---

big viele Paare zusammengehöriger Werthe von x und y finden kann, welche die Gleichung (5) befriedigen. Es folgt nämlich aus derselben

$$\frac{y}{x}=\frac{\log y}{\log x}.$$

Setzt man hier $\frac{y}{x}=1+\alpha$, womit blos gesagt ist, dass $y>x$ sei, so wird $y=x(1+\alpha)$. Andererseits muss aber auch $\frac{\log y}{\log x}=1+\alpha$ sein, woraus $\log y=(1+\alpha)\log x$ oder $y=x^{1+\alpha}$ folgt. Vermöge der beiden Werthe von y gilt nun die Gleichung

$$x^{1+\alpha}=x(1+\alpha),$$

woraus durch Hebung mit x und Ausziehung der αten Wurzel folgt

$$x=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

und dann wegen der Gleichung $y=x(1+\alpha)$

$$y=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Setzt man für α Brüche, deren Zähler die Einheit ist, wie z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ etc., so erhält man unendlich viele Paare rationaler zusammengehöriger Werthe.

Will man dagegen für ein gegebenes x das zugehörige y finden, also die Gleichung

$$y^{\frac{1}{y}}=a \text{ oder } y=a^y$$

auflösen, so hat man vermöge der Exponenzialreihe, die später entwickelt werden wird,

$$y=1+\frac{la}{1}y+\frac{(la)^2}{1.2}y^2+\frac{(la)^3}{1.2.3}y^3+\ldots$$

Bricht man die Reihe bei irgend einem Gliede ab, so bleibt eine näherungsweis richtige Gleichung übrig, die man als eine algebraische ansehen und aus der man durch Auflösung nach y als Unbekannter einen Näherungswerth für y finden kann. Da die Reihe selbst convergirt, so lässt sich dadurch, dass man immer mehr Glieder nimmt, die Näherung so weit treiben, als man will. Ein sehr lesenswerther Aufsatz über diesen Gegenstand überhaupt steht im Archiv der Mathem. u. Phys. Theil VI. S. 154.

$$F(x) = \Phi(x) + \sqrt{-1}\,\Psi(x)$$

darstellen kann, wo nun $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ reelle Functionen von x bedeuten. Die Differenziation solcher Ausdrücke hat keine grossen Schwierigkeiten; denn man findet leicht

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} + \sqrt{-1}\,\frac{\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)}{\Delta x},$$

folglich durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx,

$$F'(x) = \Phi'(x) + \sqrt{-1}\,\Psi'(x) \qquad (1)$$

oder

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{d\Psi(x)}{dx}. \qquad (2)$$

Die Differenziation von $F(x)$ kommt demnach auf die der einzelnen Funktionen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ zurück; kann man die letzteren nach den bisherigen Mitteln differenziren, so ist hiermit auch das Problem der Differenziation von $F(x)$ gelöst.

Die Betrachtung der Differenzialformeln imaginärer Funktionen bietet darin einen grossen Vortheil dar, dass sich durch dieselbe die Differenzialformeln ganz verschieden gestalteter Funktionen unter einen Gesichtspunkt vereinigen lassen, und dient somit zur Verallgemeinerung des Calculs. So sind z. B. die Differenzialgleichungen [§. 7., no. (19) und (23)]

$$d\{\tfrac{1}{2}l(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x})\} = \frac{\sqrt{ab}}{a-bx^2}dx \qquad (3)$$

und

$$d\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x = \frac{\sqrt{ab}}{a+bx^2}\,dx \qquad (4)$$

wesentlich gar nicht von einander verschieden. Setzt man nämlich in der ersten $-b$ an die Stelle von b, erhält man links die Gleichung

$$d\{\tfrac{1}{2}l(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}})\} = \frac{\sqrt{ab}\,.\,\sqrt{-1}}{a+bx^2}\,dx$$

oder

$$d\{\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}})\} = \frac{\sqrt{ab}}{a+bx^2}dx \qquad (5)$$

und diess in der That richtig. Denn man hat vermöge der Formel:

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha-\beta\sqrt{-1}}\right)=\text{Arctan}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

für $\alpha=\sqrt{a}$, $\beta=\sqrt{b}\,x$,

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}}\right)=\text{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x,$$

und durch diese Substitution fällt die Gleichung (5) mit der in (4) zusammen.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Differenzialformeln

$$d\,l(\sqrt{b}\,x+\sqrt{a+bx^2})=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx \qquad (6)$$

und

$$d\,\text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx. \qquad (7)$$

Nimmt man in der ersten b negativ, so erhält man leicht

$$d\left[\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l(\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}+\sqrt{a-bx^2})\right]=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx \qquad (8)$$

Aus der bekannten Formel

$$l(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\,l(\alpha^2+\beta^2)+\sqrt{-1}\;\text{Arctan}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

folgt andererseits für

$$\alpha=\sqrt{a-bx^2},\ \beta=\sqrt{b}\,x$$

die Gleichung

$$l(\sqrt{a-bx^2}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\,la+\sqrt{-1}\;\text{Arctan}\,\frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a-bx^2}}.$$

Setzt man in der bekannten Formel

$$\text{Arctan}\,\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}=\text{Arcsin}\,z$$

$=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x$, so findet man

$$\text{Arctan}\,\frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a-bx^2}}=\text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x,$$

folglich nach dem Vorigen

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{a-bx^2}+\sqrt{b}\,x\sqrt{-1}) = \frac{la}{2\sqrt{-1}} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x$$

und

$$d\{\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{a-bx^2}+\sqrt{b}+\sqrt{-1})\} = d\,\text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes geht die Gleichung (8) völlig in die unter no. (7) über, womit die Identität der Differenzialformeln (6) und (7) bewiesen ist.

§. 11.

Differenziation der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

Lässt man in einer Funktion mehrerer von einander aber völlig unabhängiger Variabelen sich eine dieser Variabelen ändern, so zieht diese Aenderung keine Aenderungen der anderen Variabelen nach sich, welche demnach für die mit dem Inkrement der einen Veränderlichen vorzunehmenden Rechnungsoperationen als Constanten anzusehen sind. Geht man also in dem Quotienten, der die Aenderung der Funktion zum Zähler und die Aenderung der Veränderlichen zum Nenner hat, bis zur Gränze der Abnahme überhaupt, so erhalten wir jederzeit einen partiellen Differenzialquotienten. Dagegen könnte man sämmtlichen in der Funktion vorkommenden unabhängigen Veränderlichen gleichzeitig beliebige Inkremente ertheilen und die totale Aenderung der Funktion oder die Gränze der Aenderung zu bestimmen suchen. In diesem Falle erhält man das totale Differenzial.

Sei nun $f(x,y)$ eine Funktion zweier von einander unabhängiger Variabelen; geben wir den Grössen x und y die beiden willkührlichen, also von einander unabhängigen Inkremente Δx und Δy, so nennen wir die Differenz

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta f(x,y) \qquad (1)$$

die totale Differenz der Funktion $f(x,y)$. Dieselbe ist auch

$$=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\Delta x+\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}\Delta y. \qquad (2)$$

Lassen wir nun Δx und Δy sich gleichzeitig der Null nähern, so ist

$$\text{Lim}\,\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{df(x,y)}{dx}$$

und

$$\operatorname{Lim}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$$

$$=\operatorname{Lim}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta x}=\frac{df(x, y)}{dy},$$

wobei die Differenzialquotienten

$$\frac{df(x, y)}{dx} \text{ und } \frac{df(x, y)}{dy}$$

partielle sind. Man hat demnach aus no. (2)

$$df(x,y)=\frac{df(x,y)}{dx}dx+\frac{df(x,y)}{dy}dy, \tag{3}$$

wofür man auch zuweilen schreibt

$$df(x,y)=\underset{x}{d}f(x,y)+\underset{y}{d}f(x,y). \tag{4}$$

Das totale Differenzial ist demnach die Summe der beiden partiellen Differenziale.

Eben so leicht findet man allgemeiner

$$df(x, y, z)$$
$$=\frac{df(x, y, z)}{dx}dx+\frac{df(x, y, z)}{dy}dy+\frac{df(x, y, z)}{dz}dz$$

oder

$$df(x,y,z)=\underset{x}{d}f(x,y,z)+\underset{y}{d}f(x,y,z)+\underset{z}{d}f(x,y,z)$$

und ähnlich für jede weitere Anzahl von Veränderlichen.

Man wird leicht bemerken, dass die so eben angestellte Betrachtung viel Aehnlichkeit mit der in §. 3. durchgeführten hat; in der That ist der Unterschied nur gering; in der Gleichung (3) bedeutet dy als Faktor des partiellen Differenzialquotienten rechts eine Grösse, welche man auf irgend welche beliebige Weise bis zur Gränze Null zu vermindern hat; diese Verminderung findet auch bei dem dy in § 8. statt, nur dass sie da nicht willkührlich, sondern durch die Gleichung $y=\varphi(x)$ von dx abhängig ist, woraus am Ende der Rechnung noch die Forderung entspringt, für dy seinen Werth durch dx ausgedrückt zu substituiren.

Cap. IV. Die derivirten Funktionen und Differenzialquotienten höherer Ordnungen.

§. 12.

Begriff und geometrische Bedeutung der derivirten Funktionen und Differenzialquotienten höherer Ordnungen.

Rein analytisch betrachtet ist die derivirte Funktion einer gegebenen Funktion nichts Anderes, als eine neue Funktion, welche man nach einer gewissen Regel aus der ursprünglichen ableiten kann. So wie man nun schon in der Arithmetik eine einmal aufgestellte Rechnungsoperation mehrmals hinter einander anwendet (z. B. die Multiplikation, durch deren Wiederholung die Potenz mit ganzem positiven Exponenten entsteht), so muss man sich auch hier versucht fühlen, durch successive Anwendung des nämlichen Verfahrens, aus der derivirten Function eine zweite derivirte Funktion, aus dieser eine dritte u. s. f. abzuleiten. So können wir aus einer gegebenen Funktion $F(x)$ eine beliebig weit fortlaufende Reihe derivirter Funktionen entwickeln:

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x),\ \ldots\ F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x),$$

deren jede aus der ihr vorhergehenden auf die nämliche Weise entspringt, wie die erste $F'(x)$ aus $F(x)$ selbst und in denen die obenangesetzte **Anzahl von Strichen die Ordnung der derivirten Funktion angiebt.**

Es ist nicht schwer, die geometrische Bedeutung solcher successiven Derivationen einzusehen, so weit überhaupt eine solche existirt: die folgende Betrachtung wird uns hierzu dienen.

Es sei in Fig. 7 $OA=x$, $AP=f(x)$ und die krummlinig begränzte Fläche $OAPR=F(x)$, so ist nach den in der Einleitung angestellten Untersuchungen

$$AP=f(x)=F'(x).$$

Wollen wir hieraus $F''(x)$ ableiten, so müssen wir auf $F'(x)$, d. h. $f(x)$ dieselben Operationen anwenden, durch welche $F'(x)$ selbst erst aus $F(x)$ abgeleitet worden ist; wir haben also:

$$F''(x)=\operatorname{Lim}\frac{F'(x+\Delta x)-F'(x)}{\Delta x}$$

oder was das Nämliche ist

$$F''(x)=\operatorname{Lim}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}.$$

Lassen wir nun x um ein Stück $\delta=AB$ zunehmen, so ist $BQ=f(x+\delta)$ folglich $f(x+\delta)-f(x)=UQ$, wenn $PU \parallel AB$ gezogen wird; mithin

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{UQ}{PU}=\tan UPQ.$$

Ziehen wir ferner durch P eine Tangente ST an die Curve und setzen $\angle TSA=\angle TPU=\omega$ und $\angle QPT=\varepsilon$, so ist

$$\angle UPQ=\omega+\varepsilon,$$

folglich

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\tan(\omega+\varepsilon).$$

Lassen wir jetzt δ continuirlich abnehmen, so rückt die Gerade BQ immer näher an AP, zugleich der Punkt Q immer näher an den Punkt T, folglich vermindert sich auch der Winkel $QPT=\varepsilon$ beständig. Ist endlich $\delta=0$ geworden, so sind die Punkte Q und T in einen einzigen und zwar in P zusammengefallen und es ist $\angle QPT=\varepsilon=0$. Die Grösse ε nimmt also mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null ab und es ist mithin:

$$\operatorname{Lim}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\tan\omega$$

oder

$$f'(x) \text{ d. h. } F''(x)=\tan\omega,$$

woraus die geometrische Bedeutung der zweiten derivirten Funktion für den Fall, dass die Urfunktion eine Fläche repräsentirt, mit völliger Deutlichkeit erhellt. Wollte man hier weiter gehen, so würde man aus dem Gebiete der Geometrie völlig herauskommen; denn mit jeder Derivation erniedrigt sich der Grad der Funktion, indem man von der zweiten Dimension (die Fläche) zur ersten (die Linie) und von dieser zur nullten, d. h. zur Zahl $\tan\omega$ gelangt; eine weitere Derivation hätte also gar keine geometrische Bedeutung mehr.

Analog den derivirten Funktionen höherer Ordnungen kann man auch die Differenzialquotienten und Differenzialgleichungen höherer Ordnungen entwickeln, indem man aus dem Differenzialquotienten für $F'(x)$ den für $F''(x)$, hieraus den für $F'''(x)$ u. s. f. ableitet. Man hat nämlich

$$F''(x) = \text{Lim}\,\frac{F'(x+\Delta x)-F'(x)}{\Delta x} = \frac{dF'(x)}{dx}$$

oder wenn man für $F'(x)$ seinen Werth $\frac{dF(x)}{dx}$ setzt,

$$F''(x) = \frac{d\frac{dF(x)}{dx}}{dx}.$$

Nun ist aber dx von x unabhängig; denn es bedeutet das Differenzial dx (oder d_x, wie wir in der Einleitung bezeichneten) ein Inkrement, welches man dem x willkührlich gegeben und dem man nur die Bedingung unendlicher Abnahme auferlegt hat, ohne das Gesetz zu bestimmen, nach welchem diese Abnahme vor sich gehen soll. In Bezug auf die neue Differenziation ist daher dx als Constante anzusehen*) und daher wird

$$F''(x) = \frac{\frac{ddF(x)}{dx}}{dx} = \frac{ddF(x)}{dx \,.\, dx},$$

wofür man die Bezeichnung

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = F''(x)$$

eingeführt hat, indem dx an der Stelle von $(dx)^2$ steht.

Durch Differenziation dieser Gleichung ergiebt sich weiter

$$\frac{d\frac{d^2F(x)}{dx^2}}{dx} = F'''(x)$$

oder

$$\frac{dd^2F(x)}{dx^2\,dx} = F'''(x),$$

wofür man schreibt

$$\frac{d^3F(x)}{dx^3} = F'''(x).$$

Eben so hat man weiter

*) Wäre x nicht unabhängig veränderlich, so würde das Gesetz, nach welchem sich dx der Null nähert, nicht mehr beliebig sein, denn z. B. für $x=\varphi(t)$ wäre $dx=\varphi'(t)\,dt$, und dann gilt auch im Allgemeinen die Consequenz nicht, dass man dx in Bezug auf eine neue Differenziation für constant anzusehen habe.

$$\frac{d^4F(x)}{dx^4}=F^{IV}(x)$$

u. s. f. und überhaupt

$$\frac{d^nF(x)}{dx^n}=F^{(n)}(x),$$

wofür man auch die Differenzialgleichung schreiben könnte

$$d^n F(x)=F^{(n)}\,dx^n.$$

Man muss sich hüten, das n auf der linken Seite für einen Exponenten zu halten, wie diess auf der rechten Seite der Fall ist. Im Gegentheil vertritt es dort die Stelle eines Index, welcher anzeigt, wie vielmal nach einander die Operation des Differenzirens auf die Funktion $F(x)$ angewendet worden ist.

In manchen Fällen bedient man sich auch noch einer dritten Bezeichnungsweise, welche oft sehr vortheilhaft ist. Man schreibt nämlich an die Stelle von $\frac{d^nF(x)}{dx^n}$ einfacher $D^nF(x)$, so dass also

$$\frac{d^n F(x)}{dx^n}=F^{(n)}(x)=D^nF(x)$$

ist. Diese Bezeichnung hat das Bequeme, dass man bei Funktionen mehrer Veränderlichen die Grösse, nach welcher differenzirt wird, leicht als Marke anhängen kann; z. B.

$$\underset{y}{D^n}F(x,y,z)=\frac{d^nF(x,y,z)}{dy^n},$$

wobei der $n$te Differenzialquotient partiell nach y genommen ist.

§. 13.

Höhere Differenzialquotienten der Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten zweier Funktionen.

So wie wir früher untersucht hatten, nach welchen Regeln sich die ersten Differenzialquotienten solcher Funktionen bilden, welche aus zwei anderen mittelst der vier Spezies zusammengesetzt sind, so müssen wir nun auch die höheren Differenzialquotienten von Ausdrücken, wie

$$\varphi(x)+\psi(x)\ ,\ \varphi(x)-\psi(x)\ ,\ \varphi(x)\psi(x)\ ,\ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

zu entwickeln suchen. Diess hat namentlich für die beiden ersten nicht die geringste Schwierigkeit.

I. Nach dem Früheren ist bekanntlich

$$\frac{d[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Bemerkt man, dass wenn zwei Funktionen einander identisch sind, auch ihre Differenzialquotienten es sein müssen, so erhält man durch eine fernere beiderseitige Differenziation:

$$\frac{d^2[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx^2} = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}.$$

Eine nochmalige Differenziation würde geben

$$\frac{d^3[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx^3} = \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \pm \frac{d^3\psi(x)}{dx^3}$$

und hieraus erhellt, dass überhaupt die Gleichung gilt

$$\frac{d^n[\varphi(x) \pm \psi(x)]}{dx^n} = \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \pm \frac{d^n\psi(x)}{dx^n}, \qquad (1)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$D^n[\varphi(x) \pm \psi(x)] = D^n\varphi(x) \pm D^n\psi(x), \qquad (2)$$

und eben so hat man die Differenzialgleichung:

$$d^n[\varphi(x) \pm \psi(x)] = d^n\varphi(x) \pm d^n\psi(x). \qquad (3)$$

II. Etwas verwickelter gestalten sich die höheren Differenzialquotienten des Produktes zweier Funktionen. Aus der Gleichung

$$\frac{d[\varphi(x)\psi(x)]}{dx} = \psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx}\varphi(x),$$

folgt zunächst durch Differenziation

$$\frac{d^2[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^2} = \psi(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}$$
$$+ \frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\varphi(x),$$

d. i.

$$\frac{d^2[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^2} = \psi(x)\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + 2\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\varphi(x);$$

Hieraus erhält man durch eine weitere Differenziation

$$\frac{d^3[\varphi(x)\,\psi(x)]}{dx^3} = \psi(x)\,\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} + \frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$$

$$+2\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + 2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$+\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^3\psi(x)}{dx^3}\,\varphi(x)$$

oder

$$\frac{d^3[\varphi(x)\,\psi(x)]}{dx^3}$$

$$= \psi(x)\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx^3} + 3\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + 3\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^3\psi(x)}{dx^3}\,\varphi(x)$$

Betrachtet man die Weise, in der sich hier die Coeffizienten bilden, so wird man leicht bemerken, dass dieselbe mit der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten identisch ist. Denn die obigen Coeffizienten entspringen durch successive Addition je zwei vorhergehender nach dem Schema

1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
etc.,

welches zugleich das Bildungsgesetz für die Binomialkoeffizienten ist. Beachtet man noch, dass in Formel (1) die Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ der Ordnung nach fallen, die von $\psi(x)$ eben so regelmässig steigen, so darf man mit vieler Wahrscheinlichkeit folgendes Gesetz vermuthen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n[\varphi(x)\,\psi(x)]}{dx^n} = \\ &\psi(x)\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + n_1\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + n_2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}\varphi(x)}{dx^{n-2}} + \cdots \\ &\cdots + n_{n-1}\frac{d^{n-1}\psi(x)}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\,\varphi(x). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Seine Richtigkeit erkennt man leicht, wenn man unter einstweiliger Annahme desselben, die Form untersucht, welche der nächst höhere Differenzialquotient bekommen muss. Durch nochmalige Differenziation ergiebt sich nämlich aus (2)

$$\frac{d^{n+1}[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^{n+1}} = \psi(x)\frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} + \frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}$$
$$+ n_1\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + n_1\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}}$$
$$+ n_2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + n_2\frac{d^3\psi(x)}{dx^3}\cdot\frac{d^{n-2}\varphi(x)}{dx^{n-2}}$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ n_{n-1}\frac{d^{n-1}\psi(x)}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + n_{n-1}\frac{d^n\psi(x)}{dx^{n-1}}\frac{d\varphi(x)}{dx}$$
$$+ \frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^{n+1}\psi(x)}{dx^{n+1}}\varphi(x),$$

und wenn man die Glieder in diagonaler Richtung zusammennimmt,

$$\frac{d^{n+1}[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^{n+1}} =$$
$$\psi(x)\frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} + [1+n_1]\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + [n_1+n_2]\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$\ldots + [n_{n-1}+1]\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^{n+1}\psi(x)}{dx^{n+1}}\varphi(x).$$

Zieht man je zwei der in Klammern stehenden Binomialkoeffizienten nach dem Satze*)

$$n_{p-1} + n_p = (n+1)_p$$

für $p = 1, 2, 3, \ldots n$ in einen zusammen, so ist jetzt

---

*) Es ist nämlich

$$n_p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}$$
$$n_{p-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)},$$

also

$$n_{p-1} = \frac{p}{n-p+1}\,n_p$$

folglich

$$n_{p-1} + n_p = \left\{\frac{p}{n-p+1} + 1\right\} n_p = \frac{n+1}{n-p+1}\,n_p$$

d. i. vermöge des Werthes von n_p

$$n_{p-1} + n_p = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+2)}{1.2.3\ldots p},$$

wobei die rechte Seite nichts Anderes als $(n+1)_p$ ist, wie man sogleich übersieht, wenn man in der Formel für n_p statt n, $n+1$ setzt.

$$\frac{d^{n+1}[\varphi(x)\psi(x)]}{dx^{n+1}} =$$

$$\psi(x)\frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} + (n+1)_1\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} + (n+1)_2\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-1}\varphi(x)}{dx^{n-1}} + ..$$

$$... + (n+1)_n\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d^{n+1}\psi(x)}{dx^{n+1}}\varphi(x).$$

Denselben Ausdruck für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten würde man aber auch erhalten, wenn man in der Formel (2) $n+1$ für n setzt. Das hypothetisch angenommene Bildungsgesetz der höheren Differenzialquotienten gilt demnach für die $(n+1)$te Ordnung, wenn es für die $n$te richtig ist; da es aber für die erste Ordnung gilt, so muss es jetzt allgemein gültig sein.

Man kann das Theorem in (3) auch in folgender Form darstellen

$$\left.\begin{array}{c} D^n[\varphi(x)\psi(x)] = \\ \psi(x)D^n\varphi(x) + n_1 D\psi(x)D^{n-1}\varphi(x) + n_2 D^2\psi(x)D^{n-2}\varphi(x) + \dots \\ \dots + n_{n-1}D^{n-1}\psi(x)D\varphi(x) + D^n\psi(x)\varphi(x). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Schreibt man die Reihe rechts in umgekehrter Ordnung und berücksichtigt, dass $n_{n-1} = n_1$, $n_{n-2} = n_2$, $n_{n-3} = n_3$ etc. ist, so kann man auch setzen

$$\left.\begin{array}{c} D^n[\varphi(x)\psi(x)] = \\ \varphi(x)D^n\psi(x) + n_1 D\varphi(x)D^{n-1}\psi(x) + n_2 D^2\varphi(x)D^{n-2}\psi(x) + \dots \\ \dots + n_{n-1}D^{n-1}\varphi(x)D\psi(x) + D^n\varphi(x)\psi(x). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Ist einer der Faktoren constant, etwa $\psi(x) = a$, so sind die Differenzialquotienten

$$D\psi(x),\ D^2\psi(x),\ D^3\psi(x), \dots D^n\psi(x)$$

sämmtlich $=0$ und folglich bleibt nach (3) und (4)

$$D^n[a\varphi(x)] = aD^n\varphi(x). \qquad (5)$$

III. Auch für die höheren Differenzialquotienten der Quotienten zweier Funktionen wie

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

kann man allgemeine Formeln aufstellen, deren Gesetz aber ziemlich verwickelt ist. Wir können sie aus doppelten Gründen übergehen; einerseits, weil sie fast nie gebraucht werden und andererseits, weil man in den wenigen Fällen, wo man sie brauchen könnte, die Aufgabe leicht auf die vorige reduziren kann. Setzt man nämlich $\frac{1}{\psi(x)} = \chi(x)$, so wird

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \varphi(x)\,\chi(x);$$

kann man nun im speciellen Falle der Anwendung die höheren Differenzialquotienten von $\chi(x)$ entwickeln, so giebt die Anwendung des vorigen Theoremes (5) unmittelbar die höheren Differenzialquotienten des Produktes $\varphi(x)\chi(x)$, indem man sich nur die Funktion $\psi(x)$ dort durch $\chi(x)$ ersetzt denkt.

IV. Zu bemerken ist endlich noch der Satz: wenn $F(x) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x)$ ist, so wird

$$D^n F(x) = D^n \varphi(x) + \sqrt{-1}\, D^n \psi(x),$$

von dessen Richtigkeit man sich leicht durch mehrmalige Wiederholung der Betrachtungen des § 10 überzeugen kann.

§ 14.

Die höheren Differenzialquotienten der wichtigsten algebraischen Funktionen.

I. Für die Differenziation der Potenz x^μ kann man sehr leicht das allgemeine Gesetz entdecken; man erhält nämlich der Reihe nach

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1}$$

$$\frac{d^2(x^\mu)}{dx^2} = \mu(\mu-1)\,x^{\mu-2}$$

$$\frac{d^3(x^\mu)}{dx^3} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\,x^{\mu-3}$$

oder überhaupt für $\frac{d^n(x^\mu)}{dx^n} = D^n(x^\mu)$

$$D^n(x^\mu) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})\,x^{\mu-n}. \qquad (1)$$

Beispiele hierzu sind $\mu = -1$, $\mu = -\frac{1}{2}$, für welche speziellen Werthe man findet

$$D^n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n 1.2.3.\ldots.n}{x^{n+1}} \qquad (2)$$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n x^n \sqrt{x}} \qquad (3)$$

II. Es ist hiernach auch leicht, die höheren Differenzialquotienten der allgemeineren Funktionen

$$(a+bx)^\mu$$

zu entwickeln. Denn setzt man $a+bx=z$, so ist nach (1)

$$D^n(z^\mu)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})z^{\mu-n}.$$

Andererseits hat man

$$D^n(z^\mu)=\frac{d^n(z^\mu)}{dz^n}=\frac{d^n[(a+bx)^\mu]}{[d(a+bx)]^n}=\frac{d^n[(a+bx)^\mu]}{(bdx)^n}$$
$$=\frac{1}{b^n}\frac{d^n[(a+bx)^\mu]}{dx^n}=\frac{1}{b^n}D^n(a+bx)^\mu.$$

Führt man dieses nebst dem Werthe von z in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich nach beiderseitiger Multiplikation mit b^n,

$$D^n(a+bx)^\mu=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})b^n(a+bx)^{\mu-n}. \quad (4)$$

Specielle Fälle bilden z. B. die Annahmen $\mu=-1$, $\mu=-\frac{1}{2}$, wofür man bekommt

$$D^n\left(\frac{1}{a+bx}\right)=\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots nb^n}{(a+bx)^{n+1}} \quad (5)$$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}} \quad (6)$$

und entsprechend für negative b

$$D^n\left(\frac{1}{a-bx}\right)=\frac{1.2.3\ldots nb^n}{(a-bx)^{n+1}}, \quad (7)$$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)b^n}{2^n(a-bx)^n\sqrt{a-bx}}. \quad (8)$$

III. Die so eben entwickelten Formeln können selbst wieder zur Aufsuchung der höheren Differenzialquotienten zusammengesetzterer Funktionen benutzt werden, sobald diese letzteren sich auf irgend eine Weise in andere von der oben betrachteten Form zerlegen lassen. Einige der wichtigsten Fälle der Art sind folgende.

Aus der eine Zerlegung darstellenden identischen Gleichung

$$\frac{1}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+bx}-\frac{1}{-a+bx}\right\}$$

folgt sogleich nach §. 13 no. (2)

$$D^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)=\frac{1}{2a}\left\{D^n\left(\frac{1}{a+bx}\right)-D^n\left(\frac{1}{-a+bx}\right)\right\},$$

d. h. nach Formel (5)

$$=\frac{1}{2a}\left\{\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{(a+bx)^{n+1}}-\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{(-a+bx)^{n+1}}\right\},$$

d. i. wenn man die gemeinschaftlichen Faktoren absondert,

$$D^n\left(\frac{1}{a^2-b^2x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{2a}\left\{\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}-\frac{1}{(-a+bx)^{n+1}}\right\}. \qquad (9)$$

Durch ganz das nämliche Verfahren ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{x}{a^2-b^2x^2}=-\frac{1}{2b}\left\{\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{-a+bx}\right\}$$

die Differenzialformel

$$D^n\left(\frac{x}{a^2-b^2x^2}\right)=(-1)^{n+1}1.2..nb^{n-1}\left\{\frac{1}{(a+bx)^{n+1}}+\frac{1}{(-a+bx)^{n+1}}\right\}. \qquad (10)$$

Diese Formeln lassen sich noch etwas weiter ausdehnen, wenn man die willkührliche Constante a imaginär nimmt, also etwa $a\sqrt{-1}=ai$ für a setzt. Es wird dann aus (9)

$$D^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)=-\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{2ai}\left\{\frac{1}{(ai+bx)^{n+1}}-\frac{1}{(-ai+bx)^{n+1}}\right\}$$

oder wenn man rechts Alles auf gleichen Nenner bringt

$$D^n\left(\frac{1}{a^2+b^2x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{2ai}\cdot\frac{(ai+bx)^{n+1}-(-ai+bx)^{n+1}}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}.$$

Setzen wir nun, um die imaginären Ausdrücke los zu werden,

$$ai+bx=\varrho(\cos\omega+i\sin\omega)$$
$$-ai+bx=\varrho'(\cos\omega'-i\sin\omega'),$$

so folgt

$$\varrho\cos\omega=bx,\ \varrho\sin\omega=a$$
$$\varrho'\cos\omega'=bx,\ \varrho'\sin\omega'=a$$

und hieraus

$$(\varrho\cos\omega)^2+(\varrho\sin\omega)^2=a^2+b^2x^2$$
$$\tan\omega=\frac{a}{bx}$$
$$(\varrho'\cos\omega')^2+(\varrho'\sin\omega')^2=a^2+b^2x^2$$
$$\tan\omega'=\frac{a}{bx},$$

folglich wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet

$$\varrho = (a^2 + b^2x^2)^{\frac{1}{2}},\quad \omega = \text{Arctan}\,\frac{a}{bx} + k\pi$$

$$\varrho' = (a^2 + b^2x^2)^{\frac{1}{2}},\quad \omega' = \text{Arctan}\,\frac{a}{bx} + k\pi,$$

also $\varrho = \varrho'$, $\omega = \omega'$ und mithin

$$D^n\left(\frac{1}{a^2 + b^2x^2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{2ai} \cdot \frac{[\varrho(\cos\omega + i\sin\omega)]^{n+1} - [\varrho(\cos\omega - i\sin\omega)]^{n+1}}{(a^2 + b^2x^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n 1.2..n\, b^n \varrho^{n+1}}{2ai} \cdot \frac{\cos(n+1)\omega + i\sin(n+1)\omega - (\cos(n+1)\omega - i\sin(n+1)\omega)}{(a^2 + b^2x^2)^{n+1}}$$

d. i. vermöge des Werthes von ϱ

$$D^n\left(\frac{1}{a^2 + b^2x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{a} \cdot \frac{\sin(n+1)\omega}{(a^2 + b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Zu bemerken ist noch, dass in dem Werthe von ω die ganze Zahl $k = 0$ sein muss. Denn da die linke Seite der vorstehenden Gleichung für negative a die nämliche bleibt wie für positive, so muss diess auch mit der rechten Seite der Fall sein. Diess kann aber nur geschehen, wenn für negative a der Bogen negativ wird, wo dann in der That wegen des negativen Divisors a der ganze Ausdruck positiv ausfällt. Es kann aber für negative a der Bogen $\omega = \text{Arctan}\,\frac{a}{bx} + kx$ nur dann negativ werden, wenn $k = 0$ ist, und so ergiebt sich

$$D^n\left(\frac{1}{a^2 + b^2x^2}\right) = \frac{(-1)^n 1.2..nb^n}{a} \cdot \frac{\sin\left[(n+1)\,\text{Arctan}\,\frac{a}{bx}\right]}{(a^2 + b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (11)$$

Wendet man die nämlichen Transformationen auf die Gleichung (10) an, so findet man ebenso leicht

$$D^n\left(\frac{x}{a^2 + b^2x^2}\right) = (-1)^n 1.2..nb^{n-1} \frac{\cos\left[(n+1)\,\text{Arctan}\,\frac{a}{bx}\right]}{(a^2 + b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (12)\ *)$$

*) Für in der Sprache der Analysis weniger Geübte möge hier noch die Bemerkung stehen, dass ein Ausdruck, wie sin (m Arctan z) gewissermassen eine algebraisch geometrische Aufgabe involvirt, die sich auch leicht analytisch lösen lässt. Es sei nämlich ein spitzer Bogen u gegeben, dessen Tan-

In ähnlicher Weise, wie wir so eben die Theoreme I. und IV. in §. 13 zur Entwickelung der höheren Differenzialquotienten einer etwas zusammengesetzteren Funktion benutzt haben, können wir auch das Theorem II. das. zu gleichem Zwecke anwenden. Wäre z. B. die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$$

zu differenziren, so nehmen wir

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{a+bx}},\ \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a-bx}},$$

wodurch sich ergiebt:

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{(a+bx)(a-bx)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}},$$

folglich ist nun nach dem genannten Satze

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+bx}}D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)+n_1\,D\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)D^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)$$

$$+n_2\,D^2\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)D^{n-2}\left(\frac{1}{\sqrt{a-bx}}\right)+\ldots.$$

---

gente z heissen möge, derselbe m mal genommen und die Aufgabe gestellt, den Sinus von mu durch die Tangente von u auszudrücken, so hat man hierin den einfachen Sinn von $\sin(m\,\mathrm{Arctan}\,z)$, und die Aufgabe selbst würde sich leicht nach der algebraisch-geometrischen Methode lösen lassen. Man kann sie aber auch mit Hülfe goniometrischer Formeln behandeln, wie im folgenden Beispiele. Es ist $\sin 3u=3\sin u-4\sin^3 u$; oder weil immer $\sin u=\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$ ist

$$\sin 3u=3\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}-4\left(\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}\right)^3,$$

da aber $\tan u=z$ als bekannt vorausgesetzt wird, so folgt

$$\sin(3\,\mathrm{Arctan}\,z)=3\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}-4\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3.$$

Auf ähnliche Weise kann man für jedes positive ganze m mit Hülfe der goniometrischen Formeln Ausdrücke wie $\sin(m\,\mathrm{Arctan}\,z)$ und $\cos(m\,\mathrm{Arctan}\,z)$ vollständig entwickeln.

doer wenn man die Formeln (8) und (6) des vorigen Paragraphen für $n=n,\ n-1,\ n-2, \ldots$ und $n=1, 2, 3, \ldots$ in Anwendung bringt

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)b^n}{2^n(a-bx)^n\sqrt{a-bx}}-n_1\frac{1.b}{2(a+bx)\sqrt{a+bx}}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-3)b^{n-1}}{2^{n-1}(a-bx)^{n-1}\sqrt{a-bx}}$$
$$+n_2\frac{1.3.b^2}{2^2(a+bx)^2\sqrt{a+bx}}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-5)b^{n-2}}{2^{n-2}(a-bx)^{n-2}\sqrt{a-bx}}-\ldots$$

Bemerkt man, dass hier alle Glieder den gemeinschaftlichen Faktor

$$\frac{b^n}{2^n\sqrt{a^2-b^2x^2}}$$

besitzen, multiplizirt und dividirt dann noch die rechte Seite

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(a-bx)^n(a+bx)^n},$$

so erhält man

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)=$$

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)b^n}{2^n(a^2-b^2x^2)^n\sqrt{a^2-b^2x^2}}\left\{\begin{array}{l}(a+bx)^n-\frac{1.n_1}{2n-1}(a+bx)^{n-1}(a-bx)\\ +\frac{1.3.n_2}{(2n-1)(2n-3)}(a+bx)^{n-2}(a-bx)^2-\ldots\end{array}\right\} \quad (13)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

§ 15.

Die höheren Differenzialquotienten der wichtigsten transcendenten Funktionen.

I. Für die Exponenzialgrösse hat man folgende Reihe von Gleichungen;

$$\frac{d(e^{ax})}{dx}=ae^{ax}$$
$$\frac{d^2(e^{ax})}{dx^2}=a\frac{d(e^{ax})}{dx}=a^2e^{ax}$$
$$\frac{d^3(e^{ax})}{dx^3}=a^2\frac{d(e^{ax})}{dx}=a^3e^{ax}$$

u. s. f.,

also überhaupt

$$\frac{d^n(e^{ax})}{dx^n} = D^n(e^{ax}) = a^n e^{ax},$$

ein sehr einfaches Resultat.

II Die Differenziation logarithmischer Funktionen kommt immer auf die von algebraischen Funktionen zurück, weil der erste Differenzialquotient des Logarithmus eine algebraische Grösse ist. Man hat nämlich

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$$

folglich

$$\frac{d^2lx}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}$$

$$\frac{d^3lx}{dx^3} = \frac{d^2l\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^2}$$

u. s. f.

d. i. im Allgemeinen

$$\frac{d^n lx}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}}$$

oder

$$D^n lx = D^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mithin ist nach Formel (2) § 14, wenn man daselbst $n-1$ für n setzt,

$$D^n lx = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3....(n-1)}{x^n}, \qquad (2)$$

wobei man im Falle $n=1$ die Faktorielle $1.2...(n-1)$ für 1 zu rechnen hat, wenn die Formel allgemein gültig sein soll. — Aus der Gleichung

$$Dl(a+bx) = \frac{b}{a+bx}$$

findet man eben so leicht durch $(n-1)$malige Differenziation

$$D^n l(a+bx) = bD^{n-1}\left(\frac{1}{a+bx}\right)$$

d. i. nach Formel (5) in § 14,

$$D^n l(a+bx) = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3...(n-1)b^n}{(a+bx)^n} \qquad (3)$$

wo hinsichtlich der Faktorielle $1.2.3\ldots(n-1)$ die nämliche Bemerkung gilt, wie vorhin. — Bemerkt man, dass

$$Dl\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)=\frac{2ab}{a^2-b^2x^2}$$

ist, so folgt

$$D^n l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = 2ab\, D^{n-1}\frac{1}{a^2-b^2x^2},$$

mithin nach Artikel III in § 14

$$D^n l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)=\frac{1.2.3\ldots(n-1)\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\left\{(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n\right\}, \quad (4)$$

wobei man wieder wie dort die Binome $(a+bx)^n$ und $(a-bx)^n$ entwickeln kann.

III. Von den goniometrischen Funktionen sind es nur zwei, deren höhere Differenzialquotienten sich auf dem bisherigen gewöhnlichen Wege entwickeln lassen und diess sind der Sinus und Cosinus. Für die übrigen Funktionen ist das Bildungsgesetz der höheren Differenzialquotienten nicht der Art, dass man es sogleich übersehen könnte, wodurch man genöthigt wird, sich in diesen, wie in vielen anderen Fällen nach neuen Methoden umzusehen.

Was nun den Sinus betrifft, so findet man leicht

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^2\sin x}{dx^2} = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^3\sin x}{dx^3} = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^4\sin x}{dx^4} = \sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$$

u. s. f.

Man hat also allgemein

$$\frac{d^n\sin x}{dx^n}\; D^n \sin x = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right). \quad (5)$$

Man kann sich darüber auch noch Folgendes merken. Die ganze Zahl n kann von folgenden vier Formen sein:

$$4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3.$$

Für die erste ist

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin(2m\pi+x)=\sin x,$$

für die zweite:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,$$

für die dritte:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin(\overline{2m+1}\pi+x)=-\sin x,$$

und für die vierte:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sin\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x.$$

Man kann daher auch sagen: es ist

$$D^n \sin x=+\sin x,\ +\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,$$

wobei die vier verschiedenen Werthe den vier Formen

$$n=4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$$

correspondiren.

Man hat ganz ähnlich

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^2\cos x}{dx^2}=-\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^3\cos x}{dx^3}=\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d^4\cos x}{dx^4}=\cos x=\cos\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$$

u. s. w.,

also im Allgemeinen:

$$\frac{d^n\cos x}{dx^n}=D^n\cos x=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right). \qquad (6)$$

Durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtung überzeugt man sich leicht, dass diess auch so ausgedrückt werden kann: es ist

$$D^n \cos x=+\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ +\sin x,$$

je nachdem für n die Formen

$$n=4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$$

gelten.

Setzt man in den Formeln (5) und (6) ax für x, so tritt $[d(ax)]^n$

d. h. $a^n dx^n$ an die Stelle von dx^n und man bekommt dann durch beiderseitige Multiplikation mit a^n leicht die etwas allgemeineren Gleichungen:

$$D^n \sin ax = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right) \tag{7}$$

$$D^n \cos ax = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right). \tag{8}$$

IV. Die Differenziationen der cyklometrischen Funktionen reduziren sich auf die Differenziationen algebraischer Ausdrücke. Man hat nämlich

$$D \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} x = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$$

$$D \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} x = \frac{ab}{a^2 + b^2x^2}$$

und daraus folgt durch $(n-1)$malige beiderseitige Differenziation:

$$D^n \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} x = b\, D^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}\right)$$

$$D^n \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} x = ab\, D^{n-1} \left(\frac{1}{a^2 + b^2x^2}\right)$$

und wenn man die auf der rechten Seite angedeuteten Differenziationen dadurch ausführt, dass man in den Formeln (13) und (12) des vorigen Paragraphen $n-1$ für n setzt:

$$D^n \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} x = \tag{9}$$

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)\,b^n}{2^{n-1}(a^2-b^2x^2)^{n-1}\sqrt{a^2-b^2x^2}} \Big\{(a+bx)^{n-1} - \frac{1.(n-1)_1}{2n-3}(a+bx)^{n-2}(a-bx)$$

$$+ \frac{1.3.(n-1)_2}{(2n-3)(2n-5)}(a+bx)^{n-3}(a-bx)^2 \ldots \Big\}$$

und

$$D^n \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} x = \frac{(-1)^{n-1} 1.2\ldots(n-1) b^n \sin\left(n \operatorname{Arctan} \frac{a}{bx}\right)}{(a^2 + b^2x^2)^{\frac{n}{2}}}. \tag{10}$$

§ 16.

Die höheren Differenzialquotienten der Funktionen von Funktionen.

Wir haben in §. 7. gesehen, dass wenn die Funktion $F(x)$ nach dem Schema

$$F(x)=f[\varphi(x)]$$

zusammengesetzt ist und zur Abkürzung $\varphi(x)=y$ genommen wird, die Gleichung gilt

$$F'(x)=f'[y]\varphi'(x)$$

oder vermöge der Werthe von $F(x)$ und y,

$$Df[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\varphi'(x), \qquad (1)$$

wobei das Symbol $f'[\varphi(x)]$ bedeutet, dass man der Funktion f erst eine beliebige Variabele y leihen, nach dieser als unabhängiger Veränderlichen die Funktion $f(y)$ differenziren und endlich nach geschehener Differenziation $y=\varphi(x)$ setzen soll. Um jetzt die höheren Differenzialquotienten der Funktion $f[\varphi(x)]$ zu erhalten, differenziren wir nach einander die Gleichung (1); es wird dann

$$\begin{aligned} D^2f[\varphi(x)] &= f'[\varphi(x)]D\varphi'(x)+\varphi'(x)Df'[\varphi(x)] \\ &= f'[\varphi(x)]\varphi''(x)+\varphi'(x)f''[\varphi(x)]\varphi'(x) \end{aligned}$$

oder

$$D^2f[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\varphi''(x)+f''[\varphi(x)][\varphi'(x)]^2.$$

ferner:

$$\begin{aligned} D^3f[\varphi(x)] &= f'[\varphi(x)]D\varphi''(x)+\varphi''(x)Df'[\varphi(x)] \\ &\quad +f''[\varphi(x)]D[\varphi'(x)]^2+[\varphi'(x)]^2Df''[\varphi(x)] \\ &= f'[\varphi(x)]\varphi'''(x)+\varphi''(x)f''[\varphi(x)]\varphi'(x) \\ &\quad +f''[\varphi(x)]2\varphi'(x)\varphi''(x)+[\varphi'(x)]^2f'''[\varphi(x)]\varphi'(x) \end{aligned}$$

oder

$$D^3f[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\varphi'''(x)+3f''[\varphi(x)]\varphi''(x)\varphi'(x)+f'''[\varphi(x)][\varphi'(x)]^3.$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen lässt, aber es ist nicht so leicht, das allgemeine Gesetz zu entdecken, nach welchem sich irgend ein solcher beliebig aus der Reihe herausgegriffener Differentialquotient unabhängig von allen seinen Vorgängern hinschreiben liesse. Dagegen wird dieser Calcül weit eleganter, wenn man für die Funktion $\varphi(x)$ verschiedene Spezialisirungen eintreten lässt, wobei die Funktion f immer noch ganz beliebig bleiben

kann. Die bemerkenswerthesten Fälle dieser Art sind; $\varphi(x)=x\lambda$, wo λ eine ganz beliebige Grösse bedeutet, $\varphi(x)=e^x$ und $\varphi(x)=lx$, welche wir in den nächsten Paragraphen behandeln wollen.

§ 17.

Independente Bestimmung von $D^n f(x^\lambda)$.

Durch successive Differenziation der Funktion $f(x^\lambda)$ gelangt man leicht zu den folgenden Gleichungen:

$$Df(x^\lambda)=\lambda x^{\lambda-1}f'(x^\lambda)$$
$$D^2f(x^\lambda)=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}f'(x^\lambda)+\lambda^2x^{2\lambda-2}f''(x^\lambda)$$
$$D^3f(x^\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}f'(x^\lambda)+3\lambda^2(\lambda-1)x^{2\lambda-3}f''(x^\lambda)+\lambda^3x^{3\lambda-2}f'''(x^\lambda)$$

u. s. f.

Man übersieht bald aus dem Gange der Rechnung selbst, dass hierin im Allgemeinen folgendes Gesetz liegt:

$$D^n f(x^\lambda)=\overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n}f'(x^\lambda)+\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n}f''(x^\lambda)+\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda-n}f'''(x^\lambda)+\dots$$
$$\dots+\overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n}f^{(n)}(x^\lambda),$$

worin $\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \dots \overset{n}{A}_n$ gewisse constante, blos von λ und der Ordnung der Differenziation abhängige Coeffizienten bezeichnen. Man kann dafür auch schreiben:

$$D^n f(x^\lambda)=$$
$$\frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda)+\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda}f''(x^\lambda)+\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda}f'''(x^\lambda)+\dots+\overset{n}{A}_n x^{n\lambda}f^{(n)}(x^\lambda)\} \tag{1}$$

und sich, wenn man will, leicht mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ von der formellen Richtigkeit dieser Gleichung überzeugen.

Hier handelt es sich nun noch um die Bestimmung der Coeffizienten

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \dots \overset{n}{A}_n,$$

zu welcher man durch folgende Bemerkung sehr leicht gelangen kann. Die Werthe der fraglichen Coeffizienten hängen nur von λ und n, **nicht** aber von der Natur der Funktion f ab; ist man also im Stande, für irgend eine Spezialisirung der Funktion f die Werthe jener Coeffizienten zu bestimmen, so gilt dann diese Bestimmung auch im Allgemeinen für jede andere Funktion f. Die passendeste Spezialisirung dieser Art ist:

$$f(y) = (1+y)^n, \text{ also } f(x^\lambda) = (1+x^\lambda)^n, \tag{2}$$

daraus folgt für irgend eine ganze positive Zahl p:

$$f^{(p)}(y) = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1)(1+y)^{n-p},$$

oder, wenn man das aus p Faktoren bestehende Produkt $n(n-1)$.. ..$(n-p+1)$ mit $[n]^p$ bezeichnet und $y = x^\lambda$ setzt,

$$f^{(p)}(x^\lambda) = [n]^p(1+x^\lambda)^{n-p}. \tag{3}$$

Nimmt man hier $p = 1, 2, 3, \ldots. n$, so kann man alle auf der rechten Seite von der Gleichung (1) vorkommenden derivirten Funktionen angeben, wodurch man erhält:

$$D^n(1+x^\lambda)^n =$$

$$\frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_1[n]^1 x^\lambda(1+x^\lambda)^{n-1} + \overset{n}{A}_2[n]^2 x^{2\lambda}(1+x^\lambda)^{n-2} + \overset{n}{A}_3[n]^3 x^{3\lambda}(1+x^\lambda)^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + \overset{n}{A}_n[n]^n x^{n\lambda}\}. \tag{4}$$

Andererseits kann man den Werth der linken Seite auch noch auf einem anderen, von der Kenntniss des Theoremes (1) unabhängigem Wege erhalten; bezeichnet man nämlich die Coeffizienten von z, z^2, z^3 etc. in der Reihe für $(1+z)^n$ mit n_1, n_2, n_3 etc., so ist

$$(1+x^\lambda)^n$$

$$= 1 + n_1 x^\lambda + n_2 x^{2\lambda} + n_3 x^{3\lambda} + \ldots. + n_n x^{n\lambda}$$

und wenn man die Formel

$$D^n x^\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-n+1)x^{\mu-n} = [\mu]^n\frac{x^\mu}{x^n}$$

benutzt, so folgt aus dem Vorhergehenden:

$$D^n(1+x^\lambda)^n =$$

$$\frac{1}{x^n}\{n_1[\lambda]^n x^\lambda + n_2[2\lambda]^n x^{2\lambda} + n_3[3\lambda]^n x^{3\lambda} + \ldots. + n_n[n\lambda]^n x^{n\lambda}\}.$$

Vergleichen wir dies mit dem unter No. (2) gefundenen Resultate, und setzen zur Abkürzung $x^\lambda = y$, so wird

$$n_1[\lambda]^n y + n_2[2\lambda]^n y^2 + n_3[3\lambda]^n y^3 + \ldots. + n_n[n\lambda]^n y^n$$

$$= \overset{n}{A}_1[n]^1 y(1+y)^{n-1} + \overset{n}{A}_2[n]^2 y^2(1+y)^{n-2} + \overset{n}{A}_3[n]^3 y^3(1+y)^{n-3} + \ldots.$$

$$\ldots. + \overset{n}{A}_{n-1}[n]^{n-1} y^{n-1}(1+y) + \overset{n}{A}_n[n]^n y^n.$$

Aus dieser Gleichung, welche für jedes y eine blosse Identität darstellen muss, lassen sich leicht Relationen ableiten, welche zur Bestimmung der Coeffizienten

$$\overset{n}{A}_1\ ,\ \overset{n}{A}_2\ ,\ \overset{n}{A}_3\ ,\ \ldots.\ \overset{n}{A}_n$$

hinreichen. Verwandelt man nämlich die einzelnen Potenzen

$$(1+y)^{n-1}\ ,\ (1+y)^{n-2}\ ,\ (1+y)^{n-3}\ ,\ \ldots.$$

in Reihen, welche nach Potenzen von y fortschreiten, so ist:

$$\begin{aligned}
& n_1\overset{n}{[\lambda]}y+n_2\overset{n}{[2\lambda]}y^2+n_3\overset{n}{[3\lambda]}y^3+\ldots\ldots+n_n\overset{n}{[n\lambda]}y^n \\
=\ & \overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}\{y+(n-1)_1\,y^2+(n-1)_2\,y^3+\ldots\ldots+(n-1)_{n-1}\,y^n\} \\
+\ & \overset{n}{A}_2\overset{2}{[n]}\{y^2+(n-2)_1\,y^3+(n-2)_2 y^4+\ldots\ldots+(n-2)_{n-2}y^n\} \\
+\ & \overset{n}{A}_3\overset{3}{[n]}\{y^3+(n-3)_1\,y^4+(n-3)_2 y^5+\ldots\ldots+(n-3)_{n-3}y^n\} \\
+\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
+\ & \overset{n}{A}_{n-1}\overset{n-1}{[n]}\{y^{n-1}+1_1 y^n\} \\
+\ & \overset{n}{A}_n\overset{n}{[n]}y^n
\end{aligned}$$

Ordnet man hier die verschiedenen Glieder nach Potenzen von x, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
& n_1\overset{n}{[\lambda]}y+n_2\overset{n}{[2\lambda]}y^2+n_3\overset{n}{[3\lambda]}y^3+\ldots\ldots+n_n\overset{n}{[n\lambda]}y^n \\
=\ & \overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}y \\
+\ & \{\overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}(n-1)_1+\overset{n}{A}_2\overset{2}{[n]}\}y^2 \\
+\ & \{\overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}(n-1)_2+\overset{n}{A}_2\overset{2}{[n]}(n-2)_1+\overset{n}{A}_3\overset{3}{[n]}\}y^3 \\
+\ & \{\overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}(n-1)_3+\overset{n}{A}_2\overset{2}{[n]}(n-2)_2+\overset{n}{A}_3\overset{3}{[n]}(n-3)_1+\overset{n}{A}_4\overset{4}{[n]}\}y^4 \\
+\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
+\ & \{\overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}(n-1)_{n-1}+\overset{n}{A}_2\overset{2}{[n]}(n-2)_{n-2}+\ldots.+\overset{n}{A}_{n-1}\overset{n-1}{[n]}\overset{1}{1}_1+\overset{n}{A}_n\overset{n}{[n]}\}y^n.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige y eine rein identische sein muss, so ist nöthig, dass die Coeffizienten gleicher Potenzen von y selbst identisch sind, dass also folgende Gleichungen gelten:

$$n_1\overset{n}{[\lambda]}=\overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}$$

$$n_2\overset{n}{[2\lambda]}=\overset{n}{A}_1\overset{1}{[n]}(n-1)_1+\overset{n}{A}_2\overset{2}{[n]}$$

$$n_3[3\lambda]^{n} = \overset{n}{A}_1 [n]^{1}(n-1)_2 + \overset{n}{A}_2 [n]^{2}(n-2)_1 + \overset{n}{A}_3 [n]^{3}$$
$$n_4[4\lambda]^{n} = \overset{n}{A}_1 [n]^{1}(n-1)_3 + \overset{n}{A}_2 [n]^{2}(n-2)_2 + \overset{n}{A}_3 [n]^{3}(n-3)_1 + \overset{n}{A}_4 [n]^{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n_n[n\lambda]^{n} = \overset{n}{A}_1 [n]^{1}(n-1)_{n-1} + \overset{n}{A}_2 [n]^{2}(n-2)_{n-2} + \dots + \overset{n}{A}_{n-1} [n]^{n-1} 1_1 + \overset{n}{A}_n [n]^{n}.$$

Setzt man für jeden Binomialkoeffizienten seinen Werth nach der Formel

$$m_q = \frac{m(m-1)\dots(m-q+1)}{1.2\dots q}.$$

und für $[n]^{1}$, $[n]^{2}$, $[n]^{3}$ etc. ihre Werthe n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$ etc., so erkennt man, dass sich die erste Gleichung durch n aufdiviren lässt, die zweite durch $n(n-1)$, die dritte durch $n(n-1)(n-2)$ etc., die letzte durch $n(n-1)\dots2.1$. Nach Ausführung dieser Divisionen bleibt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{[\lambda]^{n}}{1} &= \overset{n}{A}_1 \\
\frac{[2\lambda]^{n}}{1.2} &= \frac{1}{1}\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2 \\
\frac{[3\lambda]^{n}}{1.2.3} &= \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_3 \\
\frac{[4\lambda]^{n}}{1.2.3.4} &= \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_2 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{[n\lambda]^{n}}{1.2.3\dots n} &= \frac{1}{1.2\dots(n-1)}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2\dots(n-2)}\overset{n}{A}_2 + \dots + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_{n-1} + \overset{n}{A}_n.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese n Gleichungen reichen hin, um die n Unbekannten

$$\overset{n}{A}_1 , \overset{n}{A}_2 , \overset{n}{A}_3 , \dots \overset{n}{A}_n$$

zu bestimmen. Da wir später noch eine ähnliche Aufgabe zu behandeln haben werden, so schalten wir hier die Lösung des folgenden etwas allgemeineren Problemes ein:

„Seien k_1, k_2, k_3, ... k_n bekannte, x_1, x_2, x_3, ... x_n unbekannte Grössen und zwischen beiden die Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{k_1}{1}=x_1\\
&\frac{k_2}{1.2}=\frac{x_1}{1}+x_2\\
&\frac{k_3}{1.2.3}=\frac{x_1}{1.2}+\frac{x_2}{1}+x_3\\
&\frac{k_4}{1.2.3.4}=\frac{x_1}{1.2.3}+\frac{x_2}{1.2}+\frac{x_3}{1}+x_4\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{k_n}{1.2....n}=\frac{x_1}{1.....(n-1)}+\frac{x_2}{1.2....(n-2)}+....+\frac{x_{n-1}}{1}+x_n
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

man soll hieraus die Unbekannten eliminiren."

Wollte man irgend eine der Unbekannten, etwa x_p, wo p eine der Zahlen $1, 2, \dots n$ ist, bestimmen, so könnte man hierzu folgenden Weg einschlagen: Man schreibe die p Gleichungen hin:

$$\begin{aligned}
&\frac{k_1}{1}=x_1\\
&\frac{k_2}{1.2}=\frac{x_1}{1}+x_2\\
&\frac{k_3}{1.2.3}=\frac{x_1}{1.2}+\frac{x_2}{1}+x_3\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{k_p}{1.2\dots p}=\frac{x_1}{1.2\dots(p-1)}+\frac{x_2}{1.2\dots(p-2)}+\dots+\frac{x_{p-1}}{1}+x_p
\end{aligned}$$

dann kommt x_p nur in der letzten vor; substituirt man also jede Gleichung in die nächstfolgende, so muss man zuletzt x_p erhalten. Um jedoch den mit diesem Verfahren nothwendig verbundenen Umständlichkeiten zu entgehen, wollen wir eine andere viel expeditivere Methode anwenden. Wir multipliziren nämlich die erste, zweite, dritte Gleichung u. s. f. mit den correspondirenden Faktoren:

$$\frac{p_1}{2.3\dots p},\quad \frac{p_2}{3.4\dots p},\quad \frac{p_3}{4.5\dots p},\quad \dots\quad \frac{p_{p-1}}{p},\quad p_p,$$

und nehmen hierauf Alles mit wechselnden Vorzeichen zusammen; es ergiebt sich so

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{k_1}{1}\frac{p_1}{2.3\ldots p}-\frac{k_2}{1.2}\frac{p_2}{3.4\ldots p}+\frac{k_3}{1.2.3}\frac{p_3}{4.5\ldots p}-\ldots.\\
&=x_1\left\{\frac{p_1}{2.3\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_2}{3.4\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_3}{4.5\ldots p}-\ldots\right\}\\
&-x_2\left\{\frac{p_2}{3.4\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_3}{4.5\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_4}{5.6\ldots p}-\ldots\right\}\\
&+x_3\left\{\frac{p_3}{4.5\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_4}{5.6\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_5}{6.7\ldots p}-\ldots\right\}\\
&-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad+(-1)^p x_{p-1}\left\{\frac{p_{p-1}}{p}-\frac{1}{1}p_p\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad+(-1)^{p+1}x_p\,p_p.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Sämmtliche hier vorkommende Horizontalreihen stehen unter folgender allgemeinen Form:

$$(-1)^{q+1}x_q\left\{\frac{p_q}{(q+1)\ldots p}-\frac{1}{1}\frac{p_{q+1}}{(q+2)\ldots p}+\frac{1}{1.2}\frac{p_{q+2}}{(q+3)\ldots p}-\ldots,\right\}$$

in welcher q eine ganze positive Zahl bedeutet, und gehen daraus hervor, wenn man q nach einander $=1, 2,\ldots p$ setzt. Diese allgemeine Reihe ist auch gleich der folgenden:

$$\frac{(-1)^{q+1}x_q}{(q+1)\ldots p}\left\{p_q-\frac{q+1}{1}p_{q+1}+\frac{(q+1)(q+2)}{1.2}p_{q+2}-\ldots\right\}$$

Bemerkt man, dass

$$p_{q+1}=\frac{p-q}{q+1}p_q\,,\ p_{p+2}=\frac{(p-q)(p-q-1)}{(q+1)(q+2)}p_q,\ \ldots$$

ist, so geht dieselbe über in

$$\frac{(-1)^{q+1}p_q x_q}{(q+1)\ldots p}\left\{1-\frac{p-q}{1}+\frac{(p-q)(p-q-1)}{1.2}-\ldots\right\}$$

Die eingeklammerte Reihe ist aber die der Binomialkoeffizienten des Exponenten $p-q$, nämlich

$$(p-q)_0-(p-q)_1+(p-q)_2-\ldots$$

und ihre Summe ist bekanntlich Null, sobald $p-q$ selbst nicht Null, also q von p verschieden ist, dagegen der Einheit gleich, sobald $q=p$, weil sich dann die Reihe auf ihr erstes Glied reduzirt. Es verschwinden also in der Gleichung (7) alle diejenigen Horizontalreihen, in welchen die Indices von x kleiner als p sind, und es bleibt nur ein einziges Glied stehen, nämlich das letzte. Da $p_p = 1$, so folgt nun

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\{k_1 p_1 - k_2 p_2 + k_3 p_3 - \ldots + (-1)^{p+1} k_p p_p\} = (-1)^{p+1} x_p, \quad (8)$$

wofür man auch bei umgekehrter Anordnung der Reihe unter der Bemerkung, dass $p_p = 1$, $p_{p-1} = p_1$, $p_{p-2} = p_2$ etc. ist, schreiben kann

$$x_p = \frac{1}{1.2.3\ldots p}\{k_p - p_1 k_{p-1} + p_2 k_{p-2} - \ldots + (-1)^{p+1} p_{p-1} k_1\}, \quad (9)$$

womit der Werth irgend einer Unbekannten gefunden ist. Die n Unbekannten, welche den n Gleichungen sub no. (6) genügen, erhält man folglich, wenn man in einer der Formeln (8) oder (9) für p der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots n$ setzt.

Nach dieser Digression kehren wir wieder zu der Aufgabe zurück, aus den Gleichungen unter no. (5) die Werthe der n mit A bezeichneten Coeffizienten zu bestimmen. Dieselbe ist nur derjenige spezielle unseres so eben behandelten allgemeineren Problemes, in welchem man überhaupt

$$k_p = [p\lambda]^n, \quad x_p = \overset{n}{A}_p$$

setzt, woraus sich nach den Formeln (8) und (9) ergiebt

$$\overset{n}{A}_p = \frac{(-1)^{p+1}}{1.2\ldots p}\{p_1[\lambda]^n - p_2[2\lambda]^n + p_3[3\lambda]^n - \ldots\} \quad (10)$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots p}\{[p\lambda]^n - p_1[\overline{p-1}\,\lambda]^n + p_2[\overline{p-2}\,\lambda]^n - \ldots\} \quad (11)$$

Will man statt der Symbole $[\lambda]^n$, $[2\lambda]^n, \ldots [\overline{p-1}\,\lambda]^n$, $[p\lambda]^n$ lieber Binomialkoeffizienten sehen, was für die numerische Rechnung desswegen bequemer ist, weil man für die Binomialkoefficienten Tafeln besitzt, so bemerke man, dass überhaupt

$$[\mu]^n = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1) = 1.2.3\ldots n.\mu_n$$

ist, woraus folgt

$$\overset{n}{A}_p = \frac{(-1)^{p+1}1.2\ldots n}{1.2.3\ldots p}\{p_1\lambda_n - p_2(2\lambda)_n + p_3(3\lambda)_n - \ldots\} \quad (12)$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p}\{(p\lambda)_n - p_1(\overline{p-1}\,\lambda)_n + p_2(\overline{p-2}\,\lambda)_n - \ldots\} \quad (13)$$

Für die hierdurch bestimmten Werthe der Grössen

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \ldots \overset{n}{A}_n$$

ist nun nach no. (1)

$$D^n f(x^\lambda) = \qquad (14)$$

$$\frac{1}{x^n}\left\{ \overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \overset{n}{A}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda) \right\}$$

womit unser Problem gelöst ist.

Wählt man die Funktion f so, dass man die derivirten Funktionen $f'(y)$, $f''(y)$, ... $f^{(n)}(y)$, mithin auch $f'(x^\lambda)$, $f''(x^\lambda)$,...$f^{(n)} x(^\lambda)$ unmittelbar angeben kann, so gelangt man mittelst der obigen Relationen immer zu völlig entwickelten Formeln.

§ 18.

Beispiele für das allgemeine Theorem im vorigen Paragraphen.

Für die Anwendungen des Theoremes (14) im vorigen Paragraphen ist es bequem, eine kleine Umänderung hinsichtlich des $\overset{n}{A}_p$ vorzunehmen. Setzt man nämlich

$$\overset{n}{E}_p = \overset{n}{[p\lambda]} - p_1 \overset{n}{[\overline{p-1}\lambda]} + p_2 \overset{n}{[\overline{p-2}\lambda]} - \ldots \qquad (1)$$

oder

$$\overset{n}{E}_p = 1.2\ldots n \{ (p\lambda)_n - p_1 (\overline{p-1}\lambda)_n + p_2 (\overline{p-2}\lambda)_n - \ldots \} \qquad (2)$$

so wird

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots p} \overset{n}{E}_p$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} D^n f(x^\lambda) = \frac{1}{x^n}\Big\{ \frac{1}{1} \overset{n}{E}_1\, x^\lambda f'(x^\lambda) + \frac{1}{1.2} \overset{n}{E}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \frac{1}{1.2.3} \overset{n}{E}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{1.2.3..n} \overset{n}{E}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda). \end{aligned}\right\} (3)$$

Als Beispiele sind folgende Annahmen von Interesse.

I. Es sei $f(y) = (a+y)^\mu$ folglich

$$f^{(p)}(y) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)(a+y)^{\mu-p},$$

so findet man

$$\frac{1}{1.2..p} \overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}$$

und

$$\frac{1}{1.2..p}\overset{n}{E}_p x^{p\lambda} f^{(p)}(x^\lambda) = (a+x^\lambda)^\mu \mu_p \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^p,$$

folglich

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu = \tag{4}$$
$$\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{a^n}\left\{\mu_1 \overset{n}{E}_1 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) + \mu_2 \overset{n}{E}_2 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \ldots + \mu_n \overset{n}{E}_n \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\}$$

ein durch seine Eleganz bemerkenswerthes Resultat.

II. Für $f(y) = e^y$ wird auch

$$f^{(p)}(y) = e^y \quad , \quad f^{(p)}(x^\lambda) = e^{x^\lambda},$$

mithin

$$\left.\begin{array}{c} D^n (e^{x^\lambda}) = \\ \frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{E}_1 \frac{x^\lambda}{1} + \overset{n}{E}_2 \frac{x^{2\lambda}}{1.2} + \ldots + \overset{n}{E}_n \frac{x^{n\lambda}}{1.3..n}\right\} e^{x^\lambda}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

III. Wenn $f(y) = l(a+y)$ genommen wird, ergiebt sich

$$f^{(p)}(y) = \frac{1.2.3\ldots(p-1)}{(a+y)^p}(-1)^{p-1},$$

folglich

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p x^{p\lambda} f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{1}{p}\overset{n}{E}_p \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^p$$

und hiernach wird

$$\left.\begin{array}{c} D^n\, l(a+x^\lambda) = \\ \frac{1}{x^n}\left\{\frac{1}{1}\overset{n}{E}_1 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) - \frac{1}{2}\overset{n}{E}_2 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \ldots \pm \frac{1}{1}\overset{n}{E}_n \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

IV. Man kann aus den hier entwickelten Formeln auch leicht Eigenschaften der Coeffizienten $\overset{n}{E}_1$, $\overset{n}{E}_2$ etc. ableiten, sobald man die Funktion f so weit spezialisirt, dass sich der Werth von $D^n f(x^\lambda)$ auf der linken Seite ganz unmittelbar angeben lässt. Diess ist z. B. in Formel (4) für $a=0$ der Fall; dann steht auf der linken Seite:

$$D^n x^{\lambda\mu} = \lambda\mu(\lambda\mu-1)\ldots(\lambda\mu-n+1)\, x^{\lambda\mu-n},$$

worauf nach beiderseitiger Hebung mit $x^{\lambda\mu-n}$ die Relation folgt:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda\mu(\lambda\mu-1)\ldots(\lambda\mu-n+1) \\ = \mu_1 \overset{n}{E}_1 + \mu_2 \overset{n}{E}_2 + \mu_3 \overset{n}{E}_3 + \ldots + \mu_n \overset{n}{E}_n. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Ebenso leicht erhält man aus no. (6) für $a=0$ die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{n-1}\lambda.1.2.3\ldots(n-1)\\ =\frac{1}{1}\overset{n}{E}_1-\frac{1}{2}\overset{n}{E}_2+\frac{1}{3}\overset{n}{E}_3-\ldots\pm\frac{1}{n}\overset{n}{E}_n\end{array}\right\}\qquad(8)$$

die man auch dadurch aus der Relation (7) ableiten kann, dass man beiderseits mit μ dividirt und darauf zur Gränze für unbegränzt abnehmende μ übergeht.

V. Noch haben wir zu erwähnen, dass die Formel (4) einer Transformation fähig ist, wodurch sie in eine für den praktischen Gebrauch oft bequemere Gestalt übergeführt wird. Diese Umformung beruht hauptsächlich auf dem folgenden Satze: wenn für ein ganzes positives s der Ausdruck

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-s+1)}{1.2.3\ldots s},$$

wie bisher immer mit μ_s bezeichnet wird, so lässt sich für ein ganzes positives ν aber völlig beliebige α und β die Summe der Reihe

$$\alpha_\nu\beta_0+\alpha_{\nu-1}\beta_1+\alpha_{\nu-2}\beta_2+\ldots+\alpha_1\beta_{\nu-1}+\alpha_0\beta_\nu\qquad(9)$$

wieder durch eine Grösse der obigen Form ausdrücken. Zunächst beachte man nämlich folgende identische Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}&=\frac{\alpha-\nu}{\nu+1}+\frac{\beta}{\nu+1}\\ &=\frac{\alpha-\overline{\nu-1}}{\nu+1}+\frac{\beta-1}{\nu+1}\\ &=\frac{\alpha-\overline{\nu-2}}{\nu+1}+\frac{\beta-2}{\nu+1}\\ &\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &=\frac{\alpha-1}{\nu+1}+\frac{\beta-\overline{\nu-1}}{\nu+1}\\ &=\frac{\alpha}{\nu-1}+\frac{\beta-\nu}{\nu+1}\end{aligned}$$

und multiplizire nun die Reihe in (9), deren Summe γ_ν heissen möge, mit der Grösse $\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}$, wobei man im ersten Gliede die erste Form dieses Quotienten, im zweiten Gliede die zweite Form u. s. f. anwendet. Man erhält so

$$\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu = \frac{\alpha-\nu}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_0 + \frac{\beta}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_0$$
$$+\frac{\alpha-\overline{\nu-1}}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_1 + \frac{\beta-1}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_1$$
$$+\frac{\alpha-\overline{\nu-2}}{\nu+1}\alpha_{\nu-2}\beta_2 + \frac{\beta-1}{\nu+1}\alpha_{\nu-2}\beta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{\alpha-1}{\nu+1}\alpha_1\beta_{\nu-1} + \frac{\beta-\overline{\nu-1}}{\nu+1}\alpha_1\beta_{\nu-1}$$
$$+\frac{\alpha}{\nu+1}\alpha_0\beta_\nu + \frac{\beta-\nu}{\nu+1}\alpha_0\beta_\nu.$$

Nach der Definition von μ_s ist aber

$$\frac{\mu-s}{s+1}\mu_s=\mu_{s+1} \text{ oder } (\mu-s)\mu_s=(s+1)\mu_{s+1}$$

und diese Formel kann man hier in jedem Gliede anwenden, in der ersten Colonne nämlich der Reihe nach für $\mu=\alpha$, $s=\nu$, $\nu-1$, $\nu-2$, ..1,0 und in der zweiten für $\mu=\beta$, $s=0$, 1, 2, ... ν. So erhält man

$$\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu=\alpha_{\nu+1}\beta_0+\frac{1}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_1$$
$$+\frac{n}{\nu+1}\alpha_\nu\beta_1 + \frac{2}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_2$$
$$+\frac{n-1}{\nu+1}\alpha_{\nu-1}\beta_2 + \frac{3}{\nu+1}\alpha_{\nu-2}\beta_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{2}{\nu+1}\alpha_2\beta_{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu+1}\alpha_1\beta_\nu$$
$$+\frac{1}{\nu+1}\alpha_1\beta_\nu + \alpha_0\beta_{\nu+1},$$

und wenn man die Glieder mit gleichen Faktoren vereinigt

$$\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu$$
$$=\alpha_{\nu+1}\beta_0+\alpha_\nu\beta_1+\alpha_{\nu-1}\beta_2+\ldots+\alpha_1\beta_\nu+\alpha_0\beta_{\nu-1}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite unterscheidet sich aber von der in no. (9) nur dadurch, dass hier $\nu+1$ steht, wo dort ν; ihre Summe muss demnach mit $\gamma_{\nu+1}$ bezeichnet werden, so dass jetzt

$$\gamma_{\nu+1}=\frac{\alpha+\beta-\nu}{\nu+1}\gamma_\nu$$

ist. Schreibt man für ν der Reihe nach 0, 1, 2, ... $\nu-1$, so erhält man die folgenden Relationen

$$\gamma_1=\frac{\alpha+\beta}{1}\gamma_0.$$

$$\gamma_2=\frac{\alpha+\beta-1}{2}\gamma_1$$

$$\gamma_3=\frac{\alpha+\beta-2}{3}\gamma_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\gamma_\nu=\frac{\alpha+\beta-\nu-1}{\nu}\gamma_{\nu-1}$$

und durch Multiplikation aller dieser Gleichungen nach Hebung von $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{\nu-1}$

$$\gamma_\nu=\frac{\alpha+\beta}{1}\cdot\frac{\alpha+\beta-1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-2}{3}\cdots\frac{\alpha+\beta-\overline{\nu-1}}{\nu}\gamma_0.$$

Nun reduzirt sich aber die Reihe (9) für $\nu=0$ auf ihr erstes Glied $\alpha_0\beta_0=1$, mithin ist $\gamma_0=1$ und somit γ_ν bestimmt. Da diese Faktorenfolge offenbar nach der Analogie von μ_s mit $(\alpha+\beta)_\nu$ bezeichnet werden kann, so ergiebt sich jetzt das sehr wichtige Theorem

$$\alpha_\nu\beta_0+\alpha_{\nu-1}\beta_1+\alpha_{\nu-2}\beta_2+\cdots+\alpha_1\beta_{\nu-1}+\alpha_0\beta_\nu$$
$$=(\alpha+\beta)_\nu. \qquad (10).$$

Dasselbe lässt sich noch in einer etwas anderen Gestalt darstellen, wenn man α negativ nimmt und bemerkt, dass überhaupt immer

$$(-\mu)_s=(-1)^s\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+s-1)}{1.2.3\ldots s}$$
$$=(-1)^s\frac{(\mu+s-1)(\overline{\mu+s-1}-1)(\overline{\mu+s-1}-2)\cdots(\overline{\mu+s-1}-\overline{s-1})}{1.2.3\ldots s}$$

oder

$$(-\mu)_s=(-1)^s(\mu+s-1)_s$$

ist. Man erhält nämlich

$$(-1)^\nu\{(\alpha+\nu-1)_\nu\beta_0-(\alpha+\nu-2)_{\nu-1}\beta_1+(\alpha+\nu-3)_{\nu-2}\beta_2-\cdots\}$$
$$=(-\alpha+\beta)_\nu$$

oder weil $(-\alpha+\beta)_\nu=(-\overline{\alpha-\beta})_\nu=(-1)^\nu(\alpha-\beta+\nu-1)_\nu$ ist, wenn man beiderseits $\alpha+1$ für α setzt,

$$(\alpha+\nu)_\nu \beta_0 - (\alpha+\nu-1)_{\nu-1} \beta_1 + (\alpha+\nu-2)_{\nu-2} \beta_2 - \ldots \pm \alpha_0 \beta_\nu = (\alpha-\beta+\nu)_\nu \qquad (11)$$

und von diesem Satze werden wir nun sogleich Gebrauch machen.

Der Zweck der Transformation, welche wir mit der Gleichung (4) vornehmen wollen, besteht darin, alle Grössen, welche auf der rechten Seite vorkommen, über gleichen Nenner zu bringen, so dass innerhalb der Parenthese nur eine nach Potenzen von x^λ fortschreitende Reihe übrig bleibt. Wir stellen daher die Gleichung selbst in folgende Form:

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu \qquad (12)$$

$$= \frac{(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n} \left\{ \mu_1 \overset{n}{E}_1 x^\lambda (a+x^\lambda)^{n-1} + \mu_2 \overset{n}{E}_2 x^{2\lambda} (a+x^\lambda)^{n-2} + \mu_3 \overset{n}{E}_3 x^{3\lambda} (a+x^\lambda)^{n-3} + \ldots + \mu_n \overset{n}{E}_n x^{n\lambda} \right\}$$

und entwickeln die einzelnen Potenzen mit Hülfe des binomischen Satzes. Die Reihe innerhalb der Parenthese wird dann gleich

$$\begin{aligned} &\mu_1 \overset{n}{E}_1 [(n-1)_0 a^{n-1} x^\lambda + (n-1)_1 a^{n-2} x^{2\lambda} + (n-1)_2 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots] \\ &\quad + \mu_2 \overset{n}{E}_2 [(n-2)_0 a^{n-2} x^{2\lambda} + (n-2)_1 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots] \\ &\quad\quad + \mu_3 \overset{n}{E}_3 [(n-2)_0 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots] \\ &\quad\quad\quad + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Nimmt man alle Glieder in vertikaler Richtung zusammen, so kann man dieselben in folgende Form bringen:

$$\overset{n}{G}_1 a^{n-1} x^\lambda + \overset{n}{G}_2 a^{n-2} x^{2\lambda} + \overset{n}{G}_3 a^{n-3} x^{3\lambda} + \ldots.$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$\begin{aligned} \overset{n}{G}_1 &= \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_0 \\ \overset{n}{G}_2 &= \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_1 + \mu_2 \overset{n}{E}_2 (n-2)_0 \\ \overset{n}{G}_3 &= \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_2 + \mu_2 \overset{n}{E}_2 (n-2)_1 + \mu_3 \overset{n}{E}_3 (n-3)_0 \end{aligned}$$

u. s. f.

Nach Nr. (12) haben wir nun

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu$$

$$= \frac{(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n} \left\{ \overset{n}{G}_1 a^{n-1} x^\lambda + \overset{n}{G}_2 a^{n-2} x^{2\lambda} + \ldots + \overset{n}{G}_n a^0 x^{n\lambda} \right\} \qquad (13)$$

Die mit G bezeichneten Coeffizienten können übrigens in einer kürzeren Form dargestellt werden; nach den vorhergehenden Gleichungen hat man nämlich für ein ganzes positives p:

$$\overset{n}{G}_p = \mu_1 \overset{n}{E}_1 (n-1)_{p-1} + \mu_2 \overset{n}{E}_2 (n-2)_{p-2} + \mu_3 \overset{n}{E}_3 (n-3)_{p-3} + \dots,$$

wobei man die Reihe nur soweit fortzusetzen braucht, bis sie von selbst abbricht, was mit dem Gliede $(n-p)_{p-p}$ der Fall ist. Schreibt man die Reihe in umgekehrter Ordnung, so wird

$$\overset{n}{G}_p = \mu_p \overset{n}{E}_p (n-p)_0 + \mu_{p-1} \overset{n}{E}_{p-1} (n-p+1)_1 + \mu_{p-2} \overset{n}{E}_{p-2} (n-p+2)_2 + \dots,$$

und wenn man für die mit E bezeichneten Grössen ihre Werthe setzt:

$$\begin{aligned}\overset{n}{G}_p = \; & \mu_p (n-p)_0 \{ p_0 [p\lambda]^{n} - p_1 [\overline{p-1}\lambda]^{n} + p_2 [\overline{p-2}\lambda]^{n} - \dots \} \\ & + \mu_{p-1} (n-p+1)_1 \{ (p-1)_0 [\overline{p-1}\lambda]^{n} - (p-1)_1 [\overline{p-2}\lambda]^{n} + \dots \} \\ & + \mu_{p-2} (n-p+2)_2 \{ (p-2)_0 [\overline{p-2}\lambda]^{n} - \dots \} \\ & + \dots\dots\dots\end{aligned}$$

Addirt man hier in vertikaler Richtung und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} g_0 &= \mu_p (n-p)_0 p_0 \\ g_1 &= \mu_{p-1} (n-p+1)_1 (p-1)_0 - \mu_p (n-p)_0 p_1 \\ g_2 &= \mu_{p+2} (n-p+2)_2 (p-2)_0 - \mu_{p-1} (n-p+1)_1 (p-1)_1 + \mu_p (n-p)_0 p_2 \end{aligned}$$

u. s. f.,

so ist

$$\overset{n}{G}_p = g_0 [p\lambda]^{n} + g_1 [\overline{p-1}\lambda]^{n} + g_2 [\overline{p-2}\lambda]^{n} + \dots\dots \qquad (14)$$

Die mit g bezeichneten Grössen stehen hierbei unter der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} g_\nu = \; & \mu_{p-\nu} (n-p+\nu)_\nu (p-\nu)_0 - \mu_{p-\nu+1} (n-p+\nu-1)_{\nu-1} (p-\nu+1)_1 \\ & + \mu_{p-\nu+2} (n-p+\nu-2)_{\nu-2} (p-\nu+2)_2 - \dots \end{aligned}$$

Drückt man hier $\mu_{p-\nu+1}$, $\mu_{p-\nu+2}$ etc. durch $\mu_{p-\nu}$ aus, indem

$$\mu_{p-\nu+1} = \mu_{p-\nu} \cdot \frac{\mu-p+\nu}{p-\nu+1},$$

$$\mu_{p-\nu+2} = \mu_{p-\nu} \cdot \frac{\mu-p+\nu}{p-\nu+1} \cdot \frac{\mu-p+\nu-1}{p-\nu+2}$$

etc.

ist und setzt für $(p-\nu+1)_1$, $(p-\nu+2)_2$ etc. ihre Werthe, so erhält man sehr leicht:

$$g_\nu = \mu_{p-\nu} \{ (n-p+\nu)_\nu (\mu-p+\nu)_0 - (n-p+\nu-1)_{\nu-1} (\mu-p+\nu)_1 + (n-p+\nu-2)_{\nu-2} (\mu-p+\nu)_2 - \dots \},$$

d. i. nach Formel (11) für

$$\alpha = n-p \ , \ \beta = \mu - p + \nu,$$
$$g_\nu = \mu_{p-\nu} (n-\mu)_\nu.$$

Demgemäss geht die Gleichung (14) über in

$$\overset{n}{G}_p = (n-\mu)_0 \mu_p [p\lambda]^n + (n-\mu)_1 \mu_{p-1} [\overline{p-1\lambda}]^n + (n-\mu)_2 \mu_{p-2} [\overline{p-2\lambda}]^n + \dots \quad (15)$$

und für die so bestimmten Werthe von $\overset{n}{G}_1$, $\overset{n}{G}_2$ etc. haben wir, wie schon früher

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu \quad (16)$$
$$= \frac{(a+x^\lambda)^{\mu-n}}{x^n} \left\{ \overset{n}{G}_1 a^{n-1} x^\lambda + \overset{n}{G}_2 a^{n-2} x^{2\lambda} + \dots + \overset{n}{G}_n a^0 x^{n\lambda} \right\}$$

und hierin eine ebenso elegante als brauchbare Formel.

§ 19.

Reduktion des allgemeinen Theoremes in §. 17. für einige spezielle Fälle.

Es giebt einige besondere Werthe von λ, für welche sich die Reihe

$$p_1 \lambda_n - p_2 (2\lambda)_n + p_3 (3\lambda)_n - \dots \quad (1)$$

die zur Bestimmung des Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ dient, summiren lässt, wodurch sich dann eben so viel spezielle, aber wesentlich einfachere Formeln für $D^n f(x^\lambda)$ ergeben. Es würde aber zu weit führen, hier die Summirung der Reihe (1) in den besonderen Fällen vollständig zu entwickeln, da dieselbe oft auf sehr fern liegenden Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ganzer, gebrochener und negativer Exponenten beruht und es wird dagegen die Mittheilung der Resultate genügen, sobald man den Nachweis hinzuliefert, dass dieselben in der That richtig sind. Zu einer Controle über Angaben der Art kann man aber sehr leicht gelangen, wenn man zwei auf einander folgende Differenzialquotienten,

etwa $D^n f(x^\lambda)$ und $D^{n+1} f(x^\lambda)$ betrachtet, wobei es jedoch vortheilhaft ist, die Reihe in No. (24) §. 17. in umgekehrter Ordnung darzustellen. Dann wäre also

$$D^n f(x^\lambda) = \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x^n}\{\overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda) + \overset{n}{A}_{n-1} x^{(n-1)\lambda} f^{(n-1)}(x^\lambda) + \overset{n}{A}_{n-2} x^{(n-2)\lambda} f^{(n-2)}(x^\lambda) + \dots\}$$

und ganz entsprechend

$$D^{n+1} f(x^\lambda) = \qquad (3)$$

$$\frac{1}{x^{n+1}}\{\overset{n+1}{A}_{n+1} x^{(n+1)\lambda} f^{(n+1)}(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_{n+1} x^{(n-1)\lambda} f^{(n-1)}(x^\lambda) + \dots\}$$

Andererseits entspringt $D^{n+1} f(x^\lambda)$ aus $D^n f(x^\lambda)$ durch Differenziation des letzteren Ausdrucks und folglich muss auch der Differenzialquotient der Gleichung (2) mit Nr. (3) identisch sein. Jenen Differenzialquotienten findet man aber sehr leicht, wenn man die Division mit x^n gliedweis ausführt und darauf jedes einzelne Glied nach der Formel für die Differenziation der Produkte differenzirt; es ergiebt sich so:

$$\begin{aligned} D^{n+1} f(x^\lambda) &= \lambda \overset{n}{A}_n x^{n\lambda - n + \lambda - 1} f^{(n+1)}(x^\lambda) + (n\lambda - n) \overset{n}{A}_n x^{n\lambda - n - 1} f^{(n)}(x^\lambda) \\ &+ \lambda \overset{n}{A}_{n-1} x^{(n-1)\lambda - n + \lambda - 1} f^{(n)}(x^\lambda) + (\overline{n-1}\lambda - n) \overset{n}{A}_{n-1} x^{(n-1)\lambda - n - 1} f^{(n-1)}(x^\lambda) \\ &+ \lambda \overset{n}{A}_{n-2} x^{(n-2)\lambda - n + \lambda - 1} f^{(n-1)}(x^\lambda) + (\overline{n-2}\lambda - n) \overset{n}{A}_{n-2} x^{(n-2)\lambda - n - 2} f^{(n-2)}(x^\lambda) \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

d. i., wenn man die Glieder mit gleichen Faktoren zusammennimmt,

$$D^{n+1} f(x^\lambda) =$$

$$\frac{1}{x^{n+1}}\{\lambda \overset{n}{A}_n x^{(n+1)\lambda} f^{(n+1)}(x^\lambda) + [(n\lambda - n)\overset{n}{A}_n + \lambda \overset{n}{A}_{n-1}] x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)$$

$$+ [(\overline{n-1}\lambda - n)\overset{n}{A}_{n-1} + \lambda \overset{n}{A}_{n-2}] x^{(n-1)\lambda} f^{(n-1)}(x^\lambda) + \dots\}$$

mit Nr. (3) verglichen giebt diess

$$\begin{aligned} \overset{n+1}{A}_{n+1} &= \lambda \overset{n}{A}_n \\ \overset{n+1}{A}_n &= (n\lambda - n)\overset{n}{A}_n + \lambda \overset{n}{A}_{n-1} \\ \overset{n+1}{A}_{n-1} &= (\overline{n-1}\lambda - n)\overset{n}{A}_{n-1} + \lambda \overset{n}{A}_{n-2} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

und überhaupt wenn q eine ganze positive Zahl bezeichnet

$$\overset{n+1}{A}_{n-q}=(\overline{n-q}\lambda-n)\overset{n}{A}_{n-q}+\lambda\overset{n}{A}_{n-q-1} \qquad (4)$$

Hierin spricht sich ganz allgemein das Gesetz aus, nach welchem die Coeffizienten der Ordnung $n+1$ aus denen der Ordnung n zusammenzusetzen und diese Relation (sogen. Rekursionsformel) bildet zugleich den Probirstein für einen etwaigen kürzeren Ausdruck des Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ oder $\overset{n}{A}_{n-q}$, den man durch Summirung der Reihe (1) gefunden haben könnte. Die speziellen Fälle nun, in denen es glückte die Reihe in (1) zu summiren, sind $\lambda=-1$, $\lambda=2$, $\lambda=\frac{1}{2}$; es fand sich nämlich

I. Für $\lambda=-1$

$$\overset{n}{A}_p=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}(n-1)_{p-1}=(-1)^n\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)}n_p$$
$$=(-1)^n(n-1)(n-2)\ldots.(p+1)p.n_p,$$

mithin

$$\overset{n}{A}_{n-q}=(-1)^n(n-1)(n-2)\ldots(n-q).n_q, \qquad (5)$$

wenn man nämlich berücksichtigt, dass immer $n_{n-q}=n_q$ ist. Die Gleichung (2) nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$(-1)^n D^n f\left(\frac{1}{x}\right)=$$
$$\frac{1}{x^{2n}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1).n_1}{x^{2n-1}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1)(n-2).n_2}{x^{2n-2}}f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(n-1)(n-2)\ldots3.2.1.n_{n-1}}{x^{n+1}}f'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (6)$$

und dass dieselbe richtig ist, kann man nun leicht mit Hülfe der Formel (4) sehen. Es ist jetzt nämlich für $\lambda=-1$ und nach Nr. (5)

$$\overset{n+1}{A}_{n-q}=(-1)^{n+1}\{(2n-q)(n-1)(n-2)\ldots(n-q).n_q+(n-1)(n-2)\ldots$$
$$\ldots(n-q-1).n_{q+1}\}$$
$$=(-1)^{n+1}(n-1)(n-2)\ldots(n-q)\{(2n-q)n_q+(n-q-1)n_{q+1}\}$$

und weil $n_{q+1}=\frac{n-q}{q+1}n_q$ ist:

$$\overset{n+1}{A}_{n-q}=(-1)^{n+1}(n-1)(n-2)\ldots(n-q).n_q\{(2n-q)+(n-q-1)\frac{n-q}{q+1}\},$$

dabei reduzirt sich der Inhalt der Paranthese auf

$$\frac{n^2+n}{q+1}=\frac{n(n+1)}{q+1}$$

und folglich wird

$$\overset{n+1}{A}_{n-q}=(-1)^{n+1}n(n-1)\dots(n-q)\cdot\frac{n+1}{q+1}n_q$$
$$=(-1)^{n+1}n(n-1)\dots(n-q)\cdot(n+1)_{q+1}$$

oder $q-1$ an die Stelle von q gesetzt

$$\overset{n+1}{A}_{n-q+1}=(-1)^{n+1}n(n-1)\dots(n-q+1)\cdot(n+1)_q$$

und dies ist allerdings dasselbe, was man aus no. (5) durch Vertauschung von n gegen $n+1$ erhält; die Gleichung (6) gilt demnach für den $(n+1)$ten Differenzialquotienten, wenn sie für den $n$ten richtig war. Nun giebt sie aber für $n=1$ das richtige Resultat $Df(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$ und folglich ist sie auch für $n=2$, 3, 4 etc. gültig. Als Beispiel mag die Annahme $f(y)=e^{ay}$ dienen, welche die Gleichung liefert:

$$(-1)^n D^n e^{\frac{a}{x}}= \tag{7}$$
$$\frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^n+(n-1)\cdot n_1\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}+(n-1)(n-2)\cdot n_2\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2}+\dots\right\}e^{\frac{a}{x}}.$$

II. Für $\lambda=2$ fand man

$$\overset{n}{A}_p=\frac{1.2\dots n}{1.2\dots p}2^{2p-n}p_{n-p}$$
$$=n(n-1)(n-2)\dots(p+1)2^{2p-n}p_{n-p},$$

folglich

$$\overset{n}{A}_{n-q}=2^{n-2q}n(n-1)(n-2)\dots(n-q+1)\cdot(n-q)_q,$$

oder wegen des Werthes von $(n-q)_q$:

$$\overset{n}{A}_{n-q}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2q+1)}{1.2.3\dots q}2^{n-2q}. \tag{8}$$

Die Gleichung (2) geht jetzt in die folgende über:

$$\left.\begin{aligned}D^n f(x^2)=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)\\+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\dots\dots\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

von deren Richtigkeit man sich wieder sehr leicht mit Hülfe der Rekursionsformel (4) überzeugen kann. Es ist nämlich für $\lambda=2$ und wegen der Gleichung (8) nach no. (4):

$$\overset{n+1}{A}_{n-q}=(n-2q)\frac{n(n-1)\ldots(n-2q+1)}{1.2\ldots q}2^{n-2q}+2.\frac{n(n-1)\ldots(n-2q+3)}{1.2\ldots(q+1)}2^{n-2q-2}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q)}{1.2\ldots q}\,2^{n-2q-1}\left\{2+\frac{n-2q-1}{q+1}\right\}$$

d. i. weil der Inhalt der Klammer $=\frac{n+1}{q+1}$ ist

$$\overset{n+1}{A}_{n-q}=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2q)}{1.2\ldots(q+1)}\,2^{n-2q-1}$$

und ebenso wäre der vorhergehende Coeffizient

$$\overset{n+1}{A}_{n-q+1}=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2q+2)}{1.2.3\ldots q}\,2^{n-2q+1}$$

und diess ist mit dem identisch, was man aus der Gleichung (8) erhält, wenn man darin $n+1$ für n setzt. Die Gleichung (9) gilt also vom $n$ten Differenzialquotienten weiter auf den $(n+1)$ten, folglich allgemein, weil sie für $n=1$ das richtige Resultat $Df(x^2)=2xf'(x^2)$ liefert.

Die Gleichung (9) hat man übrigens häufig anzuwenden Gelegenheit, da man bei vielen analytischen Untersuchungen in den Fall kommt, Funktionen von x^2 differenziren zu müssen. Für $f(y)=e^{ay}$ hat man sehr einfach

$$D^n e^{ax^2}= \tag{10}$$

$$\left\{a^n(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1}a^{n-1}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-2}(2x)^{n-4}+\ldots\right\}e^{ax^2}.$$

Ebenso leicht findet man aus der Annahme

$$f(y)=(1+ky)^\mu$$

die folgende Gleichung

$$D^n(1+kx^2)^\mu=$$

$$(1+kx^2)^{\mu-n}\left\{\overset{n}{[\mu]}k^n(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1}\overset{n-1}{[\mu]}k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)^2\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}\overset{n-2}{[\mu]}k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+kx^2)^2+\ldots\right\}$$

oder auch nach Absonderung des Faktors $\overset{n}{[\mu]}$

$$D^n(1+kx^2)^\mu = \tag{11}$$

$$[\mu]^n(1+kx^2)^{\mu-n}\{k^n(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1.(\mu-n+1)}k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.(\mu-n+1)(\mu-n+2)}k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+kx^2)^2+\ldots\}$$

Als specielle Fälle sind noch von Interesse die Annahmen $\mu = -1$ und $\mu = n+\frac{1}{2}$. Die erste giebt

$$D^n(1+kx^2)^{-1} =$$
$$(-1)^n 1.2\ldots n(1+kx^2)^{-(n+1)}\{k^n(2x)^n - \frac{n-1}{1}k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+kx^2)^2 - \ldots\}$$

d. i. wenn wir zur Abkürzung Binomialkoeffizienten einführen

$$(-1)^n D^n\left(\frac{1}{1+kx^2}\right) = \tag{12}$$
$$\frac{1.2\ldots.n}{(1+kx^2)^{n+1}}\{n_0 k^n(2x)^n - (n-1)_1 k^{n-1}(2x)^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+(n-2)_2 k^{n-2}(2x)^{n-4}(1+kx^2)^2 - \ldots\}$$

Für $\mu = n+\frac{1}{2}$ nimmt die allgemeine Form der in der Reihe (11) vorkommenden Coeffizienten nämlich

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q+1)}{1.2\ldots q.(\mu-n+1)(\mu-n+2)\ldots(\mu-n+q)}$$

die folgende Gestalt an:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q+1)}{1.2.3\ldots q.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\frac{2q+1}{2}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit 2^{2q} multiplicirt

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2q+1)}{2.4.6\ldots(2q).3.5.7\ldots(2q+1)}2^{2q}.$$

Nun ist aber der Binomialkoeffizient

$$(n+1)_{2q+1} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-2q+1)}{1.2.3.4\ldots(2q+1)},$$

folglich unser obiger Ausdruck auch gleich

$$\frac{2^{2q}}{n+1}(n+1)_{2q+1}.$$

Hiernach erhalten wir aus der Gleichung (11) die folgende:

$$D^n(1+kx^2)^{n+\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1}(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}\{(n+1)_1\,k^n x^n + (n+1)_3 k^{q-1}x^{n-2}(1+kx^2)$$
$$+(n+1)_5 k^{n-2}x^{n-4}(1+kx^2)^2+\ldots\}$$

Setzt man noch $k=-1$ und $n-1$ für n, so lässt sich die auf der rechten Seite der entspringenden Gleichung:

$$D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\{n_1\,x^{n-1}\sqrt{1-x^2}-n_3\,x^{n-3}\sqrt{1-x^2}^{\,3}$$
$$+n_5\,x^{n-5}\sqrt{1-x^2}^{\,5}-\ldots\}$$

stehende Reihe leicht summiren. Wir haben nämlich in der Einleitung den goniometrischen Satz kennen gelernt:

$$\sin nu = n_1\cos^{n-1}u\sin u - n_3\cos^{n-3}u\sin^3 u$$
$$+n_5\cos^{n-5}u\sin^5 u-\ldots\ldots,$$

welcher sich für $\cos u = x$, also $\sin u = \sqrt{1-x^2}$ und $u = \operatorname{Arccos} x$ auch in folgender Form aussprechen lässt

$$\sin(n\operatorname{Arccos}x) = n_1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}-n_3\,x^{n-3}\sqrt{1-x^2}^{\,3}$$
$$+n_5\,x^{n-5}\sqrt{1-x^2}^{\,5}-\ldots.$$

und so die Summe der oben vorkommenden Reihe liefert. Es ergiebt sich demnach

$$D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n\operatorname{Arccos}x) \qquad (13)$$

ein zuerst von Jacobi aufgestelltes sehr elegantes Theorem.

III. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ergab sich

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^{n-p}\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\cdot\frac{p(2n-p-1)_{n-p}}{n2^{2n-p}}$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^{n-p}(n-1)(n-2)\ldots p\cdot\frac{(2n-p-1)_{n-p}}{2^{2n-p}}$$

und folglich

$$\overset{n}{A}_{n-q} = (-1)^q(n-1)(n-2)\ldots(n-q)\frac{n+q-1)_q}{2^{n+q}},$$

und da der Binomialkoeffizient

$$(n+q-1)_q = \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots n}{1.2\ldots q}$$

ist,

$$\overset{n}{A}_{n-q} = \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots n(n-1)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q)} \quad (14)$$

und somit bekommen wir aus der Formel (2) die folgende

$$D^n f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2^n}\left\{\frac{f^{(n)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{f^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+1}}\right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4} \cdot \frac{f^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+2}} - \ldots\right\} \quad (15)$$

Für die Richtigkeit dieses Theoremes wird uns nun wieder die in (4) aufgestellte Relation als Controle dienen. Es ergiebt sich nämlich aus derselben nach no. (14)

$$\overset{n+1}{A}_{n-q} = -\frac{n+q}{2} \cdot \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q)}$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{q+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+q)(n+q-1)\ldots(n-q-1)}{2.4.6\ldots(2q+2)}$$
$$= \frac{(-1)^{q+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+q)(n+q-1)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q)}\left\{1 + \frac{n-q-1}{2q+2}\right\}$$
$$= \frac{(-1)^{q+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+q+1)(n+q)(n+q-1)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q+2)}.$$

Ebenso wäre $q-1$ für q gesetzt

$$\overset{n+1}{A}_{n-q+1} = \frac{(-1)^q}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+q)(n+q-1)\ldots(n-q+1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2q)}.$$

Das Nämliche würde man aber auch aus no. (14) erhalten, wenn man daselbst $n+1$ an die Stelle von n setzte. Die Gleichung (15) gilt demnach von n auf $n+1$ und da sie für $n=1$ das richtige Resultat $Df(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$ liefert, so folgt daraus ihre Allgemeingültigkeit. Für $f(y) = (1+ky)^\mu$ erhält man z. B. aus ihr nach einiger Reduktion

$$D^n(1+k\sqrt{x})^\mu = \frac{[\mu]^n k^n (1+\sqrt{x})^{\mu-n}}{(2\sqrt{x})^n}\left\{1 - \frac{n(n-1)}{2.(\mu-n+1)} \cdot \frac{1+k\sqrt{x}}{k\sqrt{x}}\right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\left(\frac{1+k\sqrt{x}}{k\sqrt{x}}\right)^2 - \ldots\right\}$$

und noch spezieller für $\mu = 2n-1$

$$D^n(1+k\sqrt{x})^{2n-1}=\frac{n(n+1)..(2n-1)k}{2\sqrt{x}}\left(\frac{k(1+k\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right)^{n-1}\left\{1-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{1+k\sqrt{x}}{2k\sqrt{x}}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{1+k\sqrt{x}}{2k\sqrt{x}}\right)^2-\ldots\right\}$$

wobei die Summe der eingeklammerten Reihe

$$=\left(1-\frac{1+k\sqrt{x}}{2k\sqrt{x}}\right)^{n-1}=\left(\frac{k\sqrt{x}-1}{2k\sqrt{x}}\right)^{n-1}$$

ist. So findet man nun sehr leicht

$$D^n(1+k\sqrt{x})^{2n-1}=\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{2^{2n-1}}\left(k^2-\frac{1}{x}\right)^{n-1}\frac{k}{\sqrt{x}}$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{2^{n-1}}=\frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n-1).2^{n-1}}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}=1.3.5\ldots(2n-1)$$

ist, so wird endlich

$$D^n(1+k\sqrt{x})^{2n-1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{k}{\sqrt{x}}\left(k^2-\frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

Die Annahme $f(y)=e^{ay}$ bildet ein zweites Beispiel; man findet ohne Schwierigkeit

$$D^n e^{a\sqrt{x}}=$$
$$\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}\right)^n\left\{1-\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{a\sqrt{x}}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\,.\,4}\left(\frac{1}{a\sqrt{x}}\right)^2-\ldots\right\}e^{a\sqrt{x}}.$$

§ 20.

Independente Bestimmung von $D^nf(e^x)$.

Durch ein Verfahren, welches dem in §. 17 angewendeten völlig analog ist, lassen sich auch leicht die Gesetze entdecken, nach welchen sich die höheren Differenzialquotienten von $f(e^x)$ bilden. Zuvörderst nämlich findet man leicht durch successive Differenziation:

$$Df(e^x)=e^xf'(e^x)$$
$$D^2f(e^x)=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)$$
$$D^3f(e^x)=e^xf'(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^{3x}f'''(e^x)$$
$$D^4f(e^x)=e^xf'(e^x)+7e^{2x}f''(e^x)+9e^{3x}f'''(e^x)+e^{4x}f^{IV}(e^x)\ \text{u. s. f.}$$

Die allgemeine Form, unter welcher alle diese Gleichungen stehen, ist

$$\left.\begin{array}{c} D^n f(e^x) = \\ \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x), \end{array}\right\} \quad (1)$$

in welcher wieder

$$\overset{n}{A}_1 \;,\; \overset{n}{A}_2 \;,\; \overset{n}{A}_3 \;,\; \ldots . \overset{n}{A}_n$$

gewisse Coeffizienten bedeuten, deren Bildungsgesetz wir zu erforschen suchen müssen.

Aus dem Verlaufe der oben entwickelten Gleichungen geht nun hervor, dass diese Coeffizienten wohl vom Ordnungsexponenten n und ihrem Index, aber nicht von der Natur der Funktion f abhängen, dass es folglich zur allgemeinen Bestimmung ihrer Werthe hinreicht, dieselben für irgend eine spezielle Funktion f auszumitteln. Hierzu dient uns die Substitution

$$f(y) = (1+y)^n,$$

aus welcher für ein ganzes positives p folgt

$$f^{(p)}(y) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(1+y)^{n-p}$$

folglich

$$f^{(p)}(e^x) = [n]^{p}(1+e^x)^{n-p}$$

und also nach dem Theoreme in (1)

$$D^n(1+e^x)^n = \quad (2)$$

$$\overset{n}{A}_1 [n]^{1} e^x (1+e^x)^{n-1} + \overset{n}{A}_2 [n]^{2} e^{2x}(1+e^x)^{n-2} + \overset{n}{A}_3 [n]^{3} e^{3x}(1+e^x)^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \overset{n}{A}_{n-1} [n]^{n-1} e^{(n-1)x}(1+e^x) + \overset{n}{A}_n [n]^{n} e^{nx}.$$

Andererseits hat man

$$(1+e^x)^n = 1 + n_1 e^x + n_2 e^{2x} + \ldots + n_n e^{nx}$$

und nach der Formel

$$D^n e^{kx} = k^n e^{kx}$$

auch

$$D^n(1+e^x)^n =$$
$$1^n n_1 e^x + 2^n n_2 e^{2x} + 3^n n_3 e^{3x} + \ldots + n^n n_n e^{nx}.$$

Vergleichen wir diess mit no. (2) und setzen zur Abkürzung $e^x = y$, so ist

$$1^n n_1 y + 2^n n_2 y^2 + 3^n n_3 y^3 + \ldots + n^n n_n y^n$$
$$= \overset{n}{A}_1 [n]^{1} y(1+y)^{n-1} + \overset{n}{A}_2 [n]^{2} y^2(1+y)^{n-2} + \overset{n}{A}_3 [n]^{3} y^3(1+y)^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \overset{n}{A}_{n-1} [n]^{n-1} y^{n-1}(1+y) + \overset{n}{A}_n [n]^{n} y^n$$

und durch Umwandlung der Potenzen $(1+y)^{n-1}$, $(1+y)^{n-2}$ etc. in Reihen

$$\begin{aligned} & 1^n n_1 y + 2^n n_2 y^2 + 3^n n_3 y^3 + \ldots + n^n n_n y^n \\ = & \overset{n}{A}_1 [n]^1 \{ y + (n-1)_1 y^2 + (n-1)_2 y^3 + \ldots + (n-1)_{n-1} y^n \} \\ + & \overset{n}{A}_2 [n]^2 \{ y^2 + (n-2)_1 y^3 + (n-2)_2 y^4 + \ldots + (n-2)_{n-2} y^n \} \\ + & \overset{n}{A}_3 [n]^3 \{ y^3 + (n-3)_1 y^4 + (n-3)_2 y^5 + \ldots + (n-3)_{n-3} y^n \} \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overset{n}{A}_n [n]^n y^n. \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für alle möglichen Werthe von y bestehe, ist es nothwendig, dass die Coefficienten gleicher Potenzen von y einander gleich seien; aus dieser Bemerkung fliessen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1^n n_1 &= \overset{n}{A}_1 [n]^1 \\ 2^n n_2 &= \overset{n}{A}_1 [n]^1 (n-1)_1 + \overset{n}{A}_2 [n]^2 \\ 3^n n_3 &= \overset{n}{A}_1 [n]^1 (n-1)_2 + \overset{n}{A}_2 [n]^2 (n-2)_1 + \overset{n}{A}_3 [n]^3 \\ 4^n n_4 &= \overset{n}{A}_1 [n]^1 (n-1)_3 + \overset{n}{A}_2 [n]^2 (n-2)_2 + \overset{n}{A}_3 [n]^3 (n-3)_1 + \overset{n}{A}_4 [n]^4 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^n n_n &= \overset{n}{A}_1 [n]^1 (n-1)_{n-1} + \overset{n}{A}_2 [n]^2 (n-2)_{n-2} + \overset{n}{A}_3 [n]^3 (n-3)_{n-3} + \ldots + \overset{n}{A}_n [n]^n \end{aligned}$$

Setzt man für $[n]^1$, $[n]^2$, $[n]^3$ etc. ihre Werthe n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$ etc. und ebenso die Werthe der Binomialkoeffizienten hin, so erkennt man, dass die erste Gleichung sich durch n aufdividiren lässt, die zweite durch $n(n-1)$, die dritte durch $n(n-1)(n-2)$ etc., die letzte durch $n(n-1)\ldots 2.1$. Nach Ausführung dieser Divisionen nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

$$\begin{aligned} \frac{1^n}{1} &= \overset{n}{A}_1 \\ \frac{2^n}{1.2} &= \frac{1}{1}\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2 \\ \frac{3^n}{1.2.3} &= \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_3 \\ \frac{4^n}{1.2.3.4} &= \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2}\overset{n}{A}_2 + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_4 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n^n}{1.2\ldots n} &= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\overset{n}{A}_1 + \frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\overset{n}{A}_2 + \ldots + \frac{1}{1}\overset{n}{A}_{n-1} + \overset{n}{A}_n. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Relationen mit den Gleichungen unter no. (6) in § 17, so erkennt man sogleich, dass man es nur mit einem speziellen Falle derselben zu thun hat, in welchem für ein ganzes positives p,

$$k_p = p^n \,,\; x_p = \overset{n}{A}_p$$

ist. Da nun aus den Gleichungen (6) in § 17 für x_p der unter no. (8) oder (9) verzeichnete Werth folgt, so ist in unserem Falle

$$\overset{n}{A}_p = \frac{(-1)^{p+1}}{1.2\ldots p} \{ 1^n p_1 - 2^n p_2 + 3^n p_3 - \ldots \pm p^n p_p \} \quad (3)$$

oder

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2..p} \{ p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + \ldots \} \quad (4)$$

und für die hierdurch bestimmten Werthe der Coeffizienten gilt nun die Gleichung

$$D^n f(e^x) =$$

$$\overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x).$$

Für die Anwendung derselben auf spezielle Fälle ist es bequemer, dieses Theorem in etwas anderer Form auszusprechen. Setzt man nämlich

$$\overset{n}{K}_p = p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + \ldots \quad (6)$$

so ist auch

$$\left. \begin{aligned} & D^n f(e^x) = \\ & \frac{1}{1} \overset{n}{K}_1 e^x f'(e^x) + \frac{1}{1.2} \overset{n}{K}_2 e^{2x} f''(e^x) + \frac{1}{1.2.3} \overset{n}{K}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots \\ & \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} \overset{n}{K}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Passende Beispiele zu diesem Theoreme bilden folgende Substitutionen:

1. $f(y) = (a+y)^\mu$, wofür man erhält

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p} \overset{n}{K}_p e^{px} f^{(p)}(e^x) = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-p+1)}{1.2.3\ldots p} \overset{n}{K}_p e^{px} (a+e^x)^{\mu-p}$$

$$= \mu_p \overset{n}{K}_p \left(\frac{e^x}{a+e^x} \right)^p (a+e^x)^\mu$$

und folglich

$$D^n (a+e^x)^\mu = \quad (8)$$

$$(a+e^x)^\mu \left\{ \mu_1 \overset{n}{K}_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x} \right) + \mu_2 \overset{n}{K}_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x} \right)^2 + \ldots + \mu_n \overset{n}{K}_n \left(\frac{e^x}{a+e^x} \right)^n \right\}$$

also z. B. für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+e^x}}\right)= \tag{9}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{a+e^x}}\Big\{\tfrac{1}{2}\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1.3}{2.4}\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\overset{n}{K}_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\Big\}$$

und für $\mu=-1$,

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)= \tag{10}$$

$$-\frac{1}{a+e^x}\Big\{\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots+(-1)^{n-1}\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\Big\}.$$

II. Für $f(y)=l(a+y)$ findet man

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{K}_p e^{px}f^{(p)}(e^x)=\frac{(-1)^{p-1}1.2.3\ldots(p-1)}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{K}_p e^{px}\frac{1}{(a+e^x)^p}$$

$$=(-1)^{p-1}\frac{1}{p}\overset{n}{K}_p\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p$$

folglich nach no. (7)

$$\left.\begin{aligned}D^n l(a+e^x)=\frac{1}{1}\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1}{2}\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\frac{1}{3}\overset{n}{K}_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\ldots\\ \ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

III. Die in (8) und (11) entwickelten Formeln können selbst wieder zur Entdeckung von Eigenschaften der Coeffizienten $\overset{n}{K}_1$, $\overset{n}{K}_2$ etc. benutzt werden, wenn man die willkührliche Constante $a=0$ setzt. Man hat dann auf der linken Seite von (8)

$$D^n e^{\mu x}=\mu^n e^{\mu x}$$

und nach beiderseitiger Hebung mit $e^{\mu x}$,

$$\mu^n=\mu_1\overset{n}{K}_1+\mu_2\overset{n}{K}_2+\mu_3\overset{n}{K}_3+\ldots+\mu_n\overset{n}{K}_n \tag{12}$$

was eine sehr bemerkenswerthe für jedes μ geltende Relation ist.

Substituirt man für μ_1, μ_2 .... μ_n ihre Werthe

$$\frac{\mu}{1},\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2},\ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3},\ldots$$

führt die angedeuteten Multiplikationen aus und ordnet in (12) Alles nach Potenzen von μ, so müssen die Coeffizienten gleicher Potenzen, von μ einander gleich sein. Da aber links nur μ^n steht, so folgt,

dass die Coeffizienten aller niedrigeren Potenzen von μ der Null gleich sind, der Coeffizient von μ dagegen der Einheit gleich ist. Nach dieser Bemerkung ist z. B. der Coeffizient von μ^1,

$$\frac{1}{1}\overset{n}{K}_1-\frac{1}{2}\overset{n}{K}_2+\frac{1}{3}\overset{n}{K}_3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\overset{n}{K}_n=0\ ,\ (n>1) \quad (13)$$

und der Coeffizient von μ^n,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\overset{n}{K}_n=1$$

oder vermöge des Werthes von $\overset{n}{K}_n$,

$$1.2.3\ldots n=n^n-(n-1)^n n_1+(n-2)^n n_2-(n-3)^n n_3+\ldots \quad (14)$$

ein an sich sehr bemerkenswerther Satz.

Nimmt man auch in der Formel (11) $a=0$, so kommt man auf das schon unter no. (13) gefundene Resultat.

§ 21.

Besondere Transformationen für $D^n(a+e^x)^{-1}$ *und* $D^n(a+e^x)^\mu$.

Man hat sich vielfach mit den höheren Differenzialquotienten der Funktion

$$\frac{1}{a+e^x}$$

beschäftigt, weil man aus ihnen die höheren Differenzialquotienten von $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ ableiten kann. Die Resultate, welche man bei diesen Untersuchungen bekommen hat, sind zum Theil formell sehr von einander verschieden, lassen sich jedoch sammt und sonders aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Sätzen ableiten, welche man daher als ihre gemeinschaftliche Quelle ansehen kann. Wir wollen einige Transformationen dieser Art mittheilen, die den Zusammenhang der verschiedenen Formen für eine und die nämliche Sache aufdecken.

I. Will man in der Formel (10) den gemeinschaftlichen Faktor

$$\frac{1}{a+e^x}$$

wegschaffen, um blos Potenzen von

$$\frac{e^x}{a+e^x},$$

also eine Reihe von der Form

$$\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\overset{n}{J}_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\,.\,.$$

zu sehen, so beachte man, dass

$$\frac{1}{a+e^x}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{e^x}{a+e^x}\right)$$

ist, setze zur Abkürzung

$$\frac{e^x}{a+e^x}=u \tag{1}$$

und multiplicire beiderseits mit $-a$, so wird

$$-aD^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)$$

$$=(1-u)\{\overset{n}{K}_1 u-\overset{n}{K}_2 u^2+\overset{n}{K}_3 u^3-\ldots.+(-1)^{n-1}\overset{n}{K}_n u^n\}$$

$$=\overset{n}{K}_1 u-(\overset{n}{K}_2+\overset{n}{K}_1)u^2+(\overset{n}{K}_3+\overset{n}{K}_2)u^3-(\overset{n}{K}_4+\overset{n}{K}_3)u^4+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}(\overset{n}{K}_n+\overset{n}{K}_{n-1})u^n+(-1)^n\overset{n}{K}_n u^{n+1}.$$

Setzen wir kürzer

$$-aD^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)=\overset{n}{J}_1 u-\overset{n}{J}_2 u^2+\overset{n}{J}_3 u^3-\ldots.+(-1)^{n+1}\overset{n}{J}_{n+1}u^{n+1}, \tag{2}$$

so ist durch Vergleichung mit dem Vorigen

$$\overset{n}{J}_1=\overset{n}{K}_1,\ \overset{n}{J}_2=\overset{n}{K}_2+\overset{n}{K}_1,\ \overset{n}{J}_3=\overset{n}{K}_3+\overset{n}{K}_2,\ldots.$$

$$\ldots.\overset{n}{J}_n=\overset{n}{K}_n+\overset{n}{K}_{n-1},\ \overset{n}{J}_{n+1}-\overset{n}{K}_n$$

oder überhaupt für ein ganzes positives p

$$\overset{n}{J}_p=\overset{n}{K}_p+\overset{n}{K}_{p-1},$$

wobei man für $p=1$, $\overset{n}{K}_0=0$ und für $p=n$, $\overset{n}{K}_{n+1}=0$ genommen werden muss. Aus den Werthen von $\overset{n}{K}_p$ und $\overset{n}{K}_{p-1}$ folgt leicht

$$\overset{n}{J}_p=p^n-(p-1)^n[p_1-1]+(p-2)^n[p_2-p_1]-(p-3)^n[p_3-p_2]+\ldots$$

oder nach dem Satze von den Binomialkoeffizienten

$$p_r-(p-1)_{r-1}=(p-1)_r,$$

welchen man hier der Reihe nach für $r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ anzuwenden Gelegenheit hat:

$$\overset{n}{J}_p = p^n - (p-1)^n (p-1)_1 + (p-2)^n (p-1)_2 - (p-3)^n (p-1)_3 + \dots \qquad (3)$$

Für die hierdurch bestimmten Werthe der Coeffizienten $\overset{n}{J}_1$, $\overset{n}{J}_2$, ... $\overset{n}{J}_{n+1}$ ist nun nach (2) und (1)

$$-aD^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right) = \qquad (4)$$
$$\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \dots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}.$$

Bemerkt man, dass

$$\frac{1}{a+e^x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{e^x}{a+e^x}$$

ist, so hat man auch

$$D^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) = \qquad (5)$$
$$\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \dots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1},$$

ein durch seine Eleganz bemerkenswerthes Resultat.

II. Man kann zu der so eben entwickelten Gleichung auch noch auf anderem Wege gelangen. Man setze nämlich in der Gleichung (11) $n+1$ an die Stelle von n und bemerke für die linke Seite, dass

$$D^{n+1} l(a+e^x) = D^n [Dl(a+e^x)] = D^n \left[\frac{e^x}{a+e^x}\right]$$

ist; man erhält dann:

$$D^n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) = \qquad (6)$$
$$\frac{1}{1}\overset{n+1}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \frac{1}{2}\overset{n+1}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}\overset{n+1}{K}_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}.$$

Aus der Vergleichung von (5) und (6) folgt jetzt für jedes positive ganze p

$$\overset{n}{J}_p = \frac{1}{p}\overset{n+1}{K}_p, \qquad (7)$$

was vermöge der Werthe von $\overset{n}{J}_p$ und $\overset{n+1}{K}_p$ ein rein algebraischer Satz ist. Da sich derselbe auch direkt leicht beweisen lässt, so könnte man hiermit jede der Gleichungen (5) und (6) aus der jedesmaligen anderen ableiten.

Nimmt man in no. (5) x negativ, $a = -1$ und bemerkt, dass

$$\frac{e^{-x}}{-1+e^{-x}}=\frac{1}{-e^x+1}=-\frac{1}{e^x-1}$$

ist, so ergiebt sich leicht

$$(-1)^n D^n\left(\frac{1}{e^x-1}\right) \tag{8}$$
$$=\overset{n}{J}_1\left(\frac{1}{e^x-1}\right)+\overset{n}{J}_2\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^2+\ldots+\overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^{n+1},$$

ein zuerst von Malmstén gefundenes Resultat *).

III. Eine andere Transformation, welche man mit der allgemeinen Gleichung

$$D^n(a+e^x)^\mu$$
$$=(a+e^x)^\mu \left\{\mu_1 \overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)+\mu_2 \overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots+\mu_n \overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\}$$

vornehmen kann, hat zum Zweck, alle Grössen in der Paranthese rechts auf gleichen Nenner zu bringen. Der nächste Schritt hierzu ist, die Gleichung selbst in folgender Form darzustellen:

$$D^n(a+e^x)^\mu$$
$$=(a+e^x)^{\mu-n}\{\mu_1 \overset{n}{K}_1 e^x(a+e^x)^{n-1}+\mu_2 \overset{n}{K}_2 e^{2x}(a+e^x)^{n-2}+\ldots+\mu_n \overset{n}{K}_n e^{nx}\},$$

wo nun alle Potenzen in der Parenthese nach deren Binomialtheoreme zu entwickeln wären. Wir können uns aber diese Arbeit ersparen, wenn wir uns erinnern, dass wir eine ganz ähnliche Rechnung schon einmal in § 18. V. gemacht haben, als wir die Gleichung (12) daselbst transformirten. Bemerken wir nun, dass Das, was in no. (9) innerhalb der Parenthese steht, mit Dem conform ist, was dort in der Parenthese enthalten war, und dass Jenes aus Diesem abgeleitet werden kann, wenn man statt

$$x^\lambda, \overset{n}{E}_1, \overset{n}{E}_2, \overset{n}{E}_3, \ldots.$$

setzt

---

*) Archiv der Mathematik von Prof. Grunert Theil VI. S. 45. Um die Bezeichnung in Einklang zu bringen, muss man statt

$$n, p, \overset{n}{J}_p$$

schreiben:

$$i, k, \overset{(i,k)}{a},$$

wobei aber das letzte Symbol etwas unbequem zu sein scheint.

$$e^x \,,\, \overset{n}{K}_1 \,,\, \overset{n}{K}_2 \,,\, \overset{n}{K}_3 \,,\, \ldots.$$

so ergiebt sich auf der Stelle, dass der Inhalt der Parenthese in Formel (9) sich folgendermassen darstellen lässt:

$$\overset{n}{L}_1 a^{n-1} e^x + \overset{n}{L}_2 a^{n-2} e^{2x} + \overset{n}{L}_3 a^{n-3} e^{3x} + \ldots.$$

worin $\overset{n}{L}_1$, $\overset{n}{L}_2$ etc. Coeffizienten bedeuten, die eben so aus den mit K bezeichneten Grössen gebildet sind, wie die Coeffizienten $\overset{n}{G}_1$, $\overset{n}{G}_2$ etc. in der früheren Untersuchung aus den mit E bezeichneten Ausdrücken. Wir haben also

$$D^n (a + e^x)^\mu$$
$$= (a+e^x)^{\mu-n} \{ \overset{n}{L}_1 a^{n-1} e^x + \overset{n}{L}_2 a^{n-2} e^{2x} + \ldots + \overset{n}{L}_n a^0 e^{nx} \}.$$

Nach der so eben gemachten Bemerkung hinsichtlich der Coeffizienten L ist nun klar, dass irgend eine dieser Grössen etwa $\overset{n}{L}_p$ sich von dem früher entwickelten $\overset{n}{G}_p$ nur um so viel unterscheiden kann, als die Bestandtheile von $\overset{n}{L}_p$, nämlich

$$\overset{n}{K}_1 \,,\, \overset{n}{K}_2 \,,\, \overset{n}{K}_3 \,,\, \ldots.$$

von denen des Coeffizienten $\overset{n}{G}_p$ d. h.

$$\overset{n}{E}_1 \,,\, \overset{n}{E}_2 \,,\, \overset{n}{E}_3 \,,\, \ldots$$

abweichen. Nun ist aber

$$\overset{n}{E}_p = p_0 [\overset{n}{p\lambda}] - p_1 [\overset{n}{\overline{p-1}\,\lambda}] + p_2 [\overset{n}{\overline{p-2}\lambda}] - \ldots$$
$$\overset{n}{K}_p = p_0 p^n - p_1 (p-1)^n + p_2 (p-2)^n - \ldots$$

und also unterscheidet sich $\overset{n}{K}_p$ von $\overset{n}{E}_p$ nur darin, dass an der Stelle von

$$[\overset{n}{p\lambda}] \,,\, [\overset{n}{\overline{p-1}\lambda}] \,,\, [\overset{n}{\overline{p-2}\lambda}] \,,\, \ldots$$

die Potenzen

$$p^n \,,\, (p-1)^n \,,\, (p-2)^n \,,\, \ldots$$

stehen. Daraus folgt, dass man auch $\overset{n}{L}_p$ aus $\overset{n}{G}_p$ ableiten kann, wenn man in dem Werthe der letzteren Grösse die nämlichen Vertauschungen vornimmt. Demnach ist vermöge der Formel (15) in § 18

$$\overset{n}{L}_p = (n-\mu)_0\,\mu_p p^n + (n-\mu)_1\,\mu_{p-1}(p-1)^n + (n-\mu)_2\,\mu_{p-2}(p-2)^n + \ldots \quad (10)$$

und für die so bestimmten Werthe von $\overset{n}{L}_1$, $\overset{n}{L}_2$ etc. haben wir jetzt

$$\left.\begin{aligned} &D^n(a+e^x)^\mu \\ &= (a+e^x)^{\mu-n}\{\overset{n}{L}_1\,a^{n-1}e^x + \overset{n}{L}_2\,a^{n-2}e^{2x} + \ldots + \overset{n}{L}_n\,a^0 e^{nx}\}.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Als spezieller Fall ist hier die Annahme $\mu = -1$ bemerkenswerth, weil man hier auf ein schon bekanntes, zuerst von **Euler** entwickeltes Resultat stösst. Es wird dann

$$L_p = (-1)^p\{(n+1)_0 p^n - (n+1)_1(p-1)^n + (n+1)_2(p-2)^n - \ldots\}$$

und

$$D^n(a+e^x)^{-1}$$
$$= (a+e^x)^{-(n+1)}\{\overset{n}{L}_1\,a^{n-1}e^x + \overset{n}{L}_2\,a^{n-2}e^{2x} + \ldots + \overset{n}{L}_n\,a^0 e^{nx}\}.$$

Setzt man aber blos

$$L_p = (n+1)_0\,p^n - (n+1)_1(p-1)^n + (n+1)_2(p-2)^n - \ldots \quad (12)$$

so ist

$$\begin{aligned} &D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right) \\ &= \frac{-1}{(a+e^x)^{n+1}}\left\{\overset{n}{L}_1\,a^{n-1}e^x - \overset{n}{L}_2\,a^{n-2}e^{2x} + \overset{n}{L}_3\,a^{n-3}e^{3x} - \ldots\right\}\end{aligned} \quad (13)$$

was mit der Eulerschen Formel übereinstimmt.

§ 22.

Höhere Differenzialquotienten solcher Ausdrücke, welche aus goniometrischen Funktionen zusammengesetzt sind.

Die Aufgabe, die höheren Differenzialquotienten solcher Ausdrücke zu entwickeln, welche aus goniometrischen Funktionen bestehen, reduzirt sich im Allgemeinen immer auf die vorhin behandelte der Entwicklung von $D^n f(e^x)$. Da nämlich für $\sqrt{-1} = i$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},$$

so kann man jede Funktion von Sinus oder Cosinus auch als Funktion einer Exponenzialgrösse ansehen und demnach die Lehren des § 20 in Anwendung bringen. Das Technische dieses Verfahrens wird man leicht aus dem folgenden Beispiele ersehen.

Gesetzt man verlangte die independente Darstellung der höheren Differenzialquotienten von den Funktionen

$$\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2} \text{ und } \frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2},$$

so bemerke man, dass dieselben folgendermassen zerlegt werden können:

$$\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+e^{xi}+e^{-xi}}{1+a(e^{xi}+e^{-xi})+a^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a+e^{-xi}}+\frac{1}{a+e^{xi}}\right\}$$

und

$$\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}$$
$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{1+a(e^{xi}+e^{-xi})+a^2}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{a+e^{-xi}}-\frac{1}{a+e^{xi}}\right\}$$

woraus dann folgt:

$$D^n\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)+D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)\right\} \quad (1)$$
$$D^n\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{1}{2i}\left\{D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)+D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)\right\}. \quad (2)$$

Es wird also blos darauf ankommen, die höheren Differenzialquotienten der Funktionen

$$\frac{1}{a+e^{-xi}} \text{ und } \frac{1}{a+e^{xi}}$$

zu entwickeln. Hierzu bedienen wir uns des Satzes (4) in § (21), welchen wir unter der folgenden compendiösen Form darstellen:

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)=-\frac{1}{a}\,\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{\underset{p}{J}}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p,\ p=1,\ 2,\ \ldots\ n+1, \quad (3)$$

wobei das Zeichen Σ bedeutet, dass alle die für $p=1, 2, \ldots n+1$ zum Vorschein kommenden Grössen addirt werden sollen. Setzen wir hier kxi für x, wobei $i=\sqrt{-1}$ ist, und bemerken, dass

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)=\frac{d^n[(a+e^x)^{-1}]}{dx^n}$$

ist, so tritt $ki\,dx$ an die Stelle von dx und folglich geht die linke Seite der Gleichung (3) über in

$$\frac{1}{(ki)^n}\cdot\frac{d^n[(a+e^{kxi})^{-1}]}{dx^n}=\frac{1}{(ki)^n}D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)$$

und die Gleichung selbst nimmt nach beiderseitiger Multiplikation mit $(ki)^n$ die Form an

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=-\frac{k^n i^n}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\left(\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}\right)^p. \qquad (4)$$

Diess lässt sich noch folgendermassen umwandeln. Es ist

$$\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}=\frac{1}{ae^{-kxi}+1}=\frac{1}{1+a\cos kx-ai\sin kx}.$$

Nehmen wir, mit ϱ eine erst noch zu bestimmende Grösse und mit Θ einen noch unbestimmten spitzen Bogen bezeichnend, $1+a\cos kx=\varrho\cos\Theta$, $a\sin kx=\varrho\sin\Theta$, woraus man

$$\varrho^2=(1+a\cos kx)^2+(a\sin kx)^2$$

oder

$$\varrho=\sqrt{1+2a\cos kx+a^2} \qquad (5)$$

und

$$\tan\Theta=\frac{a\sin kx}{1+a\cos kx},\quad \Theta=\mathrm{Arctan}\frac{a\sin kx}{1+a\cos kx} \qquad (6)$$

erhält, so wird

$$\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}=\frac{1}{\varrho(\cos\Theta-i\sin\Theta)}=\frac{\cos\Theta+i\sin\Theta}{\varrho},$$

mithin

$$\left(\frac{e^{kxi}}{a+e^{kxi}}\right)^p=\frac{\cos p\Theta+i\sin p\Theta}{\varrho^p}$$

und folglich nach no. (4)

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=-\frac{k^n i^n}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\Theta+i\sin p\Theta}{\varrho^p}.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n gerade oder ungerade ist. Im ersten ist $i^n=(-1)^{\frac{n}{2}}$ und man hat folglich

1) für gerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=\frac{k^n(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\Theta+i\sin p\Theta}{\varrho^p} \qquad (7)$$

im zweiten Falle ist $i^n=i^{n-1}i=(-1)^{\frac{n-1}{2}}i$ und folglich

2) für ungerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{kxi}}\right)=\frac{k^n(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{i\cos p\Theta-\sin p\Theta}{\varrho^p}. \qquad (8)$$

Nehmen wir jetzt in der Formel (7) $k=-1$, so wird $k^n=+1$, weil n als gerade vorausgesetzt wird, und

$$\varrho=\sqrt{1+2a\cos x+a^2},$$

welcher spezielle Werth von ϱ mit ν bezeichnet werden möge, so dass

$$\nu=\sqrt{1+2a\cos x+a^2} \tag{9}$$

ist; zugleich wird

$$\Theta=-\operatorname{Arctan}\frac{a\sin x}{1+a\cos x}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\omega=\operatorname{Arctan}\frac{a\sin x}{1+a\cos x} \tag{10}$$

gesetzt wird $\Theta=-\omega$. Wir haben daher nach (7)

für gerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega-i\sin p\omega}{\nu^p}. \tag{11}$$

Nehmen wir dagegen in (7) $k=+1$, so wird der zweite spezielle Werth von $\varrho=\nu$ und der von $\Theta=+\omega$, folglich

für gerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega+i\sin p\omega}{\nu^p}. \tag{12}$$

Setzt man auch in der Formel (8) $k=-1$ und $k=+1$, wobei wegen des ungeraden n, $k^n=-1$ wird, so erhält man leicht:

für ungerade n

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{-xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{i\cos p\omega+\sin p\omega}{\nu^p} \tag{13}$$

und

$$D^n\left(\frac{1}{a+e^{xi}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{-i\cos p\omega+\sin p\omega}{\nu^p}. \tag{14}$$

Dividirt man die Summe der Gleichungen (11) und (12), (13) und (14) mit 2, so erhält man nach (1)

für gerade n

$$D^n\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega}{\nu^p} \tag{15}$$

und für ungerade n

$$D^n\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\sin p\omega}{\nu^p}. \qquad (16)$$

Dividirt man ebenso die Differenz zwischen den Gleichungen (11) und (12), (13) und (14) mit $2i$, so ist nach Formel (2)

für gerade n

$$D^n\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\sin p\omega}{\nu^p} \qquad (17)$$

und für ungerade n

$$D^n\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{n}{J}_p\frac{\cos p\omega}{\nu^p}, \qquad (18)$$

wobei man noch für ν und ω ihre Werthe aus (9) und (10), so wie für p der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n+1$ zu setzen hat.

Schreibt man in den Formeln, welche für gerade n gelten, $2n$ für n und in denen, welche ein ungerades n voraussetzen, $2n-1$ für n, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{c}D^{2n}\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n}{J}_p\frac{\cos p\omega}{\nu^p}\\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n+1.\end{array}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{array}{c}D^{2n-1}\left(\frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n-1}{J}_p\frac{\sin p\omega}{\nu^p}\\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n.\end{array}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{array}{c}D^{2n}\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n}{J}_p\frac{\sin p\omega}{\nu^p}\\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n+1.\end{array}\right\} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{array}{c}D^{2n-1}\left(\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{a}\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n-1}{J}_p\frac{\sin p\omega}{\nu^p}\\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2n.\end{array}\right\} \qquad (22)$$

§ 23.

Die höheren Differenzialquotienten der Tangente, Cotangente, Sekante und Cosekante.

Die Formeln, welche wir im vorigen Paragraphen für die höheren Differenzialquotienten der Funktion

$$\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}$$

gefunden haben, liefern uns zugleich die höheren Differenzialquotienten von $\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$, weil diese letzteren Funktionen aus der obigen durch die zwei Spezialisirungen $a=+1$ und $a=-1$ entspringen.

Für $a=+1$ wird

$$\frac{\sin x}{1+2a\cos x+a^2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{2(1+\cos x)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{4\cos^2\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x,$$

ferner nach no. (9) und (10)

$$v=\sqrt{2(1+\cos x)}=2\cos\tfrac{1}{2}x$$

$$\omega=\operatorname{Arctan}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\operatorname{Arctan}\tan\tfrac{1}{2}x,$$

und wenn wir voraussetzen, dass $\frac{1}{2}x$ ein spitzer Winkel sei,

$$\omega=\tfrac{1}{2}x.$$

Demnach erhalten wir aus den Formeln (21) und (22)

$$\tfrac{1}{2}D^{2n}\tan\tfrac{1}{2}x=(-1)^n\,\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n}{J_p}\,\frac{\sin\frac{1}{2}px}{(2\cos\frac{1}{2}x)^p},$$

$$\tfrac{1}{2}D^{2n-1}\tan\tfrac{1}{2}x=(-1)^{n-1}\,\Sigma(-1)^{p-1}\overset{2n-1}{J_p}\,\frac{\cos\frac{1}{2}px}{(2\cos\frac{1}{2}x)^p}.$$

Setzen wir noch $2x$ für x, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}}\cdot D^{2n-1}\tan x\\ =&\overset{2n-1}{J_1}\frac{\cos x}{2\cos x}-\overset{2n-1}{J_2}\frac{\cos 2x}{(2\cos x)^2}+\overset{2n-1}{J_3}\frac{\cos 3x}{(2\cos x)^3}-\ldots-\overset{2n-1}{J_{2n}}\frac{\cos 2nx}{(2\cos x)^{2n}}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}D^{2n}\tan x\\ =&\overset{2n}{J_1}\frac{\sin x}{2\cos x}-\overset{2n}{J_2}\frac{\sin 2x}{(2\cos x)^2}+\overset{2n}{J_3}\frac{\sin 3x}{(2\cos x)^3}-\ldots+\overset{2n}{J_{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)x}{(2\cos x)^{2n+1}},\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

wobei nun x ein Bogen des ersten Quadranten sein muss.

Beide Formeln würden sich übrigens in eine einzige zusammenziehen lassen, wenn man zwei noch unbestimmte Grössen ε und η einführte und schriebe

$$\left.\begin{array}{c}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m-\varepsilon)}}{2^{m+1}}D^m\tan x=\\ \overset{m}{J}_1\frac{\varepsilon\cos x+\eta\sin x}{2\cos x}-\overset{m}{J}_2\frac{\varepsilon\cos 2x+\eta\sin 2x}{(2\cos x)^2}+\overset{m}{J}_3\frac{\varepsilon\cos 3x+\eta\sin 3x}{(2\cos x)^3}-\ldots\\ \ldots+(-1)^m\overset{m}{J}_{m+1}\frac{\varepsilon\cos(m+1)x+\eta\sin(m+1)x}{(2\cos x)^{m+1}}.\end{array}\right\}\quad(3)$$

Diese Gleichung würde für $m=2n-1$ und $m=2n$ in die unter (1) und (2) stehenden Formeln übergehen, wenn man die noch unbestimmten Grössen ε und η so zu wählen wüsste, dass für jedes ungerade m zugleich $\varepsilon=1$ und $\eta=0$, dagegen für jedes gerade m gleichzeitig $\varepsilon=0$ und $\eta=1$ würde. Es hat aber keine Schwierigkeit, eine solche Wahl zu treffen; man braucht nur zu setzen:

$$\varepsilon=\frac{1+(-1)^{m-1}}{2},\quad \eta=\frac{1-(-1)^{m-1}}{2},\qquad(4)$$

dann sind die den Grössen ε und η auferlegten Bedingungen erfüllt und die Formel (3) gilt dann allgemein.

Ebenso leicht würde man aus den Formeln (21) und (22) im vorigen Paragraphen die höheren Differenzialquotienten der Cotangente ableiten, indem man $a=-1$ setzte; man gelangt aber rascher dazu, wenn man in die so eben entwickelte Formel (3) $\frac{\pi}{2}-x$ für x substituirt. Man hat dann

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+\varepsilon)}}{2^{m+1}}D^m\cot x\qquad(5)$$

$$=\overset{m}{J}_1\frac{\varepsilon\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\eta\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{2\sin x}-\overset{m}{J}_2\frac{\varepsilon\cos 2(\frac{\pi}{2}-x)+\eta\sin 2(\frac{\pi}{2}-x)}{(2\sin x)^2}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^m\overset{m}{J}_{m-1}\frac{\varepsilon\cos(m+1)(\frac{\pi}{2}-x)+\eta\sin(m+1)(\frac{\pi}{2}-x)}{(2\sin x)^{m+1}}.$$

Für die Differenziation der Sekante halten wir uns an die bekannte goniometrische Relation

$$\sec x=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})-\tan x,$$

aus welcher

$$D^m\sec x=D^m\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})-D^m\tan x$$

folgt. Da nun die beiden Differenzialquotienten auf der rechten Seite

nach Formel (3) leicht angegeben werden können, so sind hierdurch auch die höheren Differenzialquotienten der Sekante vollständig bestimmt.

Die Differenziation der Cosekante kommt ebenfalls auf die Differenziationen von Tangenten und Cotangenten zurück; denn da nach einer bekannten Formel der Goniometrie

$$\operatorname{cosec} x = \tan \tfrac{1}{2} x + \cot x$$

ist, so folgt

$$D^m \operatorname{cosec} x = D^m \tan \tfrac{1}{2} x + D^m \cot x, \qquad (7)$$

wo es nun keine Schwierigkeiten hat, die auf der rechten Seite vorkommenden Differenzialquotienten mit Hülfe der Formeln (3) und (5) vollständig zu entwickeln.

§ 24.

Independente Bestimmung von $D^n f(lx)$.

Auf ähnliche Weise, wie wir das Bildungsgesetz der höheren Differenzialquotienten von Funktionen einer Potenz und einer Exponenzialgrösse entdeckt haben, können wir auch noch die allgemeine Form nachweisen, unter welche sich die höheren Differenzialquotienten einer beliebigen Funktion des Logarithmus stellen, wobei wir den Logarithmus als natürlichen voraussetzen. Zunächst gelangt man leicht zu den folgenden Gleichungen:

$$Df(lx) = \frac{1}{x} f'(lx)$$

$$D^2 f(lx) = \frac{1}{x^2} \{f''(lx)\}$$

$$D^3 f(lx) = \frac{1}{x^3} \{f'''(lx) - 3f''(lx) + 2f'(lx)\}$$

u. s. f.,

welche auf die allgemeine Form

$$D^n f(lx) \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{x^n} \{ \overset{n}{A}_0 f^{(n)}(lx) - \overset{n}{A}_1 f^{(n-1)}(lx) + \overset{n}{A}_2 f^{(n-2)}(lx) - \ldots \pm \overset{n}{A}_{n-1} f'(lx) \}$$

hinweisen, worin

$$\overset{n}{A}_0, \overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \ldots \overset{n}{A}_{n-1}$$

gewisse rein numerische Coeffizienten bedeuten. Zu ihrer Bestimmung dient uns wieder der schon mehrmals gebrauchte Kunstgriff, welcher in der Substitution einer solchen Funktion für f besteht, dass man die auf beiden Seiten der Gleichung (1) vorkommenden Differenziationen unabhängig von einander ausführen kann. Die passendste Wahl in dieser Beziehung ist

$$f(y) = e^{-\mu y},$$

woraus durch $p$malige Differenziation folgt

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p \mu^p e^{-\mu y},$$

folglich

$$f^{(p)}(lx) = (-1)^p \mu^p x^{-\mu}. \tag{2}$$

Ferner ist unmittelbar

$$f(lx) = x^{-\mu}$$

und mithin

$$D^n f(lx) = (-1)^n \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)x^{-\mu-n}.$$

Substituiren wir diesen Ausdruck nebst Dem, was sich aus no. (2) für $p=n$, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1 ergiebt, in die Gleichung (1), so ergiebt sich nach einiger Hebung

$$\left.\begin{array}{l} \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1) \\ = \overset{n}{A}_0 \mu^n + \overset{n}{A}_1 \mu^{n-1} + \overset{n}{A}_2 \mu^{n-2} + \ldots + \overset{n}{A}_{n-1} \mu \end{array}\right\} \tag{3}$$

Es ist hiernach sehr leicht, die Bedeutung der fraglichen Coeffizienten und ihre Werthe zu erkennen. Verwandelt man nämlich ein Produkt von der Form

$$\mu(\mu+a_1)(\mu+a_2)\ldots(\mu+a_{n-1}) \tag{4}$$

durch gewöhnliche Multiplikation in eine nach absteigenden Potenzen von μ geordnete Reihe, so findet man für die letztere

$$\mu^n + C_1 \mu^{n-1} + C_2 \mu^{n-2} + \ldots + C_{n-1} \mu \tag{5}$$

und dabei ist

$$\begin{array}{rl} C_1 = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \\ C_2 = & a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \ldots + a_1 a_{n-1} \\ & \quad + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \ldots + a_2 a_{n-1} \\ & \quad\quad + a_3 a_4 + \ldots + a_3 a_{n-1} \\ & \quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots \\ & \quad\quad\quad\quad + a_{n-2} a_{n-1} \end{array}$$

d. h. C_2 gleich der Summe der Combinationen zu je zweien (ohne Wiederholungen) aus den $n-1$ Elementen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, wobei jede Combination als Produkt angesehen wird; ebenso ist

$$\begin{aligned} C_3 = a_1 a_2 a_3 &+ a_1 a_2 a_4 + \ldots + a_1 a_2 a_{n-1} \\ &+ a_1 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_5 + \ldots + a_1 a_3 a_{n-1} \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\qquad + a_2 a_3 a_4 + \ldots + a_2 a_3 a_{n-1} \\ &\qquad + a_2 a_4 a_5 + \ldots + a_2 a_4 a_{n-1} \\ &\qquad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\qquad\qquad + a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} \end{aligned}$$

also C_3 gleich der Summe der Combinationen zu je dreien; auf gleiche Weise würde man weiter gehen können, bis zuletzt

$$C_{n-1} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}.$$

Nehmen wir nun $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots a_{n-1} = n-1$, so werden die Ausdrücke in (4) und (5) identisch mit der linken und rechten Seite der Gleichung (3), und folglich ist dann

$$\overset{n}{A}_0 = 1 \ , \ \overset{n}{A}_1 = 1+2+\ldots+n-1,$$

ferner $\overset{n}{A}_2$ gleich der Summe der in den Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ liegenden Amben (jede Ambe als Produkt angesehen), $\overset{n}{A}_3$ gleich der Ternensumme u. s. f. Bildet man überhaupt aus den $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen Combinationen, von denen jede einzelne p solcher Zahlen enthält, und bezeichnet mit $\overset{n-1}{C}_p$ die Summe aller dieser als Produkte betrachteten Combinationen, so ist

$$\overset{n}{A}_p = \overset{n-1}{C}_p \tag{6}$$

und hiermit die Bestimmung der fraglichen Coeffizienten gegeben, so dass jetzt die Gleichung

$$D^n f(lx) \tag{7}$$
$$= \frac{1}{x^n} \{ f^{(n)}(lx) - \overset{n-1}{C}_1 f^{(n-1)}(lx) + \overset{n-1}{C}_2 f^{(n-2)}(lx) - \ldots + (-1)^{n-1} \overset{n-1}{C}_{n-1} f'(lx) \}$$

die vollständige Lösung des Problems darstellt. Man kann übrigens statt einer independenten Bestimmung der hier vorkommenden Coeffizienten auch leicht eine rekursive Berechnung derselben zeigen. Da nämlich

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)$$
$$= \mu^n + \overset{n-1}{C_1}\mu^{n-1} + \overset{n-1}{C_2}\mu^{n-2} + \ldots + \overset{n-1}{C_{n-1}}\mu$$

ist, so folgt, wenn $\mu+1$ für μ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}&(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots(\mu+n)\\&= (\mu+1)^n + \overset{n-1}{C_1}(\mu+1) + \overset{n-1}{C_2}(\mu+1)^{n-2} + \ldots + \overset{n-1}{C_{n-1}}(\mu+1)\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Andererseits ist aber auch

$$\left.\begin{aligned}&(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n) = \frac{\mu+n}{\mu}\,\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)\\&= \left(1+\frac{n}{\mu}\right)\{\mu^n + \overset{n-1}{C_1}\mu^{n-1} + \overset{n-1}{C_2}\mu^{n-2} + \ldots + \overset{n-1}{C_{n-1}}\mu\}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Ordnet man nun die beiden Reihen in (8) und (9) nach Potenzen von μ, was bei der ersten durch Anwendung des Binomialtheoremes, bei der zweiten durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation mit $1+\frac{n}{\mu}$ geschieht, und vergleicht dann die Coeffizienten gleicher Potenzen von μ, z. B. der Potenz μ^{n-p}, so ergiebt sich die Relation

$$n_p + (n-1)_{p-1}\overset{n-1}{C_1} + (n-2)_{p-2}\overset{n-1}{C_2} + \ldots + (n-p+1)_1\overset{n-1}{C_{p-1}}$$
$$= \overset{n-1}{C_p} + n\overset{n-1}{C_{p-1}},$$

welche dazu dient, um irgend einen Coeffizienten $\overset{n-1}{C_p}$ aus allen seinen Vorgängern $\overset{n-1}{C_1}$, $\overset{n-1}{C_2}$, ... $\overset{n-1}{C_{p-1}}$ zu berechnen. Als Beispiel für das Theorem in (7) diene die Annahme

$$f(y) = y^\mu,$$

woraus

$$f^{(p)}(y) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-p+1)y^{\mu-p}$$
$$= \overset{p}{[\mu]}y^{\mu-p}$$

folgt, und weiter

$$D^n(lx)^\mu =$$
$$\frac{(lx)^{\mu-n}}{x^n}\{\overset{n}{[\mu]} - \overset{n-1}{C_1}\overset{n-1}{[\mu]}lx + \overset{n-1}{C_2}\overset{n-2}{[\mu]}(lx)^2 - \ldots\} \quad (11)$$

Ueberblicken wir den Gedankengang, den wir bisher für die Differenziation zusammengesetzter Funktionen befolgt haben, so erhellt, dass uns nach der Bestimmung von $D^n f(x^\lambda)$, $D^n f(e^x)$, $D^n f(lx)$ noch die

Pflicht obläge, auch die höheren Differenzialquotienten von $f(\cos x)$, $f(\sin x)$, $f(\mathrm{Arcsin}\, x)$, $f(\mathrm{Arctan}\, x)$ etc. zu entwickeln, indem wir dann diejenige Reihe von Aufgaben gelöst hätten, welche entspringt, sobald man in $D^n f[\varphi(x)]$ für $\varphi(x)$ die Funktionen der algebraischen Analysis nach einander substituirt. Jene Forderung lässt sich nun zwar befriedigen, aber die Resultate des betreffenden Calcüls haben bis jetzt noch eine so wenig elegante und abgerundete Form, dass von einer praktischen Brauchbarkeit derselben noch keine Rede sein kann, und daher möge die Entwickelung dieser weitläuftigen Rechnungen unterbleiben

§. 25.

Die höheren Differenzialquotienten der Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen.

Enthält eine Funktion verschiedene von einander unabhängige Variabele, so kann man dieselbe entweder nach einer der Veränderlichen allein, oder bald nach dieser bald nach jener Variabelen mehrmals hinter einander differenziren. Der erste Fall kommt auf die schon betrachteten Differenziationen der Funktionen mit nur einer Veränderlichen zurück, weil die übrigen Variabelen nicht geändert werden und folglich die Rollen constanter Grössen spielen; wichtiger dagegen ist die Betrachtung solcher Differenziationen, bei denen mit den Veränderlichen gewechselt wird. So könnte man z. B. eine Funktion zweier Variabelen $f(x, y)$ erst nach x differenziren, wodurch man den partiellen Differenzialquotienten $\frac{df(x, y)}{dx}$ erhielte und, weil dieser wieder eine Funktion von x und y bildet, hierauf eine zweite Differenziation nach y vornehmen, wodurch man auf den zweiten Differenzialquotienten

$$\frac{d\,\frac{df(x,y)}{dx}}{dy} \qquad (1)$$

kommt. Man bezeichnet denselben durch

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx}, \qquad (2)$$

wobei die Stellung von dx und dy im Nenner die Ordnung der Differenziationen anzeigt, indem man von der Rechten zur Linken fortschreitet, um an den der Reihe nach dastehenden Differenzialen die Verän-

derlichen zu erkennen, nach welchen die successiven Differenziationen vor sich gehen sollen. Man wird auch leicht bemerken, dass diese Bezeichnungsweise vollkommen passend ist. Denn da in (1) die Variable x von y unabhängig ist, so hängt auch dx nicht von y ab, ist also constant für eine Differenziation nach y. Statt des Ausdrucks in (1) lässt sich daher auch der folgende schreiben

$$\frac{\frac{ddf(x,y)}{dx}}{dy},$$

welcher in den unter no. (2) enthaltenen übergeht, wenn man die, hier durch die Bruchstriche angedeutete Ordnung der Differenziationen durch die Stellung der Differenziale gegen einander bezeichnet.

Differenzirt man die Funktion $f(x,y)$ erst nach y und den entstehenden partiellen Differenzialquotienten nach x, so hat man ähnlich

$$\frac{d\frac{df(x,y)}{dy}}{dx}=\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}. \qquad (3)$$

Es liegt hier die Frage sehr nahe, in welcher Relation stehen die Ausdrücke (2) und (3) zu einander, d. h. wie verhalten sich die zwei Resultate, welche man erhält, wenn man die zwei Differenziationen von $f(x,y)$ in doppelter Ordnung vornimmt? Es ist sehr leicht, diese Frage zu beantworten, wenn man sich die Entstehungsweise beider Ausdrücke vergegenwärtigt.

Für den partiellen Differenzialquotienten von $f(x,y)$ nach x ist bekanntlich

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\text{Lim}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

So lange nun Δx auf der rechten Seite noch nicht in Null übergegangen ist, so lange ist der Quotient auf der rechten Seite auch dem Differenzialquotienten links nicht gleich, sondern um irgend eine Grösse ξ davon verschieden, so dass wir setzen können

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}+\xi.$$

Hierbei ist ξ irgend eine Funktion von x, y und Δx, die wir nicht näher zu kennen brauchen, von der wir aber gewiss wissen, dass sie für unbegränzt abnehmende Δx sich der Null unbegränzt nähert, weil

sonst die ganze Gleichung nicht in die vorhergehende überginge, sobald man das völlig willkührliche Δx unendlich abnehmen lassen will. Differenzirt man die vorstehende Gleichung nach y, so kommt

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = \frac{d\left\{\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right\}}{dy} + \frac{d\xi}{dy}$$

oder nach dem Begriffe des Differenzialquotienten

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = \operatorname{Lim} \frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-\{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\}}{\Delta y\,\Delta x} + \frac{d\xi}{dy}.$$

Hier bezieht sich das Lim. zeichen allein auf die Abnahme des Δy, während Δx noch ungeändert bleibt. Da aber Δx beliebig ist, so können wir auch Δx mit Δy gleichzeitig (wiewohl immer unabhängig davon) abnehmen lassen, wodurch sich ξ, folglich auch $\frac{d\xi}{dy}$ der Gränze Null nähert. Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx}\\ &= \operatorname{Lim} \frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y)}{\Delta y\,\Delta x}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und jetzt geht das Zeichen Lim auf eine gemeinschaftliche unbegränzte Abnahme von Δx und Δy.

Zu dieser Betrachtung lässt sich leicht das Gegenstück stellen. Wir können nämlich, wenn wir der Grösse Δy einen bestimmten endlichen Werth geben, setzen

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} + \eta,$$

wobei η eine Funktion von x, y, Δy bedeutet, welche für unendlich abnehmende Δy die Null zur Gränze hat. Es folgt nun durch Differenziation nach x

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d\left\{\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right\}}{dx} + \frac{d\eta}{dx}$$

oder

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}$$

$$= \mathrm{Lim} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - \{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\}}{\Delta x\,\Delta y} + \frac{d\eta}{dx}$$

wobei sich das Zeichen Lim blos auf die Abnahme von Δx bezieht, während Δy seinen beliebigen endlichen Werth behält. Lassen wir aber Δy mit Δx gleichzeitig abnehmen, so nähert sich η, folglich auch $\frac{d\eta}{dx}$ der Gränze Null und wir haben daher für gemeinschaftlich abnehmende Δx und Δy,

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}$$

$$= \mathrm{Lim} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)}{\Delta x\,\Delta y}.$$

Vergleichen wir die rechte Seite dieses Ausdruckes mit der rechten Seite in (4), so ergiebt sich uns aus der Identität beider die wichtige Relation

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy}.$$

Soll also eine Funktion zweier Veränderlichen nach jeder dieser Veränderlichen einmal differenzirt werden, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung beide Differenziationen auf einander folgen.

Es ist nicht schwer, die geometrische Bedeutung dieses Satzes einzusehen. Denken wir uns nämlich in fig. 8 drei auf einander senkrechte Ebenen, setzen $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ und $z = \varphi(x, y)$, so beschreibt bekanntlich der Punkt z eine gewisse Fläche, sobald x und y alle möglichen verschiedenen Werthe annehmen. Bezeichnen wir den cubischen Inhalt des Körpers $OBCZYX$ mit $f(x,y)$ und lassen x um das $XX' = \Delta x$ wachsen, so ist der Inhalt von $OBCZ'Y'X' = f(x+\Delta x, y)$ und folglich

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = XYZZ'Y'X'.$$

Der Inhalt von $XYZZ'Y'X'$ lässt sich aber näherungsweis durch das Produkt aus Grundfläche und Höhe, nämlich $XYZ \,.\, XX' = XYZ \,.\, \Delta x$ ausdrücken, woraus folgt, dass näherungsweis

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = XYZ$$

ist und zwar um so richtiger, je kleiner Δx genommen wird. Gehen wir zur Gränze für unendlich abnehmende Δx über, so verwandelt sich die obige Näherungsformel in die völlig genaue

$$\frac{df(x,y)}{dx} = XYZ.$$

Differenziren wir diese Gleichung nach y und bemerken, dass der Differenzialquotient einer Ebene die sie begränzende letzte Ordinate ist, so ergiebt sich

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = YZ = z. \qquad (6)$$

Geben wir dagegen (fig. 9) in der Gleichung $f(x,y) = OBCZYX$ dem y einen Zuwachs $YY' = \Delta y$, so ist $f(x, y+\Delta y) = OB'C'Z'Y'X)$ folglich

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = BCC'Z'Y'YZ,$$

wobei wir näherungsweis $BCC'Z'Y'YZ = BCZY.. YY' = BCZY.\Delta y$ setzen können, woraus folgt

$$\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = BCZY$$

und mit völliger Genauigkeit, wenn wir zur Gränze für unendlich abnehmende Δy übergehen,

$$\frac{df(x,y)}{dy} = BCZY,$$

Durch Differenziation dieses Ausdruckes nach $x = OX = BY$ kommen wir an die Gränze YZ der Ebene $BCZY$, so dass

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy} = YZ = z$$

ist. Bei Vergleichung dieses Resultates mit dem unter no. (6) gefundenen ergiebt sich wieder die Richtigkeit des in (5) aufgestellten Satzes.

Aber nicht blos für zwei Veränderliche gilt die Bemerkung, dass die Ordnung der Differenziationen keinen Einfluss auf das Endresultat hat, sondern auch für drei und mehrere Veränderliche behält dieselbe ihre Richtigkeit. Wäre z. B. eine Funktion von drei Variabelen, etwa der Ausdruck $f(x,y,z)$ nach jeder derselben einmal zu differenziren, so kann man auf folgende Weise verfahren.

Nach dem vorigen Theoreme gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2 f(x,y,z)}{dy\,dx} = \frac{d^2 f(x,y,z)}{dx\,dy},$$

$$\frac{d^2 f(x,y,z)}{dz\,dx} = \frac{d^2 f(x,y,z)}{dx\,dz},$$

$$\frac{d^2 f(x,y,z)}{dz\,dy} = \frac{d^2 f(x,y,z)}{dy\,dz}.$$

Differenzirt man die erste nach z, die zweite nach y, die dritte nach x, so ergeben sich daraus die folgenden:

$$\frac{d^3 f(x,y,z)}{dz\,dy\,dx} = \frac{d^3 f(x,y,z)}{dz\,dx\,dy} \tag{7}$$

$$\frac{d^3 f(x,y,z)}{dy\,dz\,dx} = \frac{d^3 f(x,y,z)}{dy\,dx\,dz} \tag{8}$$

$$\frac{d^3 f(x,y,z)}{dx\,dz\,dy} = \frac{d^3 f(x,y,z)}{dx\,dy\,dz} \tag{9}$$

Ferner ist aber auch $\frac{df(x,y,z)}{dz}$ eine Funktion von x und y und durch Differenziation derselben nach x und y unserem früheren Theoreme gemäss

$$\frac{d^2\left\{\frac{df(x,y,z)}{dz}\right\}}{dy\,dx} = \frac{d^2\left\{\frac{df(x,y,z)}{dz}\right\}}{dx\,dy},$$

d. i.

$$\frac{d^3 f(x,y,z)}{dy\,dx\,dz} = \frac{d^3 f(x,y,z)}{dx\,dy\,dz}. \tag{10}$$

Differenzirt man ebenso $\frac{df(x,y,z)}{dy}$ nach x und z, $\frac{df(x,y,z)}{dx}$ nach y und z, so ergeben sich noch die Gleichungen:

$$\frac{d^3 f(x,y,z)}{dz\,dx\,dy} = \frac{d^3 f(x,y,z)}{dx\,dz\,dy}. \tag{11}$$

$$\frac{d^3 f(x,y,z)}{dz\,dy\,dx} = \frac{d^3 f(x,y,z)}{dy\,dz\,dx}. \tag{12}$$

Beachtet man, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen der Reihe nach der rechten Seite von (9), der linken von (9) und der linken von (8), und ebenso die linken Seiten von (10), (11), (12) der rechten Seite in (8), der rechten in (7) und der linken in (6) entsprechen, so erhellt, dass überhaupt die sechs Formen, welche man durch alle verschiedenen Anordnungen der drei Differenziationen bekommt, einander gleich sind und es mithin für das Resultat gleichgültig ist, in wel-

cher Reihenfolge man die Differenziationen vornimmt. Ebenso leicht würde man zeigen können, dass in Ausdrücken, wie

$$\frac{d^4 f(x,y,z,u)}{dx\,dy\,dz\,du},\quad \frac{d^5 f(x,y,z,u,v)}{dx\,dy\,dz\,du\,dv}\text{ etc.},$$

auf die Anordnung der Differenziationen nichts ankommt.

Differenzirt man eine Funktion mehrerer Variabeln, etwa $f(x,y,z)$, mehrmals z. B. $m$mal nach x, darauf $n$mal nach y und zuletzt $p$mal nach z, so bezeichnet man den herauskommenden Differenzialquotienten mit

$$\frac{d^{m+n+p} f(x,y,z)}{dz^p\,dy^n\,dx^m}$$

und nennt ihn den partiellen Differenzialquotienten der Ordnung $m+n+p$ in Bezug auf die Differenziationen nach x, y, z. Man wird sich auch hier sehr leicht überzeugen, dass es gleichgültig ist, in welcher Ordnung diese Differenziationen verrichtet werden, dass man also ebenso gut schreiben kann:

$$\frac{d^{m+n+p} f(x,y,z)}{dx^m\,dy^n\,dz^p}$$

was gewöhnlich zu geschehen pflegt.

Mit Hülfe solcher partieller Differenzialquotienten kann man leicht die höheren totalen Differenziale einer Funktion mehrerer Variabelen entwickeln, wie man an den folgenden Beispielen sehen wird.

Man hat bekanntlich

$$df(x,y) = \frac{df(x,y)}{dx}dx + \frac{df(x,y)}{dy}dy,$$

folglich unter Anwendung des nämlichen Satzes selbst

$$d^2 f(x,y) = \frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dx}dx\right\}}{dx}dx + \frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dx}dx\right\}}{dy}dy$$
$$+\frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dy}dy\right\}}{dx}dx + \frac{d\left\{\frac{df(x,y)}{dy}dy\right\}}{dy}dy,$$

d. i. wenn man die Gleichungen

$$\frac{d\,\frac{df(x,y)}{dx}}{dx} = \frac{d^2 f(x,y)}{dx^2},\quad \frac{d\,\frac{df(x,y)}{dy}}{dy} = \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}$$

und

$$\frac{d\frac{df(x,y)}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{df(x,y)}{dy}}{dx}=\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}$$

berücksichtigt.

$$d^2f(x,y)=\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}dx\,dy+\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2.$$

Hieraus folgt die neue Differenziation:

$$d^3f(x,y)=\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2\right\}}{dx}dx+\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}dx^2\right\}}{dy}dy$$

$$+2\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}dx\,dy\right\}}{dx}dx+2\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}dx\,dy\right\}}{dy}dy$$

$$+\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2\right\}}{dx}dx+\frac{d\left\{\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}dy^2\right\}}{dy}dy$$

und durch Vereinigung der homologen Glieder

$$d^3f(x,y)=$$

$$\frac{d^3f(x,y)}{dx^3}dx^3+3\frac{d^3f(x,y)}{dx^2dy}dx^2dy+3\frac{d^3f(x,y)}{dx\,xy^2}dx\,dy^2+\frac{d^3f(x,y)}{dy^3}dy^3.$$

Man übersieht gleich, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen lässt und dass die Coeffizienten, welche der Reihe nach vorkommen, die Binomialkoeffizienten der jedesmaligen Ordnung sein müssen, weil sie sich ebenso wie diese durch successive Additionen bilden. Man hat demnach allgemein

$$d^nf(x,y)=\frac{d^nf(x,y)}{dx^n}dx^n+n_1\frac{d^nf(x,y)}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy+n_2\frac{d^nf(x,y)}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2+$$

$$\ldots+n_{n-1}\frac{d^nf(x,y)}{dx\,dy^{n-1}}dx\,dy^{n-1}+\frac{d^nf(x,y)}{dy^n}dy^n. \qquad (13)$$

Dieses Theorem enthält als speziellen Fall die Formel (2) in §. 13, wenn man $f(x,y)=y\varphi(x)$ und nachher $y=\psi(x)$ setzt. Man hat nämlich dann für ein positives ganzes h:

$$\frac{d^{n-h}f(x,y)}{dx^{n-h}}=y\frac{d^{n-h}\varphi(x)}{dx^{n-h}}$$

und wenn man noch $h$mal nach y differenzirt

$$\frac{d^nf(x,y)}{dx^{n-h}dy^h}=\frac{d^hy}{dy^h}\cdot\frac{d^{n-h}\varphi(x)}{dx^{n-h}}$$

und für $y=\psi(x)$ und durch Multiplikation mit $dx^{n-h}dy^h$

$$\frac{d^n f(x,y)}{dx^{n-h}dy^h}dx^{n-h}dy^h = d^h\psi(x)\,d^{n-h}\varphi(x).$$

Benutzen wir dies für $h=0, 1, 2, \ldots n$ in der Gleichung (13) und dividiren nachher mit dx^n, so gelangen wir wieder zu der Formel (2) in §. 13.

Ganz das nämliche Verfahren ist gleichförmig auch zur Entwickelung von $d^n f(x,y,z)$, $d^n f(x,y,z,u)$ etc. anwendbar.

Cap. V. Relationen zwischen verschiedenen Funktionen und ihren höheren Differenzialquotienten.

§. 26.

Beziehungen zwischen einer Funktion und ihrer Derivirten.

Nachdem wir uns mit den blos technischen Hülfsmitteln bekannt gemacht haben, welche zur Ausführung der gewöhnlich nur angedeuteten Operation des Differenzirens dienen, liegt es uns nun ob, den Zusammenhang zu untersuchen, welcher zwischen einer beliebigen Funktion und ihren nach den gegebenen Regeln entwickelten Differenzialquotienten statt findet, und hiermit kommen wir in eine Region der Wissenschaft, in welcher weniger die Kunst, dagegen um so mehr die Metaphysik des höheren Calcüls hervortritt. Als Anhaltepunkt dienen uns hier die Betrachtungen der Einleitung, wo wir bereits eine Relation gefunden hatten, welche eine Beziehung irgend einer Funktion zu ihrem ersten Differenzialquotienten involvirt. Wir sahen nämlich, dass, wenn x und $f(x)$ die rechtwinklichen Coordinaten einer Curve und $F(x)$ die über x stehende Fläche derselben bedeuteten, die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ durch die folgenden Gleichungen verbunden sind

$$F(x)=\text{Lim}\,\frac{x}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{2x}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{\overline{n-1}x}{n}\right)\right\}$$

und

$$f(x)=\text{Lim}\,\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}.$$

Nach unserer jetzigen Bezeichnung giebt die letztere Formel:

$$f(x) = F'(x),$$

folglich, wenn wir dies in die vorige Gleichung substituiren,

$$F(x) = \text{Lim} \frac{x}{n} \left\{ F'(0) + F'\left(\frac{x}{n}\right) + F'\left(\frac{2x}{n}\right) + \dots + F'\left(\frac{\overline{n-1}\,x}{n}\right) \right\}$$

und hiermit haben wir in der That eine Beziehung zwischen irgend einer Funktion und ihrem ersten Differenzialquotienten. Dieselbe ist übrigens nur ein spezieller Fall einer etwas allgemeineren Formel, welche sich auf folgendem rein analytischen Wege findet.

I. Da für stetig und unausgesetzt abnehmende δ

$$\text{Lim} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = F'(x)$$

ist, so darf man für irgend ein bestimmtes δ

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = F'(x) + \varepsilon$$

setzen, wobei ε eine Grösse bezeichnet, die mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt, von der wir aber sonst weiter nichts wissen und auch nicht zu wissen brauchen. Substituiren wir nun für x der Reihe nach a, $a+\delta$, $a+2\delta$, ... $a+\overline{n-1}\,\delta$, so ergiebt sich folgende Reihe von Gleichungen:

$$\frac{F(a+\delta) - F(a)}{\delta} = F'(a) + \varepsilon_1$$

$$\frac{F(a+2\delta) - F(a+\delta)}{\delta} = F'(a+\delta) + \varepsilon_2$$

$$\frac{F(a+3\delta) - F(a+2\delta)}{\delta} = F'(a+2\delta) + \varepsilon_3$$

. . . .

$$\frac{F(a+n\delta) - F(a+\overline{n-1}\,\delta)}{\delta} = F'(a+\overline{n-1}\,\delta) + \varepsilon_n$$

und durch deren Addition

$$\frac{F(a+n\delta) - F(a)}{\delta}$$

$$= F'(a) + F'(a+\delta) + F'(a+2\delta) + \dots + F'(a+\overline{n-1}\,\delta)$$
$$+ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n$$

und wenn wir $a+n\delta = b$ setzen:

$$\left.\begin{array}{c} F(b)-F(a) \\ =\delta\{F'(a)+F'(a+\delta)+F'(a+2\delta)+\ldots+F'(a+n-1\delta)\} \\ +\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n). \end{array}\right\} (1)$$

Ist nun ε' die grösste und ε'' die kleinste unter den Grössen ε_1, ε_2, ... ε_n, so muss offenbar

$$\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n)$$
$$<\delta n\varepsilon' \text{ und } >\delta n\varepsilon''$$

sein; andererseits aber war $a+n\delta=b$, folglich $n\delta=b-a$, mithin

$$\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n)$$
$$<(b-a)\varepsilon' \text{ und } >(b-a)\varepsilon''.$$

Da nun jede der Grössen ε_1, ε_2, ... ε_n bis zur Gränze Null abnimmt, sobald δ gegen die Null convergirt, so ist diess auch mit ε', ε'' und ebenso mit $(b-a)\varepsilon'$ und $(b-a)\varepsilon''$ der Fall. Hieraus folgt dann

$$\text{Lim}\,\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n)=0,$$

und wenn wir jetzt in der Gleichung (1) zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ übergehen, so ist

$$\left.\begin{array}{c} F(b)-F(a) \\ =\text{Lim}\,\delta\{F'(a)+F'(a+\delta)+F'(a+2\delta)+\ldots+F'(a+\overline{n-1}\,\delta)\} \\ \delta=\frac{b-a}{n}. \end{array}\right\} (2)$$

Diese allgemeinere Formel, welche die frühere als speziellen Fall in sich enthält, lässt sich ebenso leicht geometrisch deuten. Wäre z. B. in Fig. 1. $OX=x$, $XY=F'(x)$, also $y=F'(x)$ die Gleichung der Curve $MPYQ$ und die Fläche $ORYX=F(x)$, so würde für $OA=a$, $OB=b$, die Fläche $ABQP$ gleich der Differenz der Flächen $OBQR$ und $OAPR$ sein und die obige Formel diente dann zur Quadratur von $ABQP=F(b)-(F(a)$. Nimmt man $a=OA=0$, so reduzirt sich die Fläche $OAPR=F(a)$ auf eine blose Gerade OR und wird also $=0$; zugleich ist dann in der Formel $\delta=\frac{b}{n}$ und folglich ergiebt sich

$$F(b)=\text{Lim}\frac{b}{n}\{F'(0)+F'(\frac{b}{n})+F'(\frac{2b}{n})+\ldots+F'(\frac{\overline{n-1}\,b}{n})\},$$

was von der früheren Formel nur darin verschieden ist, dass b an der Stelle von x steht.

Setzt man in der Gleichung (1) $b = a + h$, wobei h eine ganz beliebige Grösse sein kann, so wird

$$\left.\begin{array}{c} F(a+h) - F(a) \\ = \operatorname{Lim} \delta \{ F'(a) + F'(a+\delta) + F'(a+2\delta) + \ldots + F'(a + \overline{n-1}\,\delta) \} \\ \delta = \frac{h}{n}. \end{array}\right\} (3)$$

und von dieser wichtigen Formel werden wir gleich nachher Gebrauch machen.

II. Sehen wir vorerst noch einmal auf die Ableitung der Formel (2) zurück, so können wir leicht eine ebenso einfache als nützliche Bemerkung an dieselbe knüpfen.

In der Gleichung

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = F'(x) + \varepsilon$$

bedeutete ε eine Grösse, welche man so klein machen kann als man will, wenn man nur δ klein genug nimmt; man wird also ε auch so verringern können, dass $F'(x) + \varepsilon$ immer das nämliche Vorzeichen hat wie $F'(x)$ selbst. Denn wäre z. B. $F'(x)$ positiv, aber ε negativ, so würde man ε seinem absoluten Werthe nach nur kleiner als $F(x)$ zu machen haben und dann $F'(x) - \varepsilon$ noch positiv, also mit $F'(x)$ von gleichem Zeichen, ausfallen; ganz ebenso würde man verfahren, wenn $F'(x)$ negativ und ε positiv wäre. Man denke sich nun δ so klein gewählt, dass in den früheren Gleichungen die Ausdrücke

$$F'(a) + \varepsilon_1 \,,\; F'(a+\delta) + \varepsilon_2 \,,\; F'(a+2\delta) + \varepsilon_3 \,,\; \ldots\, F'(\overline{a + n} - 1\delta) + \varepsilon_n$$

mit ihren jedesmaligen ersten Gliedern gleiche Vorzeichen haben; wären jetzt die Grössen $F'(a)$, $F'(a+\delta)$, $F'(a+2\delta)$, ... $F'(a+\overline{n-1}\delta)$ sämmtlich positiv, so müssten wegen des stets als positiv vorausgesetzten δ auch die Differenzen

$$F(a+\delta) - F(a) \,,\; F(a+2\delta) - F(a+\delta) \,,\; F(a+3\delta) - F(a+2\delta), \ldots$$
$$F(a+n\delta) - F(a+\overline{n-1}\,\delta)$$

durchgängig positiv sein und hieraus folgt:

$$F(a) < F(a+\delta) \,,\; F(a+\delta) < F(a+2\delta) \,,\; F(a+2\delta) < F(a+3\delta), \ldots$$
$$F(a+\overline{n-1}\,\delta) < F(a+n\delta).$$

Sind dagegen die Grössen $F'(a)$, $F'(a+\delta)$ etc. negativ, so sind es auch die vorhingenannten Differenzen und mithin gelten die Ungleichungen

$$F(a) > F(a+\delta)\ ,\ F(a+\delta) > F(a+2\delta)\ ,\ F(a+2\delta) > F(a+3\delta), \ldots$$
$$F(a+\overline{n-1}\,\delta) > F(a+n\delta).$$

Lassen wir nun δ unausgesetzt ab und n immer zunehmen, doch so, dass immer $n\delta = b-a$ bleibt wie früher, so stellen die Grössen

$$F'(a)\ ,\ F'(a+\delta)\ ,\ F'(a+2\delta), \ldots F'(a+\overline{n-1}\,\delta)$$

und

$$F(a)\ ,\ F(a+\delta)\ ,\ F(a+2\delta)\ , \ldots F(\overline{a+n-1}\,\delta)$$

nichts Anderes als den Verlauf der Funktionen $F'(x)$ und $F(x)$ dar, wenn in ihnen x stetig von $x=a$ bis nach $x=b$ übergeht, und wir können nun folgenden wichtigen Satz aussprechen:

eine beliebige Funktion nimmt während eines bestimmten Intervalles beständig zu oder ab, je nachdem ihre Derivirte während des nämlichen Intervalles positiv oder negativ bleibt.

Der Differenzialquotient einer Funktion liefert also immer ein Kennzeichen, um entscheiden zu können, innerhalb welcher Intervalle die Funktion selbst wächst oder abnimmt.

III. Wir betrachten nun die Formel (3). In derselben kommen wieder die Grössen $F'(a)$, $F'(a+\delta)$, $F'(a+2\delta)$ etc. der Reihe nach vor und zugleich wird ein Uebergang zur Gränze für unausgesetzt abnehmende δ verlangt, es durchläuft also in $F'(x)$ die Veränderliche x stetig das Intervall $x=a$ bis $x=a+h$. Dabei wird nun $F'(x)$ offenbar irgendwo seinen grössten und kleinsten Werth erhalten, so dass etwa für $x=\alpha$ der Werth von $F'(\alpha)$ der grösste unter den Ausdrücken $F'(a)$, $F'(a+\delta)$, $F'(a+2\delta)$ etc. und ähnlich für $x=\beta$ der Werth von $F'(\beta)$ der kleinste von allen ist. Setzen wir daher in no. (3) für jedes Glied der Reihe das zu grosse $F'(\alpha)$ oder zu kleine $F'(\beta)$, so wird offenbar

$$F(a+h) - F(a) < \delta n\, F'(\alpha) \text{ d. i. } < h\,F'(\alpha)$$
$$F(a+h) - F(a) > \delta n\, F'(\beta) \text{ d. i. } > h\,F'(\beta)$$

oder es ist auch

$$F(a+h) - F(a) - h\,F'(\alpha) \text{ negativ}$$
$$F(a+h) - F(a) - h\,F'(\beta) \text{ positiv.}$$

Diess lässt sich auch in folgender Form darstellen. Wenn in den Ausdrucke

$$F(a+h) - F(a) - hF'(x)$$

x das Intervall $x=a$ bis $x=a+h$ durchläuft, so finden sich innerhalb des letzteren zwei Werthe α und β, von denen der eine ihn negativ und der andere positiv macht. Wenn nun aber $F'(x)$ eine stetige Funktion von x ist, wenigstens innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$, so ändert sich auch der ganze obige Ausdruck continuirlich und kann demnach nur dadurch vom Negativen ins Positive übergegangen sein, dass er alle Zwischenstufen durchlaufen hat. Es existirt folglich ein gewisser Werth ξ von x, für welchen

$$F(a+h) - F(a) - hF'(\xi) = 0$$

oder

$$F(a+h) - F(a) = hF'(\xi)$$

ist. Da aber ξ innerhalb des Intervalles a bis $a+h$ liegt, also bei positiven h, $a+h > \xi > a$, und bei negativen h, $a+h < \xi < a$ ist, so können wir $\xi = a + \lambda h$ setzen, wo λ einen positiven ächten Bruch, oder schärfer, eine positive die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitende Grösse bezeichnet. So haben wir denn für $1 \geqq \lambda \geqq 0$

$$F(a+h) - F(a) = hF'(a+\lambda h) \tag{4}$$

oder

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a+\lambda h) \tag{5}$$

Man kann dieser Gleichung auch eine geometrische Bedeutung abgewinnen, die so einfach ist, dass sie fast ans Triviale streift. Ist nämlich wieder $y = F'(x)$ die Gleichung der Curve MPQ (fig. 10) und $F(x)$ ihre über der Abscisse x stehende Fläche, so ist für $OA = a$, $AB = h$, die Fläche $ABQP = OBQM - OAPM = F(a+h) - F(a)$. Wenn nun andererseits US die grösste auf der Strecke AB stehende Ordinate (das Maximum von $F'(x)$) und VT die kleinste Ordinate (das Minimum von $F'(x)$) ist, so erhellt augenblicklich, dass das Rechteck aus AB und US mehr als die Fläche $ABQP$, und das Rechteck aus AB und VT weniger als dieselbe beträgt. Hieraus folgt, dass es eine Ordinate LK der Art geben müsse, dass die Fläche $ABQP$ gleich dem Rechtecke aus AB und LK, also

$$F(a+h) - F(a) = AB.LK = h.LK$$

ist. Wir haben aber $LK = F'(OL) = F'(OA+AL)$, und wenn wir den Bruch $\frac{AL}{AB} = \lambda$ setzen, $AL = \lambda . AB = \lambda h$ und folglich $LK =$

$F(OA + \lambda h) = F(a + \lambda h)$. Durch diese Substitution kommen wir auch geometrischerseits auf die Gleichung (4) zurück. — Diese Schlüsse gelten aber nicht mehr, wenn die Curve *MPSTQ* innerhalb des Intervalles von P bis Q unendlich gross wird, oder keinen zusammenhängenden Zug bildet, d. h. wenn $F(x)$ während des Intervalles $x = a$ bis $x = a + h$ unendlich oder unstetig wird.

§ 27.

Erweiterung der gefundenen Relationen.

Denken wir uns für zwei verschiedene Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen hingeschrieben, indem wir uns F einmal durch Φ und dann durch Ψ ersetzt denken, so findet sich durch Division sehr leicht

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Phi(a+h) - \Phi(a)}{\Psi(a+h) - \Psi(a)} \\ &= \operatorname{Lim} \frac{\Phi'(a) + \Phi'(a+\delta) + \Phi'(a+2\delta) + \ldots + \Phi'(a+\overline{n-1}\,\delta)}{\Psi'(a) + \Psi'(a+\delta) + \Psi'(a+2\delta) + \ldots + \Psi'(a+\overline{n-1}\,\delta)} \end{aligned}\right\} (1)$$

Nun giebt es aber folgenden Satz *): der Quotient zweier Summen:

---

*) Ist nämlich G der grösste und K der kleinste unter den Quotienten

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}};$$

so ist

$$\frac{A_0}{B_0} < G \text{ und } > K$$
$$\frac{A_1}{B_1} < G \text{ und } > K$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} < G \text{ und } > K$$

und unter diesen Beziehungen kommt nur eine Gleichung vor. Aus denselben folgt

$$A_0 < B_0 G \text{ und } > B_0 K$$
$$A_1 < B_1 G \text{ und } > B_1 K$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n-1} < B_{n-1} G \text{ und } > B_{n-1} K$$

und durch Addition

$$\frac{A_0+A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}}{B_0+B_1+B_2+\ldots+B_{n-1}}$$

liegt seinem absoluten Werthe nach zwischen dem grössten und klein sten der partiellen Quotienten

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}},$$

wobei ebenfalls nur die absoluten Werthe in Frage kommen. Wenden wir diess auf den in no. (3) vorkommenden Quotienten an, so folgt, dass derselbe zwischen der grössten und kleinsten unter den Grössen

$$\frac{\Phi'(a)}{\Psi'(a)}, \frac{\Phi'(a+\delta)}{\Psi'(a+\delta)}, \frac{\Phi'(a+2\delta)}{\Psi'(a+2\delta)}, \ldots \frac{\Phi'(a+\overline{n-1}\,\delta)}{\Psi'(a+\overline{n-1}\,\delta)}$$

enthalten sein muss. Je kleiner nun $\delta=\frac{h}{n}$ ist, desto genauer stellen diese Grössen den Verlauf des Quotienten $\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$ dar, wenn man darin x das Intervall a bis $a+h$ stetig durchlaufen lässt; da aber in no. (1) δ als unausgesetzt bis zur Gränze Null abnehmend gedacht wird, so folgt jetzt, dass der Quotient

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}$$

zwischen dem Maximum und Minimum von $\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$ enthalten ist, wenn man x von a bis $a+h$ gehen lässt. Tritt dieses Maximum etwa für $x=\alpha$ und das Minimum für $x=\beta$ ein, so ist

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-\frac{\Phi'(\alpha)}{\Psi'(\alpha)} \text{ negativ}$$

und

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-\frac{\Phi'(\beta)}{\Phi'(\beta)} \text{ positiv,}$$

$$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}$$
$$<(B_0+B_1+B_2+\ldots+B_{n-1})\,G$$
$$\text{und} >(B_0+B_1+B_2+\ldots+B_{n-1})\,K.$$

Mithin ist durch Division

$$G>\frac{A_0+A_1+A_2+A_{n-1}}{B_0+B_1+B_1+B_{n-1}}>K$$

w. z. b. w.

d. h. mit anderen Worten: der Ausdruck

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

ändert sein Vorzeichen, wenn man x das Intervall $x=a$ bis $x=a+h$ durchgehen lässt. Vorausgesetzt nun, dass der Quotient $\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$, den wir kurz $f(x)$ nennen wollen, eine wenigstens innerhalb jenes Intervalles stetige Funktion von x bildet, so folgt aus dem Vorigen, dass es einen Werth $x=\xi$ geben müsse, für welchen der obige Ausdruck sich annullirt. Da aber ξ nicht ausserhalb der Gränzen a und $a+h$ liegen kann, so können wir $\xi=a+\lambda h$ setzen, wo $1\geq\lambda\geq 0$ ist; es ergiebt sich dann:

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}-f(a+\lambda h)=0$$

oder, vermöge der Bedeutung von $f(x)$,

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi'(a+\lambda h)}{\Psi'(a+\lambda h)},\ 1\geq\lambda\geq 0 \qquad (2)$$

Wir haben aber noch die Bedingungen nachzusehen, unter welchen $f(x)$ eine stetige Funktion ist, wenigstens während des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$. Das Criterium für die Continuität einer Funktion $f(x)$ überhaupt besteht nun darin, dass die Differenz

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)$$

für unendlich abnehmende δ sich der Gränze Null nähert, wie man durch sehr einfache Betrachtungen leicht finden wird *). In unserem Falle ist nun

---

*) In fig. 11a. z. B. sei $y=f(x)$ die Gleichung der Curve $RUPV$ und $f(x)$ eine stetige Funktion. Für $OM=x$, $MS=MT=\delta$ ist dann $SU=f(x-\delta)$, $TV=f(x+\delta)$ und

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)=VU'.$$

Aus der Betrachtung der Figur ergiebt sich auf der Stelle, dass für unausgesetzt abnehmende δ die Differenz VU' sich bis zur Gränze Null verringert. Ist dagegen in fig. 11b. die Funktion $f(x)$ an der Stelle M unstetig, so ändert sie sich sprungweis, und zu $OM=x$ als Abscisse gehören zwei Ordinaten MP und MQ, von denen jene die vorhergehende Reihe von Ordinaten beschliesst und diese eine neue anfängt. Es ist dann wieder

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)=VU',$$

$$f(x-\delta)-f(x+\delta)=\frac{\Phi'(x-\delta)}{\Psi'(x-\delta)}-\frac{\Phi'(x+\delta)}{\Psi'(x+\delta)}. \qquad (3)$$

Sind nun $\Phi'(x)$ und $\Psi'(x)$ selbst stetige Funktionen, so haben wir

$$\operatorname{Lim}\frac{\Phi'(x-\delta)}{\Psi'(x-\delta)}=\operatorname{Lim}\frac{\Phi'(x+\delta)}{\Psi'(x+\delta)}=\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

und folglich

$$\operatorname{Lim}\{f(x-\delta)-f(x+\delta)\}=0,$$

wobei jedoch stillschweigend vorausgesetzt wird, dass das Minuszeichen in (3) nicht durch einen Zeichenwechsel in ein Pluszeichen, also die Differenz nicht in eine Summe umgeschlagen ist. Dieser Fall muss noch besonders betrachtet werden. Aendert nun erstlich $\Phi'(x)$ an der Stelle $x=u$ sein Zeichen, so dass $\Phi'(u-\delta)$ positiv $\Phi'(u+\delta)$ negativ ist, so wird

$$\operatorname{Lim}\{f(u-\delta)-f(u+\delta)\}=\operatorname{Lim}\left\{\frac{\Phi'(u-\delta)}{\Psi'(u-\delta)}+\frac{\Phi'(u+\delta)}{\Psi'(u+\delta)}\right\}$$
$$=2\frac{\Phi'(u)}{\Psi'(u)}.$$

Da wir aber $\Phi'(x)$ als stetige Funktion voraussetzten, so muss an der Stelle u, wo sie ihr Vorzeichen wechselt, $\Phi'(u)=0$ sein, woraus

$$\operatorname{Lim}\{f(u-\delta)-f(u+\delta)\}=0$$

folgt. Der Zeichenwechsel von $\Phi'(x)$ bringt demnach keine Unstetigkeit in die Funktion $f(x)$. Aendert dagegen $\Psi'(x)$ sein Zeichen an der Stelle $x=v$, so ist ähnlich wie vorhin

---

aber für unendlich abnehmende δ ist $\operatorname{Lim} VU' = PQ$, also $\operatorname{Lim}\{f(x-\delta) - f(x+\delta)\}$ von der Null verschieden.

Man kann dieses Criterium auch anders ausdrücken; es ist nämlich identisch

$$\frac{f(x-\delta)-f(x)}{(-\delta)}+\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{\delta};$$

folglich, wenn man zur Gränze übergeht,

$$f'(x)+f'(x) = \text{einer endlichen Grösse},$$

wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x stetig, und $=\infty$, wenn sie daselbst unstetig ist. So lange also der Differenzialquotient einer Funktion endlich bleibt, ändert sich die letztere continuirlich.

$$\text{Lim}\{f(v-\delta)-f(v+\delta)\}=\text{Lim}\left\{\frac{\Phi'(v-\delta)}{\Psi'(v-\delta)}+\frac{\Phi'(v+\delta)}{\Psi'(v+\delta)}\right\}$$

$$=2\frac{\Phi'(v)}{\Psi'(v)},$$

und da $\Psi'(x)$ ebenfalls als stetige Funktion vorausgesetzt wurde, so muss an der Stelle v des Zeichenwechsels $\Psi'(v)=0$ sein, woraus dann

$$\text{Lim}\{f(v-\delta)-f(v+\delta)\}=\infty$$

folgt, also $f(x)$ unstetig wird. Zur Continuität des Quotienten

$$f(x)=\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

gehört also, dass die Funktionen $\Phi'(x)$ und $\Psi'(x)$ selbst von $x=a$ bis $x=a+h$ stetig sind und dass die letztere während dieses Intervalles ihr Vorzeichen nicht ändere. Diess sind die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung (2). Es giebt übrigens noch eine Determination für die genannte Formel. Die Ableitung derselben basirt nämlich auf der Voraussetzung, dass die Funktion $f(x)$ einen grössten und kleinsten Werth annehme, wenn man x von a bis $a+h$ gehen lässt, und diese Voraussetzung ist offenbar in dem Falle unrichtig, wo $f(x)$ innerhalb jenes Intervalles unbegränzt wächst oder abnimmt, weil es dann weder ein Maximum noch ein Minimum giebt. Wir müssen daher noch die Bedingung hinzufügen, dass $f(x)$ während des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ weder unendlich zu- noch abnehme, welche immer erfüllt ist, sobald $\Phi'(x)$ und $\Psi'(x)$ innerhalb jenes Intervalles endlich bleiben.

Da durch die Stetigkeit und Endlichkeit der derivirten Funktionen auch immer die der ursprünglichen Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ mitbedingt ist (beiläufig gesagt, ein Satz, den man nicht umkehren darf) und gleiches Vorzeichen von $\Psi'(x)$ entweder beständiges Wachsthum oder fortwährende Abnahme von $\Psi(x)$ anzeigt, so können wir alles Bisherige in folgenden Satz zusammenfassen:

Bleiben die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nebst ihren ersten Differenzialquotienten endlich und stetig während des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$, und nimmt ferner $\Psi'(x)$ innerhalb dieses Intervalles entweder blos zu oder blos ab, so ist

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi'(a+\lambda h)}{\Psi'(a+\lambda h)},\quad 1\geqq\lambda\geqq 0. \tag{4}$$

Construiren wir in Fig. 12 zwei Curven MPQ und NST, deren Gleichungen $y=\Phi'(x)$ und $y=\Psi'(x)$ sind und nehmen $OA=a$, $AB=h$, also $OB=a+h$, so sind die Flächen $ABQP=\Phi(a+h)-\Phi(a)$ und $ABTS=\Psi(a+h)-\Psi(a)$. Für $AL=a+\lambda h$ haben wir ferner $LJ=\Phi'(a+\lambda h)$, $LK=\Psi'(a+\lambda h)$ und folglich bedeutet die Gleichung (4) geometrisch, dass sich die Flächen $ABQP$ und $ABTS$ zu einander verhalten wie die Ordinaten LJ und LK.

Man kann den Satz, der sich in der Gleichung (4) ausspricht, leicht beliebig erweitern. Haben nämlich $\Phi'(x)$, $\Psi'(x)$ und ebenso $\Phi''(x)$, $\Psi''(x)$ stetigen Verlauf von $x=a$ bis $x=a+k$ und $\Psi''(x)$ keinen Zeichenwechsel (so dass also $\Psi'(x)$ entweder nur zu oder nur abnimmt), so ist ähnlich wie in (4):

$$\frac{\Phi'(a+k)-\Phi'(a)}{\Psi'(a+k)-\Psi'(a)}=\frac{\Phi''(a+\lambda'k)}{\Psi''(a+\lambda'k)}, \quad 1\geqq\lambda'\geqq 0$$

und wenn man $k=\lambda h$, $\lambda\lambda'=\lambda_2$ setzt,

$$\frac{\Phi'(a+\lambda h)-\Phi'(a)}{\Psi'(a+\lambda h)-\Psi'(a)}=\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)}, \quad 1\geqq\lambda_2\geqq 0.$$

Auf ganz die nämliche Weise könnte man wieder die folgende Gleichung ableiten:

$$\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)-\Phi''(a)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)-\Psi''(a)}=\frac{\Phi'''(a+\lambda_3 h)}{\Psi'''(a+\lambda_3 h)}, \quad 1\geqq\lambda_3\geqq 0.$$

Man übersieht leicht wie, sich dieses Spiel fortsetzen lässt und dass man damit zu folgendem Satze gelangt:

Wenn die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nebst den folgenden Differenzialquotienten derselben

$$\Phi'(x)\ ,\ \Phi''(x)\ ,\ \Phi'''(x)\ ,\ \ldots\ \Phi^{(n-1)}(x)\ ,\ \Phi^{(n)}(x)$$
$$\Psi'(x)\ ,\ \Psi''(x)\ ,\ \Psi'''(x)\ ,\ \ldots,\ \Psi^{(n-1)}(x)\ ,\ \Psi^{(n)}(x)$$

innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ stetig und endlich bleiben, und wenn ferner die Differenzialquotienten von $\Psi(x)$ während des nämlichen Intervalles ihre jedesmaligen Vorzeichen nicht wechseln, so gelten die Gleichungen

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi'(a+\lambda_1 h)}{\Psi'(a+\lambda_1 h)}$$

$$\frac{\Phi'(a+\lambda_1 h)-\Phi'(a)}{\Psi'(a+\lambda_1 h)-\Psi'(a)}=\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)}$$

$$\frac{\Phi''(a+\lambda_2 h)-\Phi''(a)}{\Psi''(a+\lambda_2 h)-\Psi''(a)}=\frac{\Phi'''(a+\lambda_3 h)}{\Psi'''(a+\lambda_3 h)}$$

. . . .

$$\frac{\Phi^{(n-1)}(a+\lambda_{n-1} h)-\Phi^{(n-1)}(a)}{\Psi^{(n-1)}(a+\lambda_{n-1} h)-\Psi^{(n-1)}(a)}=\frac{\Phi^{(n)}(a+\lambda_n h)}{\Psi^{(n)}(a+\lambda_n h)},$$

in denen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ Grössen bedeuteten, welche die Gränzen 0 und $+1$ nicht überschreiten.

Sind die Differenzialquotienten von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ so beschaffen, dass gleichzeitig

$$\Phi(a) = \Phi''(a) = \Phi'''(a) \ldots = \Phi^{(n-1)}(a) = 0$$
$$\Psi'(a) = \Psi''(a) = \Psi'''(a) \ldots = \Psi^{(n-1)}(a) = 0$$

ist, so wird die rechte Seite jeder der obigen Gleichungen identisch mit der linken der nachfolgenden Gleichung und wir haben dann folgendes sehr wichtige Theorem:

> Wenn die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ endlich und stetig sind, wenn ferner die Differenzialquotienten von $\Psi(x)$ während desselben Intervalles ihre jedesmaligen Vorzeichen nicht wechseln, und wenn endlich beide Reihen von Differenzialquotienten mit Ausschluss der $n$ten für $x=a$ verschwinden, so gilt die Gleichung
>
> $$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)}=\frac{\Phi^{(n)}(a+\lambda_n h)}{\Psi^{(n)}(a+\lambda_n h)}, \qquad (5)$$
>
> worin λ_n eine die Gränzen 0 und $+1$ nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

Ein gutes Beispiel hierzu bildet die Annahme $\Psi(x) = (x-a)^n$; es erfüllt dieselbe alle der Funktion $\Psi(x)$ auferlegten Bedingungen und giebt

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h^n}=\frac{\Phi^{(n)}(a+\lambda_n h)}{1.2.3\ldots n},$$

oder wenn wir F für Φ schreiben:

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(a+\lambda_n h) \qquad (6)$$

wobei nun die Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ ... $F^{(n)}(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$ stetig und endlich sein und mit Ausnahme der ersten und letzten für $x=a$ verschwinden müssen.

Wäre $F(x)$ eine von den vielen Funktionen, die nebst ihren Differenzialquotienten für $x=0$ sich annulliren, so kann man $a=0$ nehmend, eine oft sehr brauchbare Formel erhalten, nämlich f für F schreibend:

$$f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\lambda_n h), \qquad (7)$$

von der wir in Cap. VIII eine wichtige Anwendung machen werden.

Zweite Abtheilung.

Anwendungen der Differenzialrechnung.

Cap. VI. Die unbestimmt scheinenden Werthe mancher Funktionen.

§. 28.

Die vieldeutigen Symbole $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

Es kommt bekanntlich häufig vor, dass die Werthe mancher Funktionen sich in speziellen Fällen unter einer der vieldeutigen Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ präsentiren, aus welchen man ihre wahren Werthe nicht erkennen kann. Diess ist z. B. immer der Fall, wenn man einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

zu betrachten hat, in welchem $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich für einen speziellen Werth $x=a$ zugleich annulliren oder beide über alle Gränze hinaus wachsen, sobald sich x der Gränze a nähert. Die hierbei sich von selbst aufdrängende Frage nach den wahren Bedeutungen solcher unbestimmten Symbole lässt sich nun in jedem speziellen Falle leicht mit Hülfe der Differenzialrechnung beantworten.

I. Nach dem Theoreme (4) im vorigen Paragraphen ist unter der Voraussetzung, dass die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x=a$ sich gleichzeitig annulliren und in der Nachbarschaft von a stetig sind,

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi'(a+\lambda h)}{\psi'(a+\lambda h)},$$

mithin für $h=0$

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (1)$$

Dieser Satz dient unmittelbar zur Lösung unserer Aufgabe; denn wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich beide für $x=a$ annulliren, so erscheint der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x=a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; verschwinden nun $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ nicht ebenfalls gleichzeitig für $x=a$, so giebt der Quotient $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ den wahren Werth des Quotienten $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ an. Man kann diess auch unabhängig von dem Früheren auf folgende Weise sehen. Für

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ist identisch

$$f(x+\delta)=\frac{\varphi(x)+\{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)\}}{\psi(x)+\{\psi(x+\delta)-\psi(x)\}},$$

folglich für $x=a$, wo $\varphi(a)=\psi(a)=0$ ist,

$$f(a+\delta)=\frac{\varphi(a+\delta)-\varphi(a)}{\psi(a+\delta)-\psi(a)}=\frac{\frac{\varphi(a+\delta)-\varphi(a)}{\delta}}{\frac{\psi(a+\delta)-\psi(a)}{\delta}}$$

und hieraus ergiebt sich durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende δ

$$f(a), \text{ d. i. } \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

wie vorher. Annullirten sich die derivirten Funktionen $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ ebenfalls für $x=a$, so könnte man das nämliche Theorem auf sie selbst anwenden und hätte dann

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)},$$

folglich

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

Wäre wieder $\varphi''(a)=\psi''(a)=0$, so erhält man durch Anwendung des nämlichen Verfahrens

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'''(a)}{\psi'''(a)}.$$

Man übersieht leicht, dass man durch Fortsetzung dieser Schlüsse zu folgendem allgemeinen Theoreme gelangt:

Wenn die Funktionen

$$\varphi(x)\ ,\ \varphi'(x)\ ,\ \varphi''(x), \ldots .\ \varphi^{(n-1)}(x),$$
$$\psi(x)\ ,\ \psi'(x)\ ,\ \psi''(x), \ldots .\ \psi^{(n-1)}(x)$$

sämmtlich für $x=a$ verschwinden, dagegen $\varphi^{(n)}(x)$ und $\psi^{(n)}(x)$ die ersten unter den derivirten Funktionen sind, welche sich für $x=a$ nicht gleichzeitig annulliren, so findet man den wahren Werth des Quotienten $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ dadurch, dass man in den $n$ten Differenzialquotienten $\varphi^{(n)}(x)$ und $\psi^{(n)}(x)$ x in a übergehen lässt und die Grösse des Quotienten $\frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$ bestimmt.

Beispiele. Für $\varphi(x)=a^\mu-x^\mu$, $\psi(x)=a-x$ ist $\varphi'(x)=-\mu x^{\mu-1}$, $\psi'(x)=-1$; da diese Derivirten für $x=a$ nicht gleichzeitig verschwinden, so ist der wahre Werth von

$$\frac{a^\mu-x^\mu}{a-x}$$

für $x=a$ der Grösse $\mu a^{\mu-1}$ gleich oder, was das Nämliche bedeutet, $\mu a^{\mu-1}$ ist der Gränzwerth, dem sich jener Quotient nähert, wenn man x an a heranrücken lässt.

Für die Bestimmung des Werthes von

$$\frac{x-\sin x}{x^3}$$

in dem Falle $x=0$ hat man $\varphi'(x)=1-\cos x$, $\psi'(x)=3x^2$; da diese Funktionen sich wieder für $x=0$ annulliren, so gehen wir zu den zweiten Differenzialquotienten $\varphi''(x)=\sin x$, $\psi''(x)=6x$. Das Verschwinden beider für $x=0$ nöthigt uns, noch einen Schritt weiter zu thun, wobei wir $\varphi'''(x)=\cos x$, $\psi'''(x)=6$ bekommen. Aus diesen folgt nun für $x=0$, dass $\frac{1}{6}$ der wahre Werth unseres Quotienten für $x=0$ ist.

II. Sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ der Art, dass sie ins Unendliche hinaus wachsen, wenn x sich der Grösse a nähert, so kann man den Gränzwerth des Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

leicht mittelst der vorigen Regeln finden. Sobald nämlich $\varphi(x)$ und

$\psi(x)$ ins Unbegränzte wachsen, nähern sich die Funktionen $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(x)}$ der Gränze Null. Da nun

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

ist, so kommt die Aufgabe auf die vorige zurück, wenn man in der letzteren $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(x)}$ für $\psi(x)$ und $\varphi(x)$, folglich $-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$ und $-\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$ an die Stelle von $\psi'(x)$ und $\varphi'(x)$ setzt. Es ist dann

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\frac{\psi'(a)}{[\psi(a)]^2}}{\frac{\varphi'(a)}{[\varphi(a)]^2}}=\left[\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right]^2\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)},$$

woraus folgt:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (2)$$

Wenn also $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, statt wie früher für $x=a$ zu verschwinden, ins Unendliche wachsen, so bleibt doch die Regel noch ganz die nämliche.

Z. B. die Funktionen $\varphi(x)=l\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\psi(x)=\cot x$ nehmen ins Unbegränzte zu, sobald x in Null übergeht. Man hat aber $\varphi'(x)=-\frac{1}{x}$, $\psi'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$, folglich

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\sin^2 x}{x}.$$

Da dieser Quotient für $x=0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, so wenden wir die Regel I. an und haben

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{2\sin x\cos x}{1}.$$

Für $x=0$ werden hier $\varphi''(x)$ und $\psi''(x)$ nicht gleichzeitig Null und folglich ist nun für $x=0$

$$\frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}=\frac{2\sin x\cos x}{1}=0. \qquad (3)$$

Setzen wir $\varphi(x)=x^\mu$, $\psi(x)=e^x$, so nehmen für unendlich wachsende x auch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ins Unbegränzte zu; es ist aber $\varphi'(x)=\mu x^{\mu-1}$, $\psi'(x)=e^x$, hat man aber $\mu>1$, so werden hier wieder $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ gleichzeitig unendlich und dann muss man noch einmal differenziren, woraus $\varphi''(x)=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, $\psi''(x)=e^x$ folgt. Für $\mu>2$ würde man hier noch einmal differenziren müssen. Ist überhaupt n die erste ganze Zahl $>\mu$, so hat man

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x)=\varphi''(x)\ldots\ldots=\varphi^{(n-1)}(x)\\ \psi'(x)=\psi''(x)\ldots\ldots=\psi^{(n-1)}(x)\end{array}\right\}=\infty$$

für $x=\infty$, dagegen aber

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)}=\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-n+1)}{x^{n-\mu}\,e^x},$$

wo nun $n>\mu$ ist. Daraus folgt jetzt $\text{Lim}\,\dfrac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)}=0$, mithin auch

$$\text{Lim}\,\frac{x^\mu}{e^x}=0, \tag{4}$$

was auch μ sein möge.

§. 29.

Die vieldeutigen Symbole $0.\infty$, 0^0, ∞^0 *u. dergl.*

I. Sind zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ so beschaffen, dass $\varphi(x)$ sich der Gränze Null nähert, dagegen $\chi(x)$ ins Unendliche hinaus wächst, so bald man x dem bestimmten Werthe a näher und näher kommen lässt, so kann sich das Produkt $\varphi(x)\chi(x)$ einer endlichen Gränze nähern, die sich aber im Allgemeinen hinter der vieldeutigen Form $0.\infty$ versteckt. Der wahre Sinn derselben lässt sich leicht finden, wenn man entweder $\dfrac{1}{\chi(x)}=\psi(x)$ setzt, wodurch

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

wird, worin sich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x=a$ gleichzeitig annulliren und folglich die Regel I. in §. 28. anwendbar wird, oder dadurch, dass man $\dfrac{1}{\varphi(x)}=\omega(x)$ nimmt, was

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\chi(x)}{\omega(x)}$$

giebt, wobei $\chi(x)$ und $\omega(x)$ ins Unendliche hinauswachsen, sobald x in a übergeht und mithin die Regel II. des vorigen Paragraphen brauchbar ist.

Als Beispiel für das erste Verfahren diene die Annahme $\varphi(x) = l(2-\frac{x}{a})$, $\chi(x)=\tan\frac{\pi x}{2a}$, wobei für $x=a$ $\varphi(a)=0$, $\chi(a)=\infty$ wird. Es ist dann $\psi(x)=\cot\frac{\pi x}{2a}$ und mithin

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{l(2-\frac{x}{a})}{\cot\frac{\pi x}{2a}},$$

folglich nach der angegebenen Regel

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{-\frac{1}{2a-x}}{-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}}=\frac{2a}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}{2a-x},$$

woraus folgt, dass für $x=a$ der wahre Werth von

$$l(2-\frac{x}{a})\tan\frac{\pi x}{2a}=\frac{2}{\pi} \tag{1}$$

ist. Die zweite Methode dagegen lässt sich z. B. auf das Produkt $x^\mu lx$ anwenden, worin für $x=0$, $x^\mu=0$ wird (μ nämlich als positiv vorausgesetzt) und lx unbegränzt wächst. Es ist hier $\omega(x)=x^{-\mu}$, folglich

$$\varphi(x)\chi(x)=\frac{\chi(x)}{\omega(x)}=\frac{lx}{x^{-\mu}}$$

und nach der in §. 28. II. angegebenen Regel:

$$\frac{\chi'(x)}{\omega'(x)}=\frac{x^{-1}}{-\mu x^{-\mu-1}}=-\frac{x^\mu}{\mu}$$

und hieraus folgt, dass für $x=0$ bei positiven μ

$$x^\mu lx=0 \tag{2}$$

wird.

II. Wenn sich endlich ein Ausdruck wie $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x=a$ unter eine der vieldeutigen Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ stellt, so berücksichtige man, dass immer

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{lf(x)\cdot\varphi(x)}$$

ist und setze jetzt $lf(x)=\chi(x)$, so handelt es sich jetzt blos noch um die Bestimmung der Gränze, welcher sich der Exponent $\varphi(x)\chi(x)$ für $x=a$ nähert und diese Bestimmung kann nach der vorhin entwickelten Regel immer gegeben werden. So ist z. B. für $x=0$ der Ausdruck x^x vieldeutig $=0^0$; man hat aber

$$x^x=e^{xlx},$$

und da xlx nach dem Vorigen für $x=0$ verschwindet, so wird

$$x^x=1 \text{ für } x=0. \tag{3}$$

Für $x=0$ wird ferner

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\infty^0$$

Man hat aber

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^{-lx\sin x},$$

und da sich nach dem Vorigen $lx\sin x=0$ findet, wenn $x=0$, so wird

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1 \text{ für } x=0. \tag{4}$$

Ganz ähnlich stellt sich der Ausdruck

$$\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$$

für $x=a$ unter die Form 1^∞; dagegen ist

$$\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}=e^{l(2-\frac{x}{a})\tan\frac{\pi x}{2a}}=e^{\frac{2}{\pi}}, \tag{5}$$

wenn man die Gleichung (1) berücksichtigt.

Cap. VII. Maxima und Minima.

§. 30.

Maxima und Minima der Funktionen einer Variabelen.

Wenn eine Funktion einer Veränderlichen innerhalb des einen Intervalles immer zu-, während eines folgenden Intervalles dagegen

abnimmt, dann wieder wächst und so das Spiel mit Wachsthum und Abnahme forttreibt, so muss es in ihrem Verlaufe, vorausgesetzt, dass derselbe ein stetiger ist, gewisse Punkte geben, an welchen Uebergänge von dem Einen zum Andern eintreten. Diese Stellen lassen sich leicht schärfer bezeichnen; denn wenn die Werthe der Funktion im Steigen begriffen waren und dann wieder ins Fallen geriethen, so muss derjenige Werth, bei welchem das Erstere aufhörte und das Andere anfing, offenbar grösser sein als seine Nachbarn auf beiden Seiten, d. h. er muss ein sogenanntes Maximum bilden; wenn dagegen die Werthe der Funktion erst fielen und dann zu steigen anfingen, so ist derjenige Werth, welcher den Uebergang von Abnahme zu Wachsthum vermittelt, gewiss kleiner als seine beiderseitigen Nachbarn und stellt demnach ein Minimum dar. Es versteht sich nach dieser Erklärung von selbst, dass hier unter Maximum und Minimum nicht gerade der absolut grösste oder kleinste Werth der Funktion, den dieselbe während ihres ganzen Verlaufes annimmt, verstanden wird, sondern dass es sich hier nur um gewisse Wendepunkte in dem Verlaufe der Funktion handelt; hat die letztere nur einen solchen, so geht dann allerdings das relative Maximum oder Minimum in das absolute über.

Wir wissen aber aus §. 26. I., dass der Differenzialquotient einer Funktion das Criterium für ihr Wachsthum oder ihre Abnahme ist, und zwar so, dass $F(x)$ von $x=a-\delta$ bis $x=a$ wächst, wenn $F'(x)$ innerhalb jenes Intervalles positiv bleibt, dass dagegen $F(x)$ von $x=a$ bis $x=a+\delta$ abnimmt, wenn für diese Strecke $F'(x)$ negativ ist. Soll nun beides zugleich statt finden, also $F(x)$ für $x=a$ ein Maximum werden, so muss $F'(x)$ an der Stelle $x=a$ aus dem Positiven ins Negative übergehen; dies kann aber bei stetigem Verlaufe von $F'(x)$ nur mittelst des Durchganges durch Null geschehen, bei unstetigem $F'(x)$ (wie z. B. bei $\frac{1}{a-x}$) auch durch Ueberspringen aus $+\infty$ nach $-\infty$. Es muss demnach $F'(a)=0$ oder $F'(a)=\infty$, d. i. a eine Wurzel der Gleichung

$$F'(x)=0, \text{ oder } F'(x)=\infty \tag{1}$$

sein. Ganz die nämlichen Betrachtungen passen auch auf die Voraussetzung, dass $F(x)$ von $x=a-\delta$ bis $x=a$ ab- und von $x=a$ bis $x=a+\delta$ zunehme, in welchem Falle $F(a)$ ein Minimum bildet. Man findet demnach diejenigen Werthe von x, die $F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, dadurch, dass man den Differenzialquotienten

von $F(x)$ der Null oder dem ∞ gleich setzt und die so entspringende Gleichung (1) nach x auflöst.

Um nun aber zu entscheiden, welche von den aus no. (1) für x gefundenen Werthen zu einem Maximum oder Minimum führen, verfahren wir wie folgt. Ist a irgend einer von diesen zu untersuchenden Werthen so substituiren wir denselben an die Stelle von x in den folgenden (höheren) Differenzialquotienten von $F(x)$ und erhalten so die Reihe

$$F''(a)\ ,\ F'''(a)\ ,\ F^{IV}(a), \ldots.$$

Hier kann es sich zufällig treffen, dass eine oder mehrere dieser Grössen, von der Linken zur Rechten fortgehend, sich annulliren, und um daher die Betrachtung allgemein zu halten, sei $F^{(n)}(x)$ der erste höhere Differenzialquotient, welcher für $x=a$ nicht verschwindet. Nun haben wir aber nach §. 27. no. (10) unter dieser Voraussetzung

$$F(a+h)-F(a)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(a+\lambda_n h), \qquad (2)$$

wo man nun h immer so klein nehmen kann, dass $F^{(n)}(a+\lambda_n h)$ mit $F^{(n)}(a)$ gleiches Vorzeichen hat. Denn da $\lambda_n h < h$ ist (wegen $\lambda_n < 1$), so liegt $a+\lambda_n h$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+h$, welches man wegen des beliebigen h so eng machen kann, dass die derivirte Funktion $F^{(n)}(x)$ während desselben ihr Vorzeichen nicht ändert. In Bezug auf die Gleichung (2) sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n ungerade oder gerade ist.

A. Für ein ungerades n hat man, wenn $F^{(n)}(x)$ positiv von $x=0$ bis $x=a+h$ ist,

$$F(a+h)-F(a)$$

positiv, also

$$F(a+h) > F(a),$$

und bei negativen h

$$F(a-h)-F(a)$$

negativ, also

$$F(a) > F(a-h),$$

mithin beides zusammengenommen

$$F(a+h) > F(a) > F(a-h),$$

und ebenso wenn $F^{(n)}(x)$ negativ von $x=a$ bis $x=a+h$ wäre:

$$F(a+h) < F(a) < F(a-h).$$

In diesem Falle bildet $F(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum, weil es immer zwischen $F(a+h)$ und $F(a-h)$ liegt.

B. Ist dagegen n gerade und $F^{(n)}(x)$ positiv in der Nähe von $x=a$, so wird

$$F(a+h)-F(a)$$

positiv, also

$$F(a+h) > F(a),$$

und bei negativen h, wo jetzt h^n sein Vorzeichen nicht ändert,

$$F(a-h)-F(a)$$

positiv, also

$$F(a-h) > F(a),$$

mithin beides zusammengenommen

$$F(a-h) > F(a) < F(a+h),$$

woraus erhellt, dass jetzt $F(a)$ ein Minimum ist. Wäre $F^{(n)}(x)$ in der Nachbarschaft von $x=a$ negativ, so hätte man

$$F(a+h)-F(a)$$

negativ, also

$$F(a) > F(a+h),$$

und ebenso bei negativen h

$$F(a-h)-F(a)$$

negativ, also

$$F(a) > F(a-h),$$

mithin zusammen

$$F(a-h) < F(a) > F(a+h),$$

woraus sich ergiebt, dass $F(a)$ in diesem Falle ein Maximum ist.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so können wir folgende Regel aussprechen: wenn $F^{(n)}(x)$ der erste für $x=a$ nicht verschwindende Differenzialquotient und n ungerader Ordnung ist, so bildet $F(x)$ für $x=a$ weder ein Maximum noch ein Minimum; ist dagegen n gerade, so macht der Werth $x=a$ die Funktion $F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem $F^{(n)}(a)$ negativ oder positiv ausfällt. Mittelst dieses Satzes lässt sich nun leicht entscheiden, welche von den Wurzeln der Gleichung $F'(x)=0$ oder $F'(x)=\infty$, unter denen alle zu einem Maximum oder Minimum führenden Werthe enthalten sind, ein Grösstes

oder Kleinstes bilden oder nicht. Um diess an einem Beispiele zu zeigen, sei

$$F(x)=x^3-9x^2+24x-7$$

die zu untersuchende Funktion. Man findet sogleich

$$F'(x)=3(x^2-6x+8)$$
$$F''(x)=6(x-3)$$
$$F'''(x)=6$$
$$F^{IV}(x)=F^{V}(x)=\ldots=0.$$

Aus $F'(x)=0$ ergiebt sich

$$x^2-6x+8=0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind $x=2$, $x=4$. Da $F''(x)$ für keinen dieser beiden Werthe verschwindet, so entscheidet dieser Differenzialquotient, es wird nämlich

$F''(x)$ negativ für $x=2$, also $F(x)$ ein Maximum,
$F''(x)$ positiv „ $x=4$, „ $F(x)$ „ Minimum.

Hiernach ist der Lauf der Funktion leicht zu übersehen; während des Intervalles $x=0$ bis $x=2$ wächst sie beständig von $F(0)=-7$ auf $F(2)=13$, nimmt von da ab während des Intervalles $x=2$ bis $x=4$, an dessen Ende sie das Minimum $F(4)=9$ erreicht und wächst von da ins Unendliche hinaus. Auf der negativen Seite nimmt sie unbegränzt ab, wie man leicht aus $F'(x)$ erkennen kann. Nach diesen Andeutungen würde es nun keine Schwierigkeiten haben, eine graphische Darstellung der Curve zu geben, welche durch die Gleichung $y=F(x)$ repräsentirt wird.

§ 31.

Geometrische Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Es möge hier die Beantwortung einiger geometrischen Fragen als Beispiele für die Lehren des §. 30. folgen, wobei das relative Maximum mit dem absoluten zusammenfällt.

I. Welcher ist, seinem kubischen Inhalte nach, der grösste Cylinder, der sich aus einem gegebenen Kegel herausschneiden lässt?

Sei in Fig. 13 ABC der gegebene Kegel, der Radius OA der Grundfläche $=a$, die Höhe $OC=b$ und $OX=x$ der Halbmesser der Grund-

fläche des Cylinders, der zu einem Maximum werden soll, die Höhe XY desselben $= y$. Der Inhalt des Cylinders ist nun nach bekannten stereometrischen Lehren $= \pi x^2 y$, wo sich aber y durch x ausdrücken lässt, weil

$$AO : OC = AX : XY$$

oder

$$a : b = a - x : y$$

ist, woraus folgt, dass der Inhalt des Cylinders, der $F(x)$ heissen möge, durch die Gleichung

$$F(x) = \frac{b\pi}{a}(ax^2 - x^3) \qquad (1)$$

ausgedrückt wird. Hier ist nun weiter

$$F'(x) = \frac{b\pi}{a}(2ax - 3x^2)$$

$$F''(x) = \frac{b\pi}{a}(2a - 6x)$$

und aus $F'(x) = 0$ folgen für x zwei Werthe:

$$x = 0 \text{ und } x = \frac{2}{3}a. \qquad (2)$$

$F''(x)$ verschwindet für keinen von beiden und wird positiv für den ersten, negativ für den zweiten und also entspricht $x = 0$ einem Minimum, $x = \frac{2}{3}a$ einem Maximum. Dieser grösste Cylinder hat den Inhalt $F(\frac{2}{3}a) = \frac{4}{27}a^2 b\pi$ und kann nun wegen der Bestimmung von OX leicht construirt werden.

II. Welcher von den verschiedenen Cylindern, die sich aus einem gegebenen Kegel schneiden lassen, hat den grössten Mantel?

Da x der Radius der Grundfläche des fraglichen Cylinders, y seine Höhe ist, so wird die Grösse des Mantels durch $2xy\pi$ ausgedrückt, oder wegen des Werthes von y durch

$$\frac{2\pi b}{a}(ax - x^2) = F(x). \qquad (3)$$

Hieraus folgt durch zweimalige Differenziation:

$$F'(x) = \frac{2\pi b}{a}(a - 2x), \quad F''(x) = -\frac{4\pi b}{a}$$

und aus $F'(x)=0$

$$x=\frac{1}{2}a. \tag{4}$$

Da $F''(x)$ jedenfalls negativ bleibt, was auch x sein möge, so entspricht der gefundene Werth einem Maximum.

III. Wie bestimmt man denjenigen aus einem Kegel zu schneidenden Cylinder, der die grösste Oberfläche hat?

Da die Oberfläche eines Cylinders aus dem Mantel und der doppelt genommenen Grundfläche besteht, so ist für unseren Fall

$$F(x)=\frac{2\pi b}{a}(ax-x^2)+2x^2\pi \tag{5}$$

folglich

$$F'(x)=2\pi(b-\frac{2b}{a}x+2x),$$

$$F''(x)=2\pi(-\frac{2b}{a}+2)=\frac{4\pi}{a}(a-b).$$

Aus der letzten Gleichung erhellt, dass nur dann ein Maximum eintreten kann, wenn $a-b$ negativ, d. h. $b>a$ ist und unter dieser Voraussetzung giebt $F'(x)=0$ für x den Werth

$$x=\frac{ab}{2(b-a)}\ ,\ b>a. \tag{6}$$

Wäre dagegen $b<a$, so würde x negativ ausfallen, und diess bedeutet hier eine Unmöglichkeit, weil man x blos das Intervall $x=0$ bis $x=a$ durchlaufen zu lassen braucht, um alle nach den Bedingungen der Aufgabe überhaupt möglichen Cylinder zu bekommen. Dass in der That in dem Falle $b<a$ kein Maximum vorkommen kann, sieht man auch aus der Formel für $F'(x)$, wenn man sie in folgender Gestalt darstellt:

$$F'(x)=2\pi\{b+2(1-\frac{b}{a})x\}.$$

Da nun $b<a$ sein soll, so ist $\frac{b}{a}$ ein ächter Bruch, mithin $1-\frac{b}{a}$ positiv und folglich bleibt der Differenzialquotient $F'(x)$ selbst stets positiv, wenn x von 0 bis a geht. Die Oberflächen der successiven Cylinder wachsen also beständig von Null an, wo der entsprechende Cylinder eine Gerade (die Kegelachse) ist, bis $a^2\pi$, wo der Cylinder in eine Ebene (die Kegelbasis) übergegangen ist.

IV. Wie findet man den an Inhalt grössten Cylinder, der sich aus einer gegebenen Kugel heraus schneiden lässt?

Sei in Fig. 14. der Kugelhalbmesser $OY=r$, ferner $X=x$ und $XY=y$, so wird der Inhalt des Cylinders, der $2x$ zur Höhe und y zum Basisradius hat, durch $2xy^2\pi$ ausgedrückt; da andererseits $y^2=r^2-x^2$ ist, so haben wir

$$2\pi(r^2x-x^3)=F(x) \tag{7}$$

zu einem Maximum zu machen. Es ergiebt sich hierzu

$$F'(x)=2\pi(r^2-3x^2),$$
$$F''(x)=-2\pi.6x,$$

und folglich aus $F'(x)=0$

$$x=\pm\frac{r}{\sqrt{3}}. \tag{8}$$

Der positive Werth entspricht hier einem Maximum, der negative kann nicht in Betracht kommen, weil man alle der Aufgabe nach möglichen Cylinder schon dadurch erhält, dass man x von $x=0$ bis $x=r$ gehen lässt.

V. Welcher von allen aus einer Kugel möglichen Cylindern hat den grössten Mantel?

Nach der vorigen Bezeichnung ist $4\pi xy$ die Grösse des Mantels, also wegen $y=\sqrt{r^2-x^2}$ haben wir

$$F(x)=4\pi x\sqrt{r^2-x^2} \tag{9}$$

zu einem Maximum zu machen. Es findet sich nun leicht

$$F'(x)=4\pi\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}},$$
$$F''(x)=4\pi\frac{x(2x^2-3r^2)}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}.$$

Aus $F'(x)=0$ erhält man

$$x=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

wo aber nur das obere Zeichen Sinn hat und zu einem Maximum führt, wie man aus der Formel für $F''(x)$ ersieht. Da $F'(x)$ eine gebrochene Funktion bildet, deren Nenner Null werden kann, so dürfen wir auch noch $F'(x)=\infty=\frac{1}{0}$ setzen, woraus $x=r$ folgt. Dieser Werth ent-

spricht einem Minimum, weil der Cylinder sich dann auf einen Durchmesser der Kugel reduzirt.

VI. Unter welchen Umständen wird die Oberfläche eines aus einer gegebenen Kugel geschnittenen Cylinders ein Maximum?

Addiren wir zum Mantel des Cylinders seine Grundfläche ($=y^2\pi$) doppelt genommen, so ist jetzt

$$F(x)=4\pi x\sqrt{r^2-x^2}+2\pi(r^2-x^2), \tag{11}$$

$$F'(x)=4\pi\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}-4\pi x,$$

$$F''(x)=4\pi\frac{x(2x^2-3r^2)}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}-4\pi.$$

Aus $F'(x)$ resultirt die Gleichung

$$r^2-2x^2=x\sqrt{r^2-x^2}, \tag{12}$$

aus welcher durch Rationalmachen die folgende hervorgeht:

$$(r^2-2x^2)^2=x^2(r^2-x^2), \tag{13}$$

und durch Auflösung derselben ergeben sich für x die 4 in folgendem Ausdruck enthaltenen Werthe:

$$x=\pm r\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm\frac{1}{\sqrt{5}})}. \tag{14}$$

Nun sind aber nicht alle Wurzeln der Gleichung (13) auch Wurzeln der Gleichung (12), weil diese in Bezug auf x von niedrigerer Dimension ist als jene; substituiren wir nämlich die Werthe von x in no. (12), so muss

$$r^2-2r^2\frac{1}{2}(1\pm\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$=\left(\pm r\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm\frac{1}{\sqrt{5}})}\right)\left(r\sqrt{\frac{1}{2}(1\mp\frac{1}{\sqrt{5}})}\right)$$

sein, wobei der zweite Faktor rechts kein doppeltes Vorzeichen hat, weil das Radikal in (12) wesentlich positiv ist. Die vorstehende Gleichung giebt nun bei weiterer Reduktion

$$\mp\frac{1}{\sqrt{5}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5})}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}},$$

wobei sich die Vorzeichen nicht auf einander beziehen. Man sieht hier-

aus, dass, wenn nicht ein Widerspruch eintreten soll, die beiden in (14) vorkommenden Radikale mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden müssen, dass also für x blos die beiden Werthe

$$x = +r\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{5}})}, \qquad (15)$$
$$x = -r\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{5}})}$$

als Auflösungen der Gleichung (12) übrig bleiben. Dagegen sind die Werthe

$$x = +r\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{5}})}, \qquad (16)$$
$$x = -r\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{5}})}$$

zwar Wurzeln der Gleichung (13), aber nicht der Gleichung (12). Da wir nun für x keinen negativen Werth zulassen können, so ist der in (15) verzeichnete Ausdruck die Auflösung unserer Aufgabe, die Summe des Cylindermantels und der doppelten Basis zu einem Maximum zu machen, dagegen bildet der Ausdruck in (16) die Auflösung der Aufgabe, welche entsteht, wenn man statt Summe sagt Differenz.

VII. Welcher ist, seinem Volumen nach, der grösste Kegel, den man aus einer gegebenen Kugel schneiden kann?

Sei in fig. 15. der Kugelhalbmesser $AO = OY = r$, $OX = x$, $XY = y$, so ist der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}(r+x)y^2\pi$ und weil $y^2 = r^2 - x^2$ ist,

$$F(x) = \frac{\pi}{3}(r+x)(r^2-x^2). \qquad (17)$$

Hieraus findet man leicht

$$F'(x) = \frac{\pi}{3}(r^2-2rx-3x^2),$$
$$F''(x) = -\frac{2\pi}{3}(r+3x)$$

und aus $F'(x)$ ergeben sich für x die beiden Werthe

$$x = -r, \; x = \frac{1}{3}r \qquad (18)$$

von denen der erste einem Minimum entspricht, weil sich dann der Kegel auf einen blosen Punkt A reduzirt, und der zweite ein Maximum giebt.

VIII. Welcher von den Kegeln, die man aus einer gegebenen Kugel schneiden kann, hat den grössten Mantel?

Da nach der vorigen Bezeichnung der Basishalbmesser des fraglichen Kegels $= y$ und seine Höhe $= r + x$ ist, so haben wir vermöge einer bekannten stereometrischen Regel für seinen Mantel $\pi y \sqrt{(r+x)^2+y^2}$, oder wegen des Werthes von y

$$F(x) = \pi \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{2r^2+2rx},$$

und wenn man berücksichtigt, dass $r^2 - x^2 = (r + x)(r - x)$, $2r^2+2rx=2r(r+x)$ ist,

$$F(x) = \pi \sqrt{2r}\,(r + x) \sqrt{r-x}. \qquad (19)$$

Hieraus findet man

$$F'(x) = \pi \sqrt{2r}\, \frac{r-3x}{2\sqrt{r-x}}$$

$$F''(x) = \pi \sqrt{2r}\, \frac{3x-5r}{4\sqrt{(r-x)^3}}$$

also, wenn $F'(x) = 0$ genommen wird

$$x = \frac{1}{3} r.$$

Wir können demnach mit Berücksichtigung von VII sagen: der seinem Inhalte nach grösste Kegel, den man aus einer Kugel herausnehmen kann, hat auch den grössten Mantel.

IX. Welcher von den Kegeln, die man aus einer gegebenen Kugel schneiden kann, hat die grösste Oberfläche?

Da die ganze Oberfläche gleich dem Mantel plus der Basis ist, welche letztere durch $y^2\pi=(r^2-x^2)\pi$ ausgedrückt wird, so haben wir

$$F(x) = \pi \{ \sqrt{2r}\,(r-x) \sqrt{r-x} + r^2-x^2 \}$$

$$F'(x) = \pi \{ \sqrt{2r}\, \frac{r-3x}{2\sqrt{r-x}} - 2x \}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(r-3x)\sqrt{2r} - 4x\sqrt{r-x}}{\sqrt{r-x}}$$

$$F''(x) = \pi \{ \sqrt{2r}\, \frac{3x-5r}{4\sqrt{(r-x)^3}} - 2 \}$$

Aus $F'(x)$ ergiebt sich für x die Gleichung

$$(r-3x)\sqrt{2r} = 4x\sqrt{r-x}, \tag{21}$$

die nach beiderseitiger Quadrirung in

$$16x^3 + 2x^2r - 12xr^2 + 2r^3 = 0$$

oder

$$8x^3 + x^2r - 6xr^2 + r^3 = 0 \tag{22}$$

übergeht. Nehmen wir

$$x = \frac{r}{\xi} \tag{23}$$

wo nun ξ eine neue Unbekannte bezeichnet, so geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$\xi^3 - 6\xi^2 + \xi + 8 = 0,$$

so dass also ξ eine absolute Zahl ist.

Um nun die vorstehende cubische Gleichung aufzulösen, braucht man blos zu bemerken, dass $\xi = -1$ die linke Seite auf Null reduzirt, mithin $\xi = -1$ eine Wurzel derselben und $\xi + 1$ ein Divisor der ganzen Funktion links ist. In der That kann man statt der obigen Gleichung die folgende schreiben:

$$(\xi+1)(\xi^2 - 7\xi + 8) = 0,$$

und wenn man auch den zweiten Faktor $= 0$ setzt, so ergiebt sich durch Auflösung dieser quadratischen Gleichuug

$$\xi = \frac{7 \mp \sqrt{17}}{2}$$

und diese zwei Werthe sind die beiden anderen Wurzeln der cubischen Gleichung. Es giebt demnach vermöge der Formel (23) für x drei Werthe

$$x_1 = -r$$

$$x_2 = \frac{2}{7-\sqrt{17}}\, r = (0{,}6951941)\, r$$

$$x_3 = \frac{2}{7+\sqrt{17}}\, r = (0{,}1798063)\, r.$$

Diese drei Wurzeln der Gleichung (22) sind aber nicht sämmtlich Wurzeln von (21); x_1 nämlich macht die linke Seite dieser Gleichung positiv, die rechte negativ, x_2 die linke negativ, die rechte positiv und folglich sind x_1 und x_2 nicht Wurzeln der Gleichung (21), sondern vielmehr der folgenden:

$$(r-3x)\sqrt{2r} = -4x\sqrt{r-x}.$$

Dagegen befriedigt der Werth x_3 die Gleichung (21) und macht zugleich $F''(x)$ negativ, also $F(x)$ zu einem Maximum, daher ist $x=x_3$ oder

$$x = \frac{2r}{7+\sqrt{17}} \tag{24}$$

die Auflösung unserer Aufgabe.

§ 32.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer von einander unabhängigen Variabelen.

Die Definition, welche für das Maximum oder Minimum der Funktionen mit nur einer Veränderlichen gegeben worden ist, lässt sich mit der grössten Leichtigkeit auch auf Funktionen mehrerer Variabelen ausdehnen, wobei wir zunächst voraussetzen, dass diese letzteren von einander völlig unabhängig sind. Ist nämlich $F(x,y,z\ldots)$ eine solche Funktion, die wir im Folgenden der Kürze wegen oft blos mit F bezeichnen wollen, so kann es unter Umständen ein zusammengehöriges System von Werthen $x=a$, $y=b$, $z=c$ u. s. f. geben, welches den Werth von F grösser oder kleiner macht als alle Nachbarwerthe, d. h. diejenigen, welche entstehen, wenn man x von $a-h$ bis $a+h$, y von $b-k$ bis $b+k$, z von $c-l$ bis $c+l$ etc. gehen lässt, wobei h, k, $l\ldots$ beliebig kleine Grössen bezeichnen; im ersten Falle würde der Werth von F ein Maximum, im zweiten ein Minimum sein, und es kommt nun darauf an, das System von Werthen $x=a$, $y=b$, $z=c$ etc. zu finden, welches ein solches erzeugt.

Diese Untersuchung lässt sich durch einen sehr einfachen Gedanken auf den Fall reduziren, dass die zu betrachtende Funktion nur eine Variabele enthält. Denken wir uns nämlich, es enthalte die Funktion F ausser den schon genannten Veränderlichen x, y, $z,\ldots$ noch eine, die ω heissen möge, und es seien x, y, $z,\ldots$ gewisse Funktionen derselben, etwa $x=\varphi(\omega)$, $y=\psi(\omega)$, $z=\chi(\omega)$ etc., so können wir uns alle Veränderungen von x, y, $z,\ldots$ durch Veränderungen von ω allein hervorgerufen denken. Wenn es für den ersten Augenblick scheinen möchte, als sei hierdurch die Voraussetzung der

völligen Unabhängigkeit der Grössen x, y, z etc. von einander aufgehoben worden, in so fern wenigstens ein mittelbarer Zusammenhang zwischen ihnen durch das hinzugesetzte ω statuirt zu sein scheint, so ist dagegen zu bedenken, dass die Natur der Funktionen φ, ψ, χ,... durchaus unbestimmt gelassen worden ist und also sogar mit dem Werthe von ω sich selbst wieder ändern darf, wodurch offenbar die Allgemeinheit der Voraussetzung wieder restituirt wird. So wie nun aber $x=\varphi(\omega)$, $y=\psi(\omega)$, $z=\chi(\omega)$ etc. war, so müssen die speziellen Werthe a, b, c, ... entsprechend Funktionen eines speziellen Werthes von ω etwa α sein; könnte man daher diesen Spezialwerth α finden, für welchen die Funktion F, als Funktion von ω allein betrachtet, ihr Maximum oder Minimum erreichte, so würden sich hieraus sogleich a, b, c, ... mit Hülfe der Gleichungen $a=\varphi(\alpha)$, $b=\psi(\alpha)$, $c=\chi(\alpha)$ etc. ergeben. Dieser Gedanke lässt sich in folgender Weise ausführen.

Soll die Funktion F für einen gewissen Werth ihrer Variablen ω ihr Maximum oder Minimum erreichen, so muss derselbe eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{dF}{d\omega}=0$$

sein, und hier können wir der linken Seite die Form geben

$$\frac{dF}{d\omega}=\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dz}{d\omega}\right)+\dots \quad (1)$$

worin die Differenzialquotienten rechts partielle sind; soll nun aber dieser Ausdruck Null werden, so kann diess, weil $\frac{dx}{d\omega}=\varphi'(\omega)$, $\frac{dy}{d\omega}=\psi'(\omega)$, $\frac{dz}{d\omega}=\chi'(\omega)$ etc. ganz beliebige Grössen sind, nur dann geschehen, wenn einzeln für sich die Coeffizienten dieser Grössen verschwinden, also die Gleichungen

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=0\ ,\ \left(\frac{dF}{dy}\right)=0\ ,\ \left(\frac{dF}{dz}\right)=0\ ,\ \text{etc.} \quad (2)$$

gleichzeitig statt finden. Da dieser Gleichungen so viele sind als Variable x, y, z etc., so lassen sich hieraus die unbekannten Werthe a, b, c, ... derselben eliminiren, womit dann die erste Hälfte der Aufgabe gelöst ist. Es bleibt nun noch die Diskussion übrig, welche von den gefundenen Werthen einem Maximum und welche einem Minimum ent-

sprechen. Hierzu ist es nöthig, die höheren Differenzialquotienten der Gleichung (1) aufzusuchen, wobei wir zur Abkürzung

$$\frac{dx}{d\omega} = Dx\,,\ \frac{dy}{d\omega} = Dy\,,\ \frac{dz}{d\omega} = Dz\,,\ldots \qquad (3)$$

setzen wollen; zugleich macht sich aber, wenn der Calcül nicht zu verwickelt werden soll, eine Unterscheidung der Fälle nöthig, in denen die Funktion F zwei oder drei oder noch mehr Veränderliche enthält.

I. Ist F eine Funktion von x und y, so ergiebt sich leicht durch Differenziation der Gleichung

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dF}{dx}\,Dx + \frac{dF}{dy}\,Dy$$

die folgende:

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{d\,Dx}{d\omega} + \frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\omega}\,Dx + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{dDy}{d\omega} + \frac{d^2F}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{d\omega}\,Dy$$
$$+ \frac{dF}{dx}\cdot\frac{d\,Dy}{d\omega} + \frac{d^2F}{dy\,dx}\cdot\frac{dy}{d\omega}\,Dx + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d\,Dy}{d\omega} + \frac{d^2F}{dy^2}\cdot\frac{dy}{d\omega}\,Dy.$$

Substituiren wir hier für x und y die aus no. (2) gefundenen Werthe, so fallen die mit $\frac{dF}{dx}$ und $\frac{dF}{dy}$ multiplizirten Glieder weg und wegen der in (3) eingeführten Bezeichnung ist dann

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{d^2F}{dx^2}(Dx)^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\,Dx\,Dy + \frac{d^2F}{dy^2}\,(Dy)^2. \qquad (4)$$

Sollen nun die gefundenen Werthe ein Maximum oder Minimum bilden, so muss der vorliegende Ausdruck entweder constant negativ oder positiv sein und zwar für alle Dx und Dy. Hierzu gehört erstlich, dass man nicht gleichzeitig

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2F}{dx\,dy} = \frac{d^2F}{dy^2} = 0 \qquad (5)$$

hat; und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so muss der Ausdruck in (4) oder der folgende

$$\frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^2 + 2\,\frac{d^2F}{dx\,dy}\left(\frac{Dx}{Dy}\right) + \frac{d^2F}{dy^2} \qquad (6)$$

immer gleiches Vorzeichen behalten, von dem dann noch zu entscheiden wäre, in welchen Fällen es das Plus- und in welchen das Minuszeichen ist. Wenn aber ein Ausdruck von der Form

$$\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma$$

für alle reellen s sein Vorzeichen behalten soll, so müssen die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma = 0$$

imaginär oder

$$\beta^2 - \alpha\gamma < 0$$

sein; denn wenn eine reelle Wurzel $s = s_1$ existirte, so würde die Funktion $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma$ ihr Zeichen wechseln, sobald man s das Intervall $s_1 - \delta$ bis $s_1 + \delta$ durchlaufen liesse, wo δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet. Wenden wir diess auf den Ausdruck in (6) an, so ergiebt sich die Ungleichung

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{d^2F}{dy^2} < 0 \qquad (7)$$

als Bedingung dafür, dass die Funktion in (6) oder die rechte Seite in (5) immer das nämliche Vorzeichen hat. Die vorstehende Bedingung vertritt zugleich die in no. (5) ausgesprochene, weil, wenn sie erfüllt ist, nicht alle in (5) stehenden Grössen gleichzeitig verschwinden können.

Wenn nun die Werthe $x = a$ und $y = b$ der Ungleichung (7) Genüge leisten, so sind offenbar

$$\frac{d^2F}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2F}{dy^2}$$

von gleichem Vorzeichen, weil im Gegenfalle die Summe zweier positiven Grössen negativ wäre, und da nun nach dem Vorigen die rechte Seite von (4) für alle Dx und Dy das nämliche Vorzeichen behält, so kann man auch $Dy = 0$ setzen, woraus man ersieht, dass jener Ausdruck immer das nämliche Vorzeichen hat wie

$$\frac{d^2F}{dx^2}(Dx)^2 \text{ oder wie } \frac{d^2F}{dx^2},$$

also mit diesem Differenzialpuotienten zugleich positiv oder negativ ist. Aus allem Diesen zusammen ergiebt sich nun das Criterium:

die aus den Gleichungen $\frac{dF}{dx} = 0$ und $\frac{dF}{dy} = 0$ abgeleiteten Werthe von x und y müssen zunächst die Bedingung

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{d^2F}{dy^2} < 0 \qquad (8)$$

erfüllen und erzeugen das Maximum oder Minimum von $F(x,y)$, je nachdem für sie die Differenzialquotienten

$$\frac{d^2F}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2F}{dy^2} \tag{9}$$

gleichzeitig negativ oder positiv ausfallen.

Um diess auf ein Beispiel anzuwenden, sei

$$F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G;$$

man findet dann sogleich

$$\frac{dF}{dx} = 2(Ax + By + D),$$

$$\frac{dF}{dy} = 2(Bx + Cy + E),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2A, \quad \frac{d^2F}{dx\,dy} = 2B, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 2C.$$

Aus den Gleichungen $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$ ergeben sich für x und y die beiden Werthe

$$x = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}, \quad y = \frac{AE - BD}{B^2 - AC};$$

zunächst muss nun sein

$$B^2 - AC < 0$$

und es findet dann ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem A und C zugleich negativ oder positiv sind.

Um auch ein Beispiel zu haben, in welchem sich der Calcül nicht vollständig hinausführen lässt, behandeln wir auch die Aufgabe: „in der Ebene eines gegebenen Dreiecks ABC einen Punkt O so zu bestimmen, dass die Summe der μten Potenzen der Entfernungen AO, BO, CO ein Minimum wird.“ Setzen wir $CO = x$, $BO = x$, $AO = x_2$, so wäre demnach Fig. 16.

$$x^\mu + x_1^\mu + x_2^\mu$$

zu einem Minimum zu machen. Wenn ferner $\angle BCO = y$, $\angle BCA = \gamma$ und $BC = a$, $AC = b$, so ist

$$x_1 = \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos y},$$

$$x_2 = \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\cos(\gamma - y)}.$$

Nun ergiebt sich für $F(x,y) = x^\mu + x_1^\mu + x_2^\mu$:

$$\frac{dF}{dx}=\mu x^{\mu-1}+\mu x_1^{\mu-1}\left(\frac{dx_1}{dx}\right)+\mu x_2^{\mu-1}\left(\frac{dx_2}{dx}\right),$$

$$\frac{dF}{dy}=\mu x_1^{\mu-1}\left(\frac{dx_1}{dy}\right)+\mu x_2^{\mu-1}\left(\frac{dx_2}{dy}\right),$$

d. i. vermöge der Werthe von x_1 und x_2:

$$\frac{dF}{dx}=\mu x^{\mu-1}+\mu\frac{x-a\cos y}{x_1}x_1^{\mu-1}+\mu\frac{x-b\cos(\gamma-y)}{x_2}x_2^{\mu-1},$$

$$\frac{dF}{dy}=\mu\frac{ax\sin y}{x_1}x_1^{\mu-1}-\mu\frac{bx\sin(\gamma-y)}{x_2}x_2^{\mu-1}.$$

Setzt man beide Differenzialquotienten $=0$, so erhält man für x und y die beiden Gleichungen:

$$x^{\mu-1}=\frac{a\cos y-x}{x_1}x_1^{\mu-1}+\frac{b\cos(\gamma-y)-x}{x_2}x_2^{\mu-1},$$

$$0=\frac{a\sin y}{x_1}x_1^{\mu-1}+\frac{b\sin(\gamma-y)}{x_2}x_2^{\mu-1}.$$

An eine Elimination von x und y aus denselben ist nun bei der Willkührlichkeit des Exponenten μ gar nicht zu denken, dagegen können wir aber aus diesen Gleichungen zwei andere sehr einfache ableiten. Setzen wir nämlich $\angle BOC'=\varphi$, $\angle AOC''=\psi$ und betrachten die rechtwinklichen Dreiecke CBP und CAQ, so ergiebt sich, dass die vorigen Gleichungen die folgende Form annehmen:

$$x^{\mu-1}=x_1^{\mu-1}\cos\varphi+x_2^{\mu-1}\cos\psi,$$

$$0=x_1^{\mu-1}\sin\varphi-x_2^{\mu-1}\sin\psi.$$

Eliminiren wir hieraus einmal $x_2^{\mu-1}$ und einmal $x_1^{\mu-1}$, so wird

$$x^{\mu-1}\sin\psi=x_1^{\mu-1}\sin(\varphi+\psi),$$

$$x^{\mu-1}\sin\varphi=x_2^{\mu-1}\sin(\varphi+\psi);$$

und wenn wir bemerken, dass $\sin\psi=\sin AOC$, $\sin\varphi=\sin BOC$, $\varphi+\psi=AOB$ ist,

$$x^{\mu-1}\sin AOC=x_1^{\mu-1}\sin AOB,$$

$$x^{\mu-1}\sin BOC=x_2^{\mu-1}\sin AOB.$$

Symmetrischer gestaltet sich diess, wenn wir statt x, x_1, x_2 schreiben ζ, η, ξ und $\angle AOB=(\xi,\eta)$, $\angle AOC=(\xi,\zeta)$, $\angle BOC=(\eta,\zeta)$ setzen. Es ist dann

$$\zeta^{\mu-1}\sin(\xi,\zeta)=\eta^{\mu-1}\sin(\xi,\eta),$$

$$\zeta^{\mu-1}\sin(\eta,\zeta)=\xi^{\mu-1}\sin(\xi,\eta);$$

und diess sind die Bedingungen, mittelst deren man in jedem speziellen Falle die Werthe von ξ, η, ζ oder der von ihnen eingeschlossenen Winkel unter Beihülfe der Bestimmungsstücke des Dreiecks zu entwickeln hat. Ob diese Bestimmung zu einem Maximum oder Minimum führt, ist immer leicht zu entscheiden; denn wenn man den Punkt O nur weit genug wegrücken lässt, so kann man ξ, η, ζ grösser als jede gegebene Linie machen; für ein positives μ wächst dann auch $\xi^\mu + \eta^\mu + \zeta^\mu$ unbegränzt und folglich giebt es in diesem Falle kein Maximum, für negative μ dagegen kann man diese Summe so klein machen als man will, und dann existirt kein Minimum; es geben also jene Bedingungen ein Minimum für positive μ und ein Maximum für negative μ.

Ist $\mu = 1$, so wird $\angle(\xi,\eta) = \angle(\xi,\zeta) = \angle(\eta,\zeta) = \frac{2\pi}{3}$, wonach man den Punkt O leicht durch eine geometrische Construktion finden kann; für $\mu = 2$ ist O der Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Fände die erste der vorhin angegebenen Bedingungen nicht statt, verschwänden also die Differenzialquotienten

$$\frac{d^2F}{dx^2}, \frac{d^2F}{dx\,dy}, \frac{d^2F}{dy^2}$$

zugleich für die gefundenen speziellen Werthe von x und y, so würde man auch aus dem zweiten Differenzialquotienten nicht erfahren können, welche von jenen Werthen einem Maximum oder Minimum entsprechen, und sich an die weiteren Differenzialquotienten der Gleichung

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dF}{dx} Dx + \frac{dF}{dy} Dy$$

halten müssen. Hier ist nun erst nöthig, dass der erste für jene speziellen Werthe nicht verschwindende Differenzialquotient gerader Ordnung sei, wenn überhaupt ein Maximum oder Minimum möglich sein soll; bezeichnen wir die Ordnung desselben mit m, wo m eine gerade Zahl bedeutet, so müssen nun alle Differenzialquotienten niedriger Ordnung

$$\frac{d^2F}{d\omega^2}, \frac{d^3F}{d\omega^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}F}{d\omega^2}$$

verschwinden, woraus man der Reihe nach leicht ableitet:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 0;$$

$$\frac{d^3F}{dx^3}=0\ ,\ \frac{d^3F}{dx^2dy}=0\ ,\ \frac{d^3F}{dx\,dy^2}=0\ ,\ \frac{d^3F}{dy^3}=0.$$

u. s. f.

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen nimmt $\frac{d^mF}{d\omega^m}$ die folgende Form an:

$$\frac{d^mF}{d\omega^m}=\frac{d^mF}{dx^m}(Dx)^m+\frac{m}{1}\cdot\frac{d^mF}{dx^{m-1}dy}(Dx)^{m-1}Dy$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{d^mF}{dx^{m-2}dy^2}(Dx)^{m-2}(Dy)^2+\ldots.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{d^mF}{dx\,dy^{m-1}}Dx(Dy)^{m-1}+\frac{d^mF}{dy^m}(Dy)^m,$$

wovon man sich ohne die mindeste Schwierigkeit durch wirkliche Entwickelung von $\frac{d^3F}{d\omega^3}$, $\frac{d^4F}{d\omega^4}$ etc. successiv überzeugen wird. Da der vorliegende Ausdruck, der Voraussetzung nach, sich nicht annullirt, so muss er für alle Dx und Dy immer das nämliche Vorzeichen behalten, so dass das Minuszeichen dem Maximum, das Pluszeichen dem Minimum entspräche. Soll aber der Ausdruck rechts sein Vorzeichen nicht ändern, so darf diess auch bei dem folgenden:

$$\frac{d^mF}{dx^m}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^m+m_1\frac{d^mF}{dx^{m-1}dy}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^{m-1}+m_2\frac{d^mF}{dx^{m-2}dy^2}\left(\frac{Dx}{Dy}\right)^{-m2}$$
$$+\ldots.+m_{m-1}\frac{d^mF}{dx\,dy^{m-1}}\cdot\frac{Dx}{Dy}+\frac{d^mF}{dy^m}$$

nicht der Fall sein, worin m_1, m_2 etc. (die Binomialkoeffizienten) zur Abkürzung dienen. Setzen wir die Quotienten

$$\frac{Dx}{Dy}=s\ ,\ \frac{d^mF}{dx^m}=\alpha_0\ ,\ \frac{d^mF}{dx^{m-1}dy}=\alpha_1\ ,\ \text{u. s. f.},$$

so kann der Ausdruck

$$\alpha_0s^m+m_1\alpha_1s^{m-1}+m_2\alpha_2s^{m-2}+\ldots.+\alpha_m$$

für alle s nur dann sein Vorzeichen ungeändert behalten, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha_0s^m+m_1\alpha_1s^{m-1}+\ldots.+m_{m-1}\alpha_{m-1}s+\alpha_m=0$$

sämmtlich imaginär sind. Diese Bedingung lässt sich aber analytisch nicht weiter reduziren, weil hierzu die allgemeine Auflösung der Gleichungen gehören würde, und man kann daher die Untersuchung nur in

speziellen Fällen weiter führen, wo dann noch zu entscheiden bleibt, ob jenes constante Vorzeichen das positive oder negative ist.

II. Ein ganz ähnliches Verfahren lässt sich in dem Falle anwenden, dass die Funktion F, deren Maximum oder Minimum aufgesucht werden soll, drei oder mehrere von einander unabhängige Veränderliche enthält. So hat man für drei Variabele

$$\frac{dF}{d\omega}=\frac{dF}{dx}Dx+\frac{dF}{dy}Dy+\frac{dF}{dz}Dz \tag{10}$$

und zur Bestimmung der ein Maximum oder Minimum erzeugenden Werthe

$$\frac{dF}{dx}=0\,,\ \frac{dF}{dy}=0\,,\ \frac{dF}{dz}=0. \tag{11}$$

Benutzt man diese Gleichungen bei der Entwickelung des zweiten Differenzialquotienten von F, so ergiebt sich

$$\frac{d^2F}{d\omega^2}=\frac{d^2F}{dx^2}(Dx)^2+\frac{d^2F}{dy^2}(Dy)^2+\frac{d^2F}{dz^2}(Dz)^2$$
$$+2\frac{d^2F}{dx\,dy}Dx\,Dy+2\frac{d^2F}{dx\,dz}Dx\,Dz+z\frac{d^2F}{dy\,dz}Dy\,Dz\,,$$

wobei zur Abkürzung die folgende Bezeichnung eintreten möge:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{d^2F}{dx^2}=\xi\,,\ \frac{d^2F}{dy^2}=\eta\,,\ \frac{d^2F}{dz^2}=\zeta \\ \frac{d^2F}{dy\,dz}=\xi'\,,\ \frac{d^2F}{dx\,dz}=\eta'\,,\ \frac{d^2F}{dx\,dy}=\zeta' \\ \frac{Dx}{Dz}=p\,,\ \frac{Dy}{Dz}=q\end{array}\right\} \tag{12}$$

so dass nach Division mit $(Dz)^2$ die vorhergehende Gleichung die folgende Form annimmt:

$$\frac{d^2F}{d\omega^2}=$$
$$(Dz)^2\{\xi p^2+\eta q^2+\zeta+2\zeta' pq+2\eta' p+2\xi' q\} \tag{13}$$

und diese Grösse annullirt sich dann, wenn gleichzeitig

$$\xi=0\,,\ \eta=0\,,\ \zeta=0\,,\ \xi'=0\,,\ \eta'=0\,,\ \zeta'=0 \tag{14}$$

wird. Ist diess nun nicht der Fall, so bilden die aus den Gleichungen (11) entwickelten Werthe von x, y, z ein Maximum oder Minimum, je nachdem das in der Parenthese von no. (13) stehende negativ oder po-

sitiv ist. Hierzu gehört erstlich, dass die genannte Grösse, die sich auch in folgender Form darstellen lässt:

$$\xi p^2 + 2(\eta' + \zeta' q)p + \eta q^2 + 2\xi' q + \zeta \qquad (15)$$

für alle p und q einerlei Zeichen behalte, dass also die Wurzeln der Gleichung, welche man für p erhält, wenn man das Ganze $=0$ setzt, imaginär seien. Da nun eine Gleichung von der Form $\alpha s^2 + 2\beta s + \gamma$ nur für $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ imaginäre Wurzeln hat, so muss

$$(\eta' + \zeta' q)^2 - \xi(\eta q^2 + 2\xi' q + \zeta) < 0,$$

oder, wenn man Alles nach Potenzen von q ordnet,

$$(\zeta'^2 - \xi\eta)q^2 + 2(\eta'\zeta' - \xi\xi')q + \eta'^2 - \xi\zeta < 0 \qquad (16)$$

sein. Hierzu gehört nun erstlich, dass die ganze Funktion einerlei Zeichen behalte, oder dass, wenn man sie gleich Null setzt, die Wurzeln imaginär sind, also nach der vorigen Regel

$$(\eta'\zeta' - \xi\xi')^2 - (\zeta'^2 - \xi\eta)(\eta'^2 - \xi\zeta) < 0 \qquad (17)$$

sei. Die Funktion auf der linken Seite von (16) hat unter dieser Bedingung für alle q das nämliche Zeichen, also, wenn $q=0$ genommen wird, das ihres letzten Gliedes und ist demnach negativ für

$$\eta'^2 - \xi\zeta < 0, \qquad (18)$$

mithin sind die Ungleichungen (17) und (18) die Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung (16), d. h. dafür, dass die Funktion in (16) immer einerlei Vorzeichen hat. Diese Bedingungen haben aber noch ein paar wichtige Consequenzen. Aus der Ungleichung (17) folgt nämlich, dass

$$\zeta'^2 - \xi\eta \text{ und } \eta'^2 - \xi\zeta$$

gleiche Vorzeichen haben, weil sonst nach (17) die Summe zweier negativen Grössen positiv ausfiele; hieraus folgt wieder, dass wenn die Ungleichung (18) erfüllt ist, auch die folgende statt findet:

$$\zeta'^2 - \xi\eta < 0,$$

und aus beiden zusammen ergiebt sich, dass einerseits η, ξ und ζ, andererseits ξ und η, also zusammen ξ, η und ζ gleiche Vorzeichen haben. Da nun weiter die Bedingungen (17) und (18) zur Folge haben, dass der Ausdruck in (14) für alle p und q sein Zeichen nicht ändert, so hat derselbe ($p=0$, $q=0$ gesetzt) das Zeichen des letzten Gliedes ζ, welches nach dem Vorigen mit dem von ξ und η identisch ist, wird also mit diesem zugleich negativ und positiv. Diess Alles zusammen giebt folgende Regel:

Die aus den Gleichungen $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, $\frac{dF}{dz}=0$ abgeleiteten Werthe von x, y und z müssen zunächst die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{c} \zeta'^2-\xi\eta<0 \\ (\eta'\zeta'-\xi\xi')^2-(\zeta'^2-\xi\eta)(\eta'^2-\xi\zeta)<0 \end{array}\right\} \quad (19)$$

erfüllen und erzeugen das Maximum oder Minimum von $F(x,y,z)$, je nachdem für sie die Differenzialquotienten

$$\frac{d^2F}{dx^2}=\xi,\ \frac{d^2F}{dy^2}=\eta,\ \frac{d^2F}{dz^2}=\zeta \qquad (20)$$

gleichzeitig negativ oder positiv ausfallen.

Verschwänden dagegen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' gleichzeitig, so würde man die höheren Differenzialquotienten von $F(x,y,z)$ in Betracht ziehen müssen, worüber sich im Allgemeinen nicht viel sagen lässt, da man hier, wie in I., auf höhere Gleichungen stösst. — Wie man bei Funktionen noch mehrerer Variabelen zu verfahren habe, wird aus dem hier Vorgetragenen völlig erhellen.

§ 33.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer von einander nicht völlig unabhängiger Variabelen.

Es enthalte die Funktion $F(x,y,z,\ldots)$, die wir wie bisher kurz mit F bezeichnen wollen, m veränderliche Grössen, und ausserdem seien noch n verschiedene Gleichungen zwischen x, y, z, ... gegeben, etwa in der Form

$$\Phi(x,y,z,\ldots)=0,\ \Psi(x,y,z,\ldots)=0,\ \Pi(x,y,z,\ldots)=0 \text{ etc.}, \quad (1)$$

so ist klar, dass die m Veränderlichen der Funktion F nicht mehr von einander unabhängig sein werden; in der That enthält dieselbe nicht mehr als $m-n$ von einander independente Variable, da man mit Hülfe der n gegebenen Gleichungen n Veränderliche unter den m vorhandenen durch die $m-n$ übrigen ausdrücken kann. Ist nun das Maximum oder Minimum von F aufzusuchen, so liegt es am nächsten, die angedeutete Elimination von n Variablen zuerst vorzunehmen und dann nach den Regeln des vorigen Paragraphen zu verfahren. Der Ausführung dieses Gedankens stehen aber grosse Schwierigkeiten entgegen und sie würde namentlich in dem Falle ganz unmöglich sein,

wo die Gleichungen (1) von höheren Graden sind. Wir müssen uns desshalb nach einer bequemeren Methode umsehen.

Denken wir uns, wie früher, $x, y, z, \ldots$ als Funktionen einer neuen Variabelen ω und setzen zur Abkürzung

$$\frac{dx}{d\omega} = Dx \;, \frac{dy}{d\omega} = Dy \;, \frac{dz}{d\omega} = Dz \;, \ldots.$$

so ist

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx} Dx + \frac{dF}{dy} Dy + \frac{dF}{dz} Dz + \ldots. \qquad (2)$$

So wenig aber die Variablen $x, y, z, \ldots$ von einander unabhängig sind, so wenig sind es die Grössen $Dx, Dy, Dz, \ldots$ und in der That giebt es unter ihnen nur $m-n$ völlig beliebige und independente. Bezeichnen wir nämlich die Gleichungen (1) kurz mit

$$\Phi = 0 \;, \quad \Psi = 0 \;, \; \Pi = 0 \;, \ldots. \qquad (3)$$

so folgt durch Differenziation derselben nach ω:

$$\frac{d\Phi}{d\omega} = 0, \; \frac{d\Psi}{d\omega} = 0 \;, \; \frac{d\Pi}{d\omega} = 0 \;, \ldots$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} Dx + \frac{d\Phi}{dy} Dy + \frac{d\Psi}{dz} Dz + \ldots = 0 \\ \frac{d\Psi}{dx} Dx + \frac{d\Psi}{dy} Dy + \frac{d\Psi}{dz} Dz + \ldots = 0 \\ \frac{d\Pi}{dx} Dx + \frac{d\Pi}{dy} Dy + \frac{d\Pi}{dz} Dz + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} (4)$$

u. s f.

Aus diesen n Gleichungen lassen sich nun n der Grössen $Dx, Dy, Dz, \ldots$, also etwa $Dr, Ds, Dt \ldots$, entwickeln, d. h. durch die $m-n$ übrigen $Dx, Dy, Dz, \ldots Dq$ ausdrücken, und in der That gehört hierzu nur die Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades, welche jederzeit möglich ist. Durch Substitution dieser Werthe von Dr, Ds, Dt etc. fallen aus der Gleichung (3) alle diejenigen von den Grössen $Dx, Dy, Dz, \ldots Dq, Dr, Ds, Dt, \ldots$ weg, die nicht völlig willkührlich sind; denkt man sich hierauf alle die Glieder vereinigt, die entweder Dx, oder $Dy, Dz, \ldots Dq$ als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, so nimmt die Gleichung selbst folgende Form an

$$\frac{dF}{d\omega} = XDx + YDy + ZDz + \ldots + QDq,$$

wobei X, Y, Z, ... Q Summen sind, die sich aus dem angedeuteten Calcül von selbst ergeben, und Dx, Dy, ... Dq ganz willkührliche Grössen der Anzahl nach $m-n$ darstellen. Soll nun ein Maximum oder Minimum statt finden, so muss $\frac{dF}{d\omega} = 0$ sein, woraus wegen der Willkührlichkeit von X, Y, Z, ... folgt

$$X = 0\,,\ Y = 0\,,\ Z = 0\,,\ \ldots\ Q = 0. \qquad (6)$$

Diese $m-n$ Gleichungen dienen zur Bestimmung der Werthe von $m-n$ Grössen x, y, z, ... q unter den überhaupt vorhandenen m Variablen x, y ... q, r, s, t .... Die noch übrigen n Veränderlichen r, s, t, ... erhält man hierauf mit Hülfe der n Gleichungen (3).

Um nun zu entscheiden, ob die gefundenen Werthe einem Maximum oder Minimum von F entsprechen, entwickeln wir den zweiten Differenzialquotienten von F nach ω; aus no. (5) ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{d\omega^2} = & \frac{d(XDx)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega} + \frac{d(YDy)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega} + \frac{d(ZDz)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\omega} + \ldots \\ & + \frac{d(XDx)}{dy}\cdot\frac{dy}{d\omega} + \frac{d(YDy)}{dy}\cdot\frac{dy}{d\omega} + \frac{d(ZDz)}{dy}\cdot\frac{dy}{d\omega} + \ldots \\ & + \frac{d(XDx)}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega} + \frac{d(YDy)}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega} + \frac{d(ZDz)}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und durch Differenziation der einzelnen Produkte unter Berücksichtigung der Gleichungen (6)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2F}{d\omega^2} = & \frac{dX}{dx}(Dx)^2 + \frac{dY}{dy}Dx\,Dy + \frac{dZ}{dx}Dx\,Dz + \ldots \\ & + \frac{dX}{dy}Dy\,Dx + \frac{dY}{dy}(Dy)^2 + \frac{dZ}{dy}Dy\,Dz + \ldots \\ & + \frac{dX}{dz}Dz\,Dx + \frac{dY}{dz}Dz\,Dy + \frac{dZ}{dz}(Dz)^2 + \ldots\end{aligned}\right\} \quad (8)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die für x, y, z, ... gefundenen Werthe entsprechen nun einem Maximum oder Minimum, je nachdem der vorliegende Ausdruck negativ oder positiv bleibt. Hierzu gehört, dass nicht alle die verschiedenen partiellen Differenzialquotienten von X, Y, Z etc. gleichzeitig verschwinden und die Reihe rechts, als Funktion von Dx, Dy, Dz etc. betrachtet, ihr Vorzeichen nicht ändere. Da in derselben nur die $m-n$ von einander unabhängigen Grössen Dx, Dy, ... Dq vorkom-

men wie in no. (5), so ist zur Erfüllung der ebengenannten Bedingung nöthig, dass die Gleichung

$$0 = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 + \frac{dY}{dx} Dx\, Dy + \ldots + \frac{dX}{dy} Dy\, Dx + \frac{dY}{dy} (Dy)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{dX}{dz} Dz\, Dy + \frac{dY}{dz} Dz\, Dy + \ldots$$

nach Dx, Dy, Dz etc. aufgelöst nur imaginäre Wurzeln habe, was sich in jedem einzelnen Falle leicht entscheiden lässt. Ob das nachher vorhandene constante Vorzeichen ein Plus- oder Minuszeichen ist, lässt sich dann immer ohne Schwierigkeit absehn.

Wären dagegen sämmtliche partielle Differenzialquotienten von X, Y, Z etc. $= 0$ für die vorher gefundenen Werthe von x, y, z etc., so würde man sich an die höheren Differenzialquotienten von F zu wenden und hier eine ganz ähnliche Untersuchung anzustellen haben.

Wie man nun diese Regeln anzuwenden hat, wird sich aus den folgenden Beispielen ergeben.

I. Man soll die Summe $x^2 + y^2 + z^2$ zu einem Maximum oder Minimum machen unter der Voraussetzung, dass gleichzeitig immer $ax + by + cz = k$ ist.

Wir haben hier

$$F = x^2 + y^2 + z^2, \quad \Phi = ax + by + cz - k$$

und folglich nach (2) und (4)

$$\frac{dF}{d\omega} = 2x\, Dx + 2y\, Dy + 2z\, Dz,$$
$$0 = aDx + bDy + cDz.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$Dz = -\frac{a}{c} Dx - \frac{b}{c} Dy$$

und durch Substitution dieses Werthes geht die erste Gleichung in folgende über:

$$\frac{dF}{d\omega} = 2\left(x - \frac{a}{c} z\right) Dx + 2\left(y - \frac{b}{c} z\right) Dy,$$

so dass also

$$X = 2\left(x - \frac{a}{c} z\right), \quad Y = 2\left(y - \frac{b}{c} z\right)$$

ist. Aus $X = 0$, $Y = 0$ folgt nun

$$x = \frac{a}{c}z \, , \; y = \frac{b}{c}z$$

und wenn wir diess in die Gleichung $ax + by + cz = k$ substituiren, so ergeben sich die Werthe

$$z = \frac{ck}{a^2 + b^2 + c^2} .$$

$$y = \frac{bk}{a^2 + b^2 + c^2} .$$

$$x = \frac{ak}{a^2 + b^2 + c^2} .$$

Nach no. (8) ist nun weiter, da wir blos zwei unabhängige Variabele x und y haben,

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 + \frac{dY}{dx}\, Dx\, Dy + \frac{dX}{dy}\, Dy\, Dx + \frac{dY}{dy}\,(Dy)^2$$

und nach dem Obigen

$$\frac{dX}{dx} = 2 \, , \; \frac{dY}{dx} = 0 \, , \; \frac{dX}{dy} = 0 \, , \; \frac{dY}{dy} = 2;$$

also die rechte Seite der vorigen Gleichung

$$= 2(Dx)^2 + 2(Dy)^2.$$

Da dieser Ausdruck immer positiv ist, so entsprechen die für x, y, z gefundenen Werthe einem Minimum von F.

2. Um auch ein Beispiel aus der Geometrie zu haben, behandeln wir die Aufgabe:

Unter allen rechtwinklichen Parallelpipeden von der gleichen Oberfläche $2k$ dasjenige zu finden, welches den grössten kubischen Inhalt hat.

Nennen wir x, y, z die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten, so ist die Oberfläche unseres Körpers $= 2(xy + xz + yz)$ und folglich immer

$$xy + xz + yz - k = 0.$$

Das Volumen dagegen ist $= xyz$; um diesen Ausdruck zu einem Maximum zu machen, brauchen wir diess blos mit $l(xyz) = lx + ly + lz$ zu thun*),

---

*) Dieser Uebergang ist nicht gerade nothwendig, denn man könnte F auch unmittelbar $= xyz$ setzen, er erleichtert aber den Calcül.

da der Logarithmus einer Zahl mit ihr selbst zugleich wächst. Wir haben daher

$$F = lx + ly + lz\ ,\ \Phi = xy + xz + yz - k.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{1}{x}Dx + \frac{1}{y}Dy + \frac{1}{z}Dz,$$
$$0 = (y+z)Dx + (x+z)Dy + (x+y)Dz;$$

mithin

$$Dz = -\frac{y+z}{x+y}Dx - \frac{x+z}{x+y}Dy$$

und folglich

$$\frac{dF}{d\omega} = \left\{\frac{1}{x} - \frac{y+z}{x+y}\cdot\frac{1}{z}\right\}Dx + \left\{\frac{1}{y} - \frac{x+z}{x+y}\cdot\frac{1}{z}\right\}Dy$$

also

$$X = \frac{1}{x} - \frac{y+z}{x+y}\cdot\frac{1}{z}\ ,\ Y = \frac{1}{y} - \frac{x+z}{x+y}\cdot\frac{1}{z}.$$

Aus $X = 0$, $Y = 0$ erhält man jetzt sehr leicht

$$x = z\ ,\ y = z$$

und hieraus mittelst der Gleichung $\Phi = 0$:

$$x = y = z = \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y+z}{(x+y)^2}\cdot\frac{1}{z}$$

oder weil $x = y = z$ ist

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(2x)^2} = -\frac{1}{2x^2},$$

ferner

$$\frac{dX}{dy} = \frac{z-x}{(x+y)^2}\cdot\frac{1}{z} = 0,\ \text{weil}\ z = x.$$

Ebenso findet man

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{2x^2}\ \text{und}\ \frac{dY}{dx} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$\frac{d^2F}{d\omega^2}=-\frac{1}{2x^2}(Dx)^2-\frac{1}{2y^2}(Dy)^2$$

$$=-\frac{k}{2.3}[(Dx)^2+(Dy)^2].$$

Da dieser Ausdruck immer negativ bleibt, so entsprechen die gefundenen Werthe einem Maximum. Geometrisch erhellt hieraus, dass der Würfel das grösste unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche ist.

3. Das grösste Viereck zu bestimmen, welches sich mit den gegebenen Seiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beschreiben lässt.

Nennen wir x und y die einander gegenüberliegenden Winkel, welche von den Seiten α, β und γ, δ eingeschlossen werden, so haben wir für den Inhalt des Vierecks:

$$\frac{\alpha\beta}{2}\sin x+\frac{\gamma\delta}{2}\sin y,$$

und wenn dieser, also auch das Doppelte von ihm, ein Maximum werden soll, so ist

$$F(x, y)=\alpha\beta\sin x+\gamma\delta\sin y$$

zu setzen. Berechnet man ferner diejenige Diagonale, welche durch die Scheitel der Winkel (α, δ) und (β, γ) geht, aus je zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, so ergiebt sich noch die Bedingungsgleichung

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\cos y,$$

und also ist

$$\varphi(x, y)=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2-2\alpha\beta\cos x+2\gamma\delta\cos y=0$$

zu setzen. Es wird nun

$$\frac{dF}{d\omega}=\alpha\beta\cos x\,Dx+\gamma\delta\cos y\,Dy$$

und ebenso vermöge der Bedingungsgleichung $\varphi=0$

$$0=\alpha\beta\sin x\,Dx-\gamma\delta\sin y\,Dy,$$

woraus

$$\gamma\delta\,Dy=\alpha\beta\frac{\sin x}{\sin y}Dx$$

folgt. Die Substitution dieses Werthes in die vorhergehende Gleichung giebt

$$\frac{dF}{d\omega}=\alpha\beta\left(\cos x+\frac{\sin x}{\sin y}\cos y\right)Dx,$$

also

$$X = \alpha\beta\,(\cos x + \frac{\sin x}{\sin y}\cos y).$$

Aus $X=0$ folgt jetzt

$$\cos x \sin y + \sin x \cos y = 0, \text{ d. i. } \sin(x+y) = 0,$$

mithin

$$x+y = 0\,,\ 180^0\,,\ 360^0\,,\ 270^0\,, \ldots \text{etc.}$$

Da aber x und y zwei Winkel eines Vierecks sein sollen, so ist von diesen Werthen nur der zweite

$$x+y = 180^0\,,\ y = 180^0 - x$$

zu brauchen. Setzen wir diess in die Bedingungsgleichung $\varphi(x,y)=0$ und bemerken, dass jetzt $\cos y = -\cos x$ ist, so ergiebt sich

$$\cos x = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Dass dieser Werth einem Maximum entspricht, entscheidet sich jetzt leicht mit Hülfe der Formel (8), welche in unserem Falle nur ein einziges Glied auf der rechten Seite hat, weil nur eine unabhängige Variable x in der Aufgabe vorkommt und keine Y, Z etc. vorhanden sind. Es ist nämlich

$$\frac{d^2F}{d\omega^2} = \frac{dX}{dx}(Dx)^2 = \alpha\beta\,(-\sin x + \frac{\cos x}{\sin y}\cos y)\,(Dx)^2$$

$$= \frac{\alpha\beta\cos(x+y)}{\sin y}(Dx)^2.$$

Da nun $x+y = 180^0$, $\cos(x+y) = -1$, y immer ein Winkel $<180^0$ und folglich $\sin y$ positiv ist, so bleibt $\frac{d^2F}{d\omega^2}$ negativ und mithin entsprechen die gefundenen Werthe einem Maximum. Berücksichtigt man noch, dass sich um jedes Viereck, dessen Gegenwinkel sich zu zwei Rechten ergänzen, ein Kreis beschreiben lässt, so erhellt sogleich der Satz: „unter allen Vierecken, welche aus den nämlichen Seiten construirt sind, hat das Sehnenviereck den grössten Flächeninhalt.

Cap. VIII. Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin.

§ 34.

Anwendungen, die sich von den Lehren des §. 27. machen lassen.

Wir haben früher in §§ 26 und 27 zwei Theoreme kennen gelernt, welche folgendermassen lauteten:

I. Wenn die Funktion $F(x)$ und ebenso ihre Derivirte $F'(x)$ innerhalb der Gränzen $x=a$ bis $x=a+h$ endlich und stetig bleibt, so ist

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a+\lambda h)\ ,\ 1 \geqq \lambda \geqq 0.$$

II. Wenn die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ innerhalb des Intervalles $x=0$ bis $x=h$ sämmtlich stetig und endlich bleiben, wenn ferner für $x=0$:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

ist, so gilt die Gleichung

$$f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\lambda_n h)\ ,\ 1 \geqq \lambda_n \geqq 0.$$

Diese Sätze haben das Eigenthümliche, dass sich durch eine sehr einfache Combination eine fortgesetzte Anwendung des zweiten Theoremes auf das erste vermitteln lässt. Stellen wir nämlich die erste Gleichung in folgender Form dar:

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + h\{F'(a+\lambda h) - F'(a)\}$$

oder, wenn zur Abkürzung $h\{F'(a+\lambda h) - F'(a)\} = f(h)$ gesetzt wird,

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + f(h),$$

so ist es nicht schwer, einige Eigenschaften der Funktion $f(h)$ anzugeben, welche eine kürzere Ausdrucksweise derselben möglich machen. Es ist nämlich

$$f(h) = F(a+h) - F(a) - \frac{h}{1}\, F'(a)$$
$$f'(h) = F'(a+h) - F'(a)$$
$$f''(h) = F''(a+h)$$

und für $h=0$, $f(0)=0$, $f'(0)=0$ folglich nach dem Theoreme II für $n=2$, und $f''(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ als stetig und endlich oder $F''(x)$ von $x=a$ bis $x=a+h$ als continuirlich und endlich vorausgesetzt,

$$f(h) = \frac{h^2}{1.2}\, F''(a+\lambda_2 h).$$

Demnach ist jetzt

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2}\, F''(a+\lambda_2 h),$$

wofür wir wieder schreiben

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1}\, F'(a) + \frac{h^2}{1.2}\, F''(a)$$
$$+ \frac{h^2}{1.2} \{ F''(a+\lambda_2 h) - F''(a) \}.$$

Bezeichnen wir das auf der rechten Seite unter der Zeile stehende mit $f(h)$, so finden sich leicht die folgenden Eigenschaften dieser Funktion.

$$f(0)=0\ ,\ f'(0)=0\ ,\ f''(0)=0\ ,\ f'''(h) = F'''(a+h);$$

mithin ist nach dem Theoreme II.

$$f(h) = \frac{h^3}{1.2.3}\, F'''(a+\lambda_3 h),$$

wobei aber $f'''(h)$ von $x=0$ bis $x=h$ oder $F'''(x)$ von $x=a$ bis $x= a+h$ stetig und endlich sein muss. Vermöge dieses Werthes wird jetzt

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \frac{h^3}{1.2.3}\, F'''(a+\lambda_3 h).$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Betrachtungen; ist nämlich n eine positive ganze Zahl, so gilt das Theorem

$$F(a+ \quad = F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \frac{h^3}{1.2.3}\, F'''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{1.2..,(n-1)} F^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{1.2...n}\, F^{(n)}(a+\lambda_n h),$$

wobei λ_n eine die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitende Grösse ist. Es muss noch berücksichtigt werden, dass der Reihe nach die Bedin-

gungen gefunden wurden: $F'(x)$ stetig und endlich zwischen $x=a$ und $x=a+h$, ebenso $F''(x)$, $F'''(x) \dots F^{(n)}(x)$, dass mithin die Gültigkeit des vorliegenden Satzes nur dann behauptet werden darf, wenn die Funktion $F(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive stetig und endlich bleibt von $x=a$ bis $x=a+h$. Setzt man a an die Stelle von h, so lautet der Satz:

Bleibt die Funktion $F(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive stetig und endlich, während x bis auf $x+h$ sich verändert, so ist

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(x) + \dots\dots$$
$$\dots + \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2\dots n} F^{(n)}(x+\lambda_n h) \qquad (1)$$

Dieser Satz heisst der Taylorsche, obgleich Taylor ihn in einer von dieser verschiedenen Form ausgesprochen hatte; aus ihm ergiebt sich das Theorem von Mac Laurin, wenn man $x=0$ nimmt und dann x für h schreibt. Es lautet:

Bleibt die Funktion $F(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclusive stetig und endlich während des Intervalles $x=0$ bis $x=x$, so ist

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \dots$$
$$\dots + \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2\dots n} F^{(n)}(\lambda_n x) \qquad (2)$$

Bei der Wichtigkeit dieser Sätze dürfte es wohl nicht überflüssig sein, eine zweite Ableitung derselben zu geben, bei welcher der heuristische Gedankengang noch schärfer hervortritt.

§. 35.

Heuristische Entwickelung der Sätze von Taylor und Mac Laurin.

Da sich eine Funktion mit ihrer Veränderlichen gleichzeitig ändert, so ist es eine der natürlichsten Aufgaben der Analysis, die Grösse einer solchen Veränderung anzugeben, wenn man die ihr zu Grunde liegende Aenderung der Variablen kennt, oder mit anderen Worten, aus dem Werthe von $F(x)$ den von $F(x+h)$ abzuleiten, vorausgesetzt, dass

die Natur der Funktion F, sowie die Werthe von x und h bekannt sind. Sehen wir uns, um erst ein Beispiel zu haben, in der Reihe der gewöhnlichen Funktionen um, so bemerken wir sogleich, dass die Potenz mit ganzem positiven Exponenten eine von den Funktionen ist, für welche sich die Aufgabe sehr leicht lösen lässt, weil nach dem binomischen Satze für ein ganzes positives m

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{m}{1} x h^{m-1} + h^m$$

ist. Hieraus erhellt weiter, dass jede sogenannte ganze rationale und algebraische Funktion vom Grade μ, d. h. ein Ausdruck von der Form

$$F(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Mx^\mu,$$

worin $A, B, C, \ldots M$ willkührliche Constanten, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ positive ganze Zahlen, nach ihrer Grösse geordnet, bedeuten, auf gleiche Weise behandelt werden kann, weil die vorige Umwandlung auf jedes einzelne Glied anwendbar ist. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} F(x+h) = \\ A[x^\alpha + \frac{\alpha}{1} x^{\alpha-1} h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^{\alpha-2} h^2 + \ldots + h^\alpha] \\ + B[x^\beta + \frac{\beta}{1} x^{\beta-1} h + \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} x^{\beta-2} h^2 + \ldots + h^\beta] \\ + C[x^\gamma + \frac{\gamma}{1} x^{\gamma-1} h + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1.2} x^{\gamma-2} h^2 + \ldots + h^\gamma] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + M[x^\mu + \frac{\mu}{1} x^{\mu-1} h + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} h^2 + \ldots + h^\mu], \end{aligned}$$

und wenn wir diejenigen Glieder zusammennehmen, in welchen gleiche Potenzen von h vorkommen:

$$\begin{aligned} F(x+h) = \\ Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Mx^\mu \\ + \left\{ A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \ldots + M\mu x^{\mu-1} \right\} \frac{h}{1} \\ + \left\{ A\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1) x^{\beta-2} + \ldots + M\mu(\mu-1) x^{\mu-2} \right\} \frac{h^2}{1.2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + M\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots 2.1. \frac{h^\mu}{1.2.3.\mu}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Andererseits erhält man durch successive Differenziationen der Gleichung

$$F(x)=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots.+Mx^{\mu}$$

leicht Folgendes:

$$F'(x)=A\alpha x^{\alpha-1}+B\beta x^{\beta-1}+\ldots.+M\mu x^{\mu-1}$$

$$F''(x)=A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+B\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+\ldots.+M\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^{(\mu)}(x)=M\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.2.1$$

und durch Substitution dieser Werthe geht die Formel (1) in die folgende über:

$$F(x+h)$$
$$=F(x)+F'(x)\frac{h}{1}+F''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots.+F^{(\mu)}(x)\frac{h^{\mu}}{1.2.3\ldots.\mu}. \qquad (2)$$

Nun ist aber nicht jede Funktion eine algebraische ganze und rationale und daher wird sich der vorliegende Satz nur dann auf andere Funktionen ausdehnen lassen, wenn die letzteren unter gewissen Bedingungen für irgend ein Intervall als ganze rationale algebraische angesehen werden dürfen. Dies lässt sich aber im Voraus gar nicht so leicht erkennen, und wir versuchen daher einen anderen Weg zur Entscheidung der obschwebenden Frage.

Denken wir uns aus der Reihe auf der rechten Seite von no. (2) eine beliebige Anzahl Glieder, etwa n, vom Anfange her ausgehoben, und lassen $F(x)$ jetzt eine ganz beliebige Funktion bedeuten, so würde es offenbar blos darauf ankommen, die Summe der Reihe

$$F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots.+\frac{h^{n-1}}{1\ 2\ldots.(n-1)}F^{(n-1)}(x)$$

auszumitteln; diese Summe würde dann von selbst ausweisen, in wie weit das Theorem (2) für willkührliche Funktionen Gültigkeit besitzt. Um aber nicht immer mit zwei Variablen x und h zu thun zu haben, wollen wir $x=c-h$ setzen, wo c eine Constante bedeutet, die fragliche Summe als Funktion von h betrachten und demgemäss mit $\Phi(h)$ bezeichnen, so dass also

$$\Phi(h)=F(c-h)+\frac{h}{1}F'(c-h)+\frac{h^2}{1.2}F''(c-h)+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots.(n-1)}F^{(n-1)}(c-h) \qquad (3)$$

ist. In dieser Form besitzt nun die Reihe eine Eigenschaft, welche ihre Summirung sehr erleichtert; es besteht nämlich ihr Differenzialquotient nicht mehr aus n Gliedern, sondern nur aus einem einzigen. In der That ergiebt sich durch Differenziation nach h unter Anwendung der Regel für die Differenziation von Produkten:

$$\begin{aligned}\Phi'(h) = &-F'(c-h)\\ &-\frac{h}{1}F''(c-h)+F'(c-h)\\ &-\frac{h^2}{1.2}F'''(c-h)+\frac{h}{1}F''(c-h)\\ &\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-h)+\frac{h^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}F^{(n-1)}(c-h),\end{aligned}$$

d. i. nach gegenseitiger Hebung

$$\Phi'(h) = -\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-h). \qquad (4)$$

Um nun aus dem Differenzialquotienten von $\Phi(h)$ diese Funktion selbst zu finden, wenden wir uns an den in §. 27. bewiesenen Satz:

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{\Psi(a+h)-\Psi(a)} = \frac{\Phi'(a+\lambda h)}{\Psi'(a+\lambda h)},\ 1 \geqq \lambda \geqq 0,$$

welcher unter der Bedingung gilt, dass $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $\Phi'(z)$ und $\Psi'(z)$ endlich und stetig bleiben von $z=a$ bis $z=a+h$ und $\Psi'(z)$ während dieses Intervalles sein Vorzeichen nicht ändert. Nehmen wir $a=0$ und substituiren für $\Psi(z)$ eine andere stetige und endliche Funktion $\psi(z)$, welche aber für $z=0$ verschwindet, so ist

$$\frac{\Phi(h)-\Phi(0)}{\psi(h)} = \frac{\Phi'(\lambda h)}{\psi'(\lambda h)},$$

woraus

$$\Phi(h) = \Phi(0) + \frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\Phi'(\lambda h),\ 1 \geqq \lambda \geqq 0, \qquad (5)$$

folgt, und diese letztere Gleichung kann dienen, um $\Phi(h)$ zu finden sobald $\Phi'(h)$ bekannt ist. Wenden wir diess auf unsere spezielle Untersuchung an, so haben wir nach no. (4)

$$\Phi'(\lambda h) = -\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h)$$

und mithin nach no. (5)

$$\Phi(h)=\Phi(0)-\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h).$$

Aus der Gleichung (3) ergiebt sich aber unmittelbar

$$\Phi(0)=F(c)$$

und so haben wir jetzt

$$\Phi(h)=F(c)-\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h), \qquad (6)$$

womit die fragliche Summe gefunden ist. Wir dürfen aber nicht vergessen, dass diess nur so lange gilt, als die Bedingungen für die Existenz der Gleichung (5) erfüllt sind. Diese waren erstlich Stetigkeit und Endlichkeit von $\Phi(z)$ und $\Phi'(z)$ innerhalb des Intervalles $z=0$ bis $z=h$, was in unserem Falle vermöge der Gleichungen (3) und (4) nur dann statt findet, wenn die Funktionen

$$F(z),\ F'(z),\ F''(z),\ \ldots\ F^{(n-1)}(z),\ F^{(n)}(z)$$

stetig und endlich bleiben von $z=c$ bis $z=c-h$. Ausserdem müssen in no. (6) $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ stetig und endlich innerhalb des nämlichen Intervalles sein und $\psi'(z)$ darf ebendaselbst keinen Zeichenwechsel haben.

Aus der Vergleichung von (3) und (6) folgt jetzt sehr leicht

$$F(c)=F(c-h)+\frac{h}{1}F'(c-h)+\frac{h^2}{1.2}F''(c-h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(c-h)+\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(c-\lambda h).$$

Nehmen wir endlich $c=x+h$ und zur Abkürzung $1-\lambda=\lambda_n$, wo nun auch λ_n eine die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitende Grösse bedeutet, so wird

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}\cdot\frac{(\lambda h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(x+\lambda_n h)$$
$$1\geqq\lambda\geqq 0;\ \lambda_n=1-\lambda. \qquad (7)$$

Die Bedingungen für die Gültigkeit dieser Gleichung sind: 1) es müssen die Funktionen

$$F(z)\ ,\ F'(z)\ ,\ F''(z)\ ,\ \ldots\ F^{(n-1)}(z)\ ,\ F^{(n)}(z)$$

stetig und endlich bleiben von $z=x$ bis $z=x+h$, und 2) die Funktion $\psi(z)$ muss sich für $z=0$ annulliren, $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ müssen innerhalb

des genannten Intervalles stetig und endlich bleiben, und $\psi'(z)$ darf ebendarin sein Vorzeichen nicht ändern.

Da $\psi(z)$ eine beliebige Funktion ist, so hält es nicht schwer, eine solche Wahl dafür zu treffen, dass die unter no. 2 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden; so z. B. wenn $\psi(z)=z^m$ gesetzt wird, wo m eine positive Grösse bezeichnet. Es ist dann

$$\frac{\psi(h)}{\psi'(\lambda h)}=\frac{h^m}{m(\lambda h)^{m-1}}=\frac{h}{m\lambda^{m-1}},$$

und wenn man diess mit Rücksicht auf die Relation $\lambda=1-\lambda_n$ substituirt, so giebt die Gleichung (7):

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\dots..$$
$$\dots.+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{(1-\lambda_n)^{n-m}h^n}{1.2\dots(n-1).m}F^{(n)}(x+\lambda_n h). \quad (8)$$

Da die positive Grösse m noch beliebig gelassen ist, so kann man sie auch $=1$ oder $=n$ setzen, wodurch sich ergiebt:

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\dots.$$
$$\dots.+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{(1-\lambda_n)^{n-1}h^n}{1.2\dots.(n-1)}F^{(n)}(x+\lambda_n h) \quad (9)$$

und

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\dots.$$
$$\dots+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\dots(n-1)n}F^{(n)}(x+\lambda_n h). \quad (10)$$

Unter den verschiedenen Formen, welche man auf diese Weise bekommen kann, benutzt man natürlich diejenige, welche im speziellen Falle die bequemste Rechnung liefert.

Nimmt man noch $x=0$ und schreibt h für x in den Formeln (9) und (10), so erhält man:

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\dots..$$
$$\dots.+\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{(1-\lambda_n)^{n-1}x^n}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n)}(\lambda_n x) \quad (11)$$

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\dots.$$
$$\dots.+\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3\dots.n}F^{(n)}(\lambda_n x) \quad (12)$$

wo nun die Funktion $F(z)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $n$ten inclus. endlich und stetig von $z=0$ bis $z=x$ sein muss.

Die beiden so entwickelten Theoreme stehen sich übrigens, obgleich hier das zweite als spezieller Fall des ersten erscheint, in Absicht auf ihre Allgemeinheit ganz gleich, denn man kann eben so leicht das erste aus dem zweiten ableiten. Setzt man nämlich in dem letzteren

$$F(x)=f(h+x),$$

so wird

$$F'(x)=f'(h+x)\,,\; F''(x)=f''(h+x)\,,\; \text{u. s. f.},$$

ferner

$$F(0)=f(h)\,,\; F'(0)=f'(h)\,,\; F''(0)=f''(h)\,,\; \text{u. s. f.}$$

und folglich ergiebt sich aus no. (12)

$$f(h+x)=f(h)+\frac{x}{1}f'(h)+\frac{x^2}{1.2}f''(h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(h)+\frac{x^n}{1.2\ldots.n}f^{(n)}(h+\lambda_n x).$$

Vertauscht man hier h und x gegeneinander und schreibt dann F für f, so kommt man auf die Gleichung (10) zurück.

§. 36.

Beispiele zu dem Theoreme von Mac Laurin.

Von besonderem Nutzen ist der Mac Laurin'sche Satz da, wo es gilt, eine gegebene Funktion in eine nach steigenden Potenzen ihrer Variablen fortschreitende Reihe zu verwandeln; setzt man nämlich

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots \\ \qquad\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+R_n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

so ist durch Vergleichung mit den in (11) und (12) stehenden Formeln für irgend eine positive ganze Zahl m

$$A_m=\frac{F^{(m)}(0)}{1.2.3\ldots m} \qquad (2)$$

und

$$R_n=\frac{(1-\lambda_n)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(\lambda_n x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\lambda_n x), \qquad (3)$$

wodurch sämmtliche in no. (1) noch unbekannte Grössen ihre Bestimmung gefunden haben. Wir wollen diess nun auf einige Beispiele anwenden.

I. Sei

$$F(x)=(1+x)^{\mu},$$

worin μ eine ganz beliebige Grösse bezeichnet; man findet hier nach den früher entwickelten Regeln zur Entwickelung der höheren Differenzialquotienten

$$F^{(m)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-m+1)(1+x)^{\mu-m}$$

und folglich nach no. (11), wenn man λ zur Abkürzung für λ_n schreibt:

$$(1+x)^{\mu}=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}x^3+\dots$$
$$\dots+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}x^{n-1}$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)}{1.2.3\dots(n-1)}\cdot\frac{(1-\lambda)^{n-1}x^n}{(1+\lambda x)^{n-\mu}}. \quad (4)$$

II. Für

$$F(x)=l(1+x)$$

ergiebt sich

$$F^{(m)}(x)=\frac{(-1)^{m+1}1.2.3\dots(m-1)}{(1+x)^m},$$

und folglich wieder nach no. (11)

$$l(1+x)=\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\dots+\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}$$
$$+(-1)^{n+1}\cdot\frac{(1-\lambda)^{n-1}x^n}{(1+\lambda x)^n}. \quad (5)$$

III. Nehmen wir

$$F(x)=e^{kx},$$

wo k eine beliebige Constante bedeutet, so ist

$$F^{(m)}(x)=k^m e^{kx}$$

und folglich nach no. (12), wenn man λ für λ_n schreibt:

$$e^{kx}=1+\frac{kx}{1}+\frac{(kx)^2}{1.2}+\dots+\frac{(kx)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}$$
$$+\frac{(kx)^n}{1.2.3\dots n}e^{\lambda kx}. \quad (6)$$

IV. Die Annahme

$$F(x)=\cos x$$

giebt

$$F^{(m)}(x) = \cos(m\frac{\pi}{2} + x) \text{ , } F^{(m)}(0) = \cos m\frac{\pi}{2};$$

also $F^{(m)}(0) = 0$ wenn m ungerade und $= (-1)^{\frac{m}{2}}$ wenn m gerade ist. Hiernach wird

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2....6} + ...$$

$$... + \frac{x^{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}}{1.2...(n-1)} + \frac{x^n}{1.2...n}\cos(n\frac{\pi}{2} + \lambda x). \quad (7)$$

V. Setzt man

$$F(x) = \sin x,$$

so findet sich

$$F^{(m)}(x) = \sin(m\frac{\pi}{2} + x) \text{ , } F^{(m)}(0) = \sin m\frac{\pi}{2};$$

also $F^{(m)}(0) = 0$ wenn m gerade und $= (-1)^{\frac{m-1}{2}}$ wenn m ungerade ist. Hieraus ergiebt sich

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - .....$$

$$... + \frac{x^{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{1.2...(n-1)} + \frac{x^n}{1.2.3...n}\sin(n\frac{\pi}{2} + \lambda x) \quad (8)$$

In allen diesen Gleichungen kommt noch die Grösse λ vor, welche natürlich in jeder derselben einen anderen Werth hat und sich mit x und n selbst ändert, doch so, dass sie die Gränzen Null und Eins nicht überschreitet. Man kann diese Eigenschaft benutzen, um die jedesmal auf der linken Seite stehende Funktion zwischen zwei Gränzen einzuschliessen, wodurch man gewissermassen die Region des Zahlengebietes kennen lernt, in welcher ihr numerischer Werth zu suchen ist. So gäbe z. B. die Gleichung (5) für $n = 2$,

$$l(1+x) = x - \frac{(1-\lambda)x^2}{(1+\lambda x)^2}.$$

Da nun λ die Gränzen 0 und 1 nicht überschreitet, so liegt der Werth von

$$\frac{(1-\lambda)x^2}{(1+\lambda x)^2}$$

nicht ausserhalb der Gränzen

$$\frac{(1-1)x^2}{(1+x)^2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{(1-0)x^2}{(1+0x)^2}=x^2$$

und mithin übersteigt nach dem Obigen $l(1+x)$ die Gränzen $x-0$ und $x-x^2$ nicht, oder es ist

$$x \geqq l(1+x) \geqq x-x^2,$$

wo das Gleichheitszeichen nur in dem Falle $x=0$ Anwendung finden würde. Dieser Gebrauch unserer Gleichungen ist aber von nur untergeordneter Bedeutung, weil man damit höchstens zu Näherungsformeln, aber nicht zu genauen Gleichungen für die links stehenden Funktionen kommen könnte. Wichtiger dagegen ist die folgende Bemerkung.

Stellen wir die Gleichung (1) — das allgemeine Schema der späteren Formeln — in der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} F(x)-R_n \\ =A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_{n-1}x^{n-1} \end{array}\right\} \quad (9)$$

dar, so liesse sich wohl der Fall denken, dass die Grösse R_n für ein gewisses erst noch zu bestimmendes n verschwände, was z. B. nach der ersten in no. (3) für R_n angegebenen Form für $\lambda_n=1$ geschehen würde. Es ist aber sogleich zu ersehen, dass diess für kein bestimmtes endliches n möglich ist; denn es würde die in diesem Falle resultirende Gleichung:

$$F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}$$

eine Identität zwischen einer beliebigen Funktion und einer algebraischen ganzen und rationalen Funktion aussprechen, eine Identität, die anders als für ganz spezielle Werthe von x gar nicht bestehen kann. In besonderen Fällen lässt sich diess noch bestimmter aus den Eigenschaften von $F(x)$ nachweisen. Wenn nun aber auch R_n für kein bestimmtes endliches n der Null gleich ist, so wäre doch noch der Fall denkbar, dass sich R_n für unausgesetzt wachsende n der Null als Gränzwerth näherte; dann würde zugleich die Anzahl der auf der rechten Seite vorkommenden Reihenglieder $(=n)$ unbegränzt zunehmen und man erhielte einen um so genaueren Werth von $F(x)$, je mehr Glieder der Reihe man vereinigte. Man hätte dann in Zeichen:

$$\begin{array}{l} F(x)-\operatorname{Lim} R_n \\ =\operatorname{Lim}\{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}\} \end{array}$$

und weil $\operatorname{Lim} R_n=0$ ist:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots \text{ in inf.} \quad (10)$$

Wäre dagegen Lim R_n von Null verschieden, so würde man Lim R_n nicht weglassen, also die Gleichung (10) nicht als eine Folgerung von no. (9) ansehen dürfen. Wir wollen nun die sich nöthig machende Untersuchung über den Gränzwerth von R_n an den Beispielen in (4), (5), (6), (7) und (8) ausführen.

§. 37.

Die unendlichen Reihen für Potenz, Logarithmus, Exponenzialgrösse, Cosinus und Sinus.

Wenn wir die Frage entscheiden wollen, in welchen Fällen der Ausdruck R_n sich der Null als Gränzwerth nähert, so wird es bei den mannichfachen Formen, die jene Grösse für verschiedene Funktionen $F(x)$ haben kann, nöthig sein, sich nach einem ganz allgemeinen Criterium umzusehen, woraus man erkennen kann, ob eine beliebige Funktion $f(n)$ von n für unausgesetzt wachsende Werthe von n auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabsinkt oder nicht. Ein solches Kennzeichen besteht nun in folgendem Satze:

Wenn der Quotient $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ von einer gewissen Stelle an kleiner als die Einheit wird und es auch immer bleibt wie gross man n annehmen möge, wenn also selbst

$$\text{Lim} \frac{f(n+1)}{f(n)} < 1$$

ist, wobei es blos auf den absoluten Werth ankommt, so nimmt die Funktion $f(n)$ selbst unausgesetzt bis zur Gränze Null ab, ist also

$$\text{Lim} f(n) = 0.$$

Nennen wir α den Gränzwerth von $\frac{f(n+1)}{f(n)}$, wo also $\alpha < 1$ ist, und nehmen wir zwischen 1 und α eine Zahl β an ($\beta > \alpha$ aber $\beta < 1$), so muss sich immer ein Werth p von n finden lassen, von welchem ab der Quotient $\frac{f(n+1)}{f(n)} < \beta$ ist. Denn wählt man p ziemlich gross, so kann $\frac{f(p+1)}{f(p)}$ nicht viel von α verschieden sein, man kann diesen Quo-

tienten etwa $= \alpha \pm \delta$ setzen, wo δ nur wenig beträgt und noch überdiess abnimmt, wenn p wächst, wird also auch δ so klein machen können, dass selbst $\alpha + \delta < \beta$ ist. Wir haben dann folgende Ungleichungen:

$$\frac{f(p+1)}{f(p)} < \beta$$
$$\frac{f(p+2)}{f(p+1)} < \beta$$
$$\frac{f(p+3)}{f(p+2)} < \beta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{f(p+q)}{f(p+q-1)} < \beta,$$

deren Anzahl q beträgt. Durch ihre Multiplikation ergiebt sich

$$\frac{f(p+q)}{f(p)} < \beta^q,$$

und wenn man $p+q=n$ also $q=n-p$ setzt

$$f(n) < f(p)\,\beta^{n-p}.$$

Da nun $\beta < 1$ war, so können wir $\beta = \frac{1}{1+\gamma}$ setzen, wo γ irgend eine positive Grösse ist und erhalten

$$f(n) < \frac{f(p)}{(1+\gamma)^{n-p}}. \qquad (1)$$

Nach dem Binomialtheoreme für ganze positive Exponenten ist bekanntlich

$$(1+\gamma)^m = 1 + \frac{m}{1}\gamma + \frac{m(m-1)}{1.2}\gamma^2 + \ldots + \gamma^m,$$

woraus, weil alle Reihenglieder positiv sind,

$$(1+\gamma)^m > 1 + m\gamma$$

oder

$$\frac{1}{(1+\gamma)^m} < \frac{1}{1+m\gamma}$$

folgt. Man kann daher die Ungleichung (1) in die stärkere

$$f(n) < \frac{f(p)}{1+(n-p)\gamma}$$

umsetzen. Lassen wir hier n unausgesetzt wachsen ohne p zu ändern,

so kann $n-p$, ebenso $(n-p)\gamma$, und folglich auch der ganze Nenner grösser als jede angebbare Zahl werden und mithin der Quotient der Null so nahe kommen als man will. Daraus ergiebt sich dann, dass auch $f(n)$ auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabgebracht werden kann. — Der Satz besteht übrigens nicht mehr, sobald $\alpha=1$ oder gar >1 ist; im ersten Falle kann $f(n)$ ebensowohl ab- wie zunehmen*) und im zweiten wächst $f(n)$ mit n gleichzeitig über alle Gränze hinaus, wie sich leicht durch eine der obigen ganz analoge Betrachtung zeigen liesse.

Wir gehen nun zu den Anwendungen unseres Theoremes.

I. In der Formel (4) des vorigen Paragraphen ist

$$R_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}\, x^n \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1} (1+\lambda x)^{\mu-1} \quad (2)$$

und hier brauchen wir auf den letzten Faktor keine Rücksicht zu nehmen, weil er von n gar nicht abhängt. Der erste Faktor annullirt sich unmittelbar, sobald μ gleich einer von den Zahlen $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ ist, aber in diesem Falle erhalten wir nichts Neues, wir kommen nämlich auf das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten zurück. Setzen wir nun für nicht ganze und positive μ

$$f(n) = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\, x^n$$

also

$$f(n+1) = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)}{1.2\ldots(n-1)n}\, x^{n+1},$$

so folgt

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{\mu-n}{n}\, x = \left(\frac{\mu}{n}-1\right) x$$

und mithin

$$\operatorname{Lim} \frac{f(n+1)}{f(n)} = -x.$$

Soll nun der absolute Werth von $-x$ unter der Einheit liegen, so muss diess mit x selbst der Fall oder $1 > x > -1$ sein. Hierin haben wir die Bedingung für die unausgesetzte Annäherung des ersten Fak-

---

*) So haben z. B. $\frac{1}{n^2}$ und n^2 beide die Eigenschaft, dass $\operatorname{Lim}\frac{f(n+1)}{f(n)}=1$ ist; $f(n)=\frac{1}{n^2}$ bildet aber eine abnehmende und $f(n)=n^2$ eine zunehmende Funktion.

tors in (2) an die Null, und es fragt sich nur noch, ob für ein solches x der zweite Faktor nicht etwa unbegränzt zunimmt, so dass $\operatorname{Lim} R_n$ sich unter die vieldeutige Form $0 . \infty$ stellte. Da nun aber λ eine positive Grösse zwischen 0 und 1 ist, so haben wir bei positiven x ganz sicher $1+\lambda x > 1-\lambda$; bei negativen x, wo $1-\lambda x$ an die Stelle von $1+\lambda x$ käme, ist $\lambda x < \lambda$ (wegen $x<1$), mithin $1-\lambda x > 1-\lambda$, in jedem Falle also ist $\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}$ ein ächter Bruch oder wenigstens nicht grösser als die Einheit und folglich übersteigt auch der zweite Faktor:

$$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1}$$

die Einheit nicht. Wir haben daher für $1 > x > -1$ dem absoluten Werthe nach

$$R_n \leqq f(n)\,(1+\lambda x)^{\mu-1}$$

und folglich $\operatorname{Lim} R_n = 0$. Benutzen wir diess für die Gleichung (4) in §. 36., so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{c}(1+x)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+\dots\dots \\ 1 > x > -1\end{array}\right\} \quad (3)$$

Da hier μ ganz beliebig ist, so führt diese Gleichung den Namen: allgemeines Binomialtheorem. Ein paar andere Formen sind

$$\begin{array}{c}(1+x)^{-\mu} = 1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2-\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\dots \\ 1 > x > -1,\end{array}$$

und wenn man auch x negativ macht,

$$\left.\begin{array}{c}(1-x)^{-\mu} = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\dots \\ 1 > x > -1\end{array}\right\} \quad (4)$$

Nimmt man hier

$$x = \frac{z}{1+z},$$

wo nun z jede beliebige positive Grösse bedeuten kann, so ergiebt sich noch die oft brauchbare Form

$$\left.\begin{array}{c}(1+z)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}\left(\frac{z}{1+z}\right)+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3+. \\ z \geqq 0.\end{array}\right\} \quad (5)$$

II. In Formel (5) des vorigen Paragraphen ist

$$R_n = x^n \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1} \frac{(-1)^{n+1}}{1+\lambda x}, \tag{6}$$

wobei wir wieder auf den letzten Faktor keine Rücksicht zu nehmen brauchen, weil er seinem absoluten Werthe nach von n nicht abhängt. Man übersieht nun auf der Stelle, dass der ganze Ausdruck sich der Gränze Null nähert, sobald

$$1 > x > -1$$

ist. In diesem Falle nämlich übersteigt, wie wir bereits gesehen haben, der zweite Faktor in R_n:

$$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda x}\right)^{n-1}$$

die Einheit nicht und folglich ist den absoluten Werthen nach

$$R_n \leqq x_n \frac{1}{1+\lambda x}.$$

Da nun bei ächt gebrochenen x, der Gränzwerth von x^n die Null, $\frac{1}{1+\lambda x}$ dagegen immer eine endliche Grösse ist, so folgt hieraus zusammen

$$\operatorname{Lim} R_n = 0 \text{ für } 1 > x > -1.$$

Diese Eigenschaft findet übrigens auch noch für $x = +1$ statt, denn es geht dann R_n seinem absoluten Werthe nach in

$$\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n-1} \frac{1}{1+\lambda}$$

über und da wir wissen, dass λ zwischen 0 und $+1$ liegt, so ist jetzt der erste Faktor hiervon ein ächter Bruch, mithin

$$\operatorname{Lim} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n-1} = 0$$

und also wieder $\operatorname{Lim} R_n = 0$. Das Nämliche würde man auch finden, wenn man sich der zweiten aus no. (12) in §. 35. entspringenden Form für R_n bedienen wollte. Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich nun aus Formel (5) in §. 36:

$$l(1+x)=\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots \quad 1 \geqq x > -1, \qquad (7)$$

also z. B. für $x=1$

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Für negative x ist nach no. (7) wegen $-l(1-x)=l\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots \quad 1 > x \geqq -1. \qquad (8)$$

Mit Hülfe der Substitution

$$x=\frac{z}{1+z}$$

ergiebt sich hieraus für jedes positive z

$$l(1+z)=\frac{1}{1}\left(\frac{z}{1+z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3+\ldots. \quad z \geqq 0. \qquad (9)$$

Nimmt man die halbe Summe der Gleichungen (7) und (8), so wird

$$\frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{1}x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots. \quad 1 > x > -1 \qquad (10)$$

und für

$$\frac{1+x}{1-x}=z, \quad \text{also } x=\frac{z-1}{z+1},$$

wo nun z jede positive Grösse bedeuten kann

$$\frac{1}{2}lz=\frac{1}{1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots. \quad z > 0. \qquad (11)$$

Zur numerischen Berechnung der Logarithmen ist es am bequemsten, solche Reihen zu haben, deren Glieder rasch abnehmen, so dass schon wenige Glieder eine hinreichende Annäherung geben. Man erhält dergl. Reihen auf folgende Weise. In Formel (7) sei $x=\frac{b}{a}$

und $a < b$, so wird $l(1+x) = l\left(1+\frac{b}{a}\right) = l\left(\frac{a+b}{a}\right) = l(a+b) - la$, folglich

$$l(a+b) = la + \frac{1}{1}\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \ldots \qquad (12)$$

und diese Formel kann zur Berechnung von $l(a+b)$ dienen, sobald la schon bekannt ist. — Setzt man ferner in no. (8) $x = \frac{1}{p^2}$, wo p eine ganze positive Zahl ist, so folgt

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = l\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = 2lp - l[(p-1)(p+1)]$$
$$= 2lp - \{l(p-1) + l(p+1)\},$$

woraus man durch Transposition und Division mit 2 leicht erhält

$$\left.\begin{aligned} lp = {} & \frac{l(p-1) + l(p+1)}{2} \\ & + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{4p^4} + \frac{1}{6p^6} + \frac{1}{8p^8} + \ldots . \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Nun braucht man aber blos die Logarithmen der Primzahlen unmittelbar zu berechnen; nimmt man für p eine solche, so sind $p-1$ und $p+1$ zusammengesetzte Zahlen, folglich ihre Logarithmen aus der Berechnung der früheren Primzahlen schon bekannt. Diess setzt indessen voraus, dass man den Logarithmus der 2 wenigstens schon kenne, doch lässt sich auch dieser durch einen kleinen Kunstgriff aus der Formel (13) selbst finden. Für $p=2$ und $p=3$ erhält man nämlich

$$l2 = \frac{1}{2}\,l3 + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{6.2^6} + \ldots .$$

$$l3 = \frac{l2 + l4}{2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{4.3^4} + \frac{1}{6.3^6} + \ldots .$$

Es ist aber $l4 = 2l2$, folglich wenn man mit P und Q die Summen der nach Potenzen von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ fortgehenden Reihen bezeichnet

$$l2 = \frac{1}{2}\,l3 + P\,,\ l3 = \frac{3}{2}\,l2 + Q.$$

Sieht man hier $l2$ und $l3$ als zwei Unbekannte an und eliminirt dieselben algebraisch, so wird

$$l2 = 4P + 2Q\,,\ l3 = 6P + 4Q$$

wodurch $l2$ und $l3$ ihre Bestimmung gefunden haben. Hat man auf diese Weise eine Tafel der natürlichen Logarithmen berechnet, so kann man daraus leicht eine der künstlichen Logarithmen ableiten. Heisst nämlich B die Basis der letzteren und bezeichnen wir mit log einen Logarithmus dieses Systems, so ist bekanntlich

$$\log z = \frac{1}{lB} . lz,$$

wo $\frac{1}{lB}$ der Modulus des Systemes mit der Basis B heisst. Für $B=10$ findet man nach den angegebenen Regeln $lB = 2{,}3025850929$

folglich den Modulus $\frac{1}{lB} = 0{,}4342944819$.

III. In Formel (6) §. 3C. ist

$$R_n = \frac{(kx)^n}{1.2.3\ldots n} e^{\lambda kx}.$$

Da nun $e^{\lambda kx}$ für jedes bestimmte k und x eine endliche Grösse bleibt, so wird Lim $R_n = 0$, sobald der erste Faktor

$$f(n) = \frac{(kx)^n}{1.2.3\ldots n}$$

die Null zum Gränzwerthe hat. Es ist aber

$$\text{Lim} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \text{Lim} \frac{kx}{n} = 0$$

für jedes beliebige k und x, und da $0 < 1$, so ist immer Lim $f(n) = 0$ und Lim $R_n = 0$. Wir erhalten daher ohne weitere Determination

$$e^{kx} = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{(kx)^2}{1.2} + \frac{(kx)^3}{1.2.3} + \ldots. \qquad (14)$$

Für $kx = 1$ ergiebt sich hieraus

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

und mittelst dieser Reihe ist es sehr leicht, den Werth von e, den wir in der Einleitung als den Gränzwerth von

$$(1 + \frac{1}{m})^m$$

für unendlich wachsende m kennen lernten, numerisch zu berechnen. — Nehmen wir in (14) $k = la$ und berücksichtigen, dass

$$e^{la \cdot x} = (e^{la})^x = a^x$$

ist, so wird noch

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{1.2} + \frac{(x\,la)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

IV. In den Formeln (7) und (8) der vorigen Paragraphen ist erst

$$R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \lambda x\right)$$

und dann

$$R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \sin\left(n\frac{\pi}{2} + \lambda x\right).$$

Da aber Cosinus und Sinus Grössen sind, welche die Gränzen $+1$ und -1 nicht übersteigen können, was auch der Bogen für einen Werth haben möge, so erhellt, dass in jedem Falle $\operatorname{Lim} R_n = 0$ wird, sobald

$$\operatorname{Lim} \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ist. Nach dem, was wir in no. III. gefunden haben, muss diess aber für jedes beliebige x der Fall sein, und daher ergeben sich jetzt die beiden bemerkenswerthen Formeln

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots 6} + \ldots. \qquad (16)$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. \qquad (17)$$

gültig für jedes x. Es versteht sich beim blosen Anblicke dieser Gleichungen von selbst, dass man hier $\cos x$ und $\sin x$ in dem nämlichen Maasse ausgedrückt erhält, in welchem x angegeben ist. Will man daher, wie gewöhnlich, die goniometrischen Funktionen in Theilen des Halbmessers ausdrücken, so muss man auch x in solchen angeben, was, wenn der Bogen ursprünglich in Graden bestimmt ist, leicht mittelst der Ludolph'schen Zahl geschehen kann, welche dem Bogen von 180° entspricht. Es giebt dann zu jeder beliebigen absoluten Zahl einen Cosinus, Sinus und ebenso alle übrigen goniometrischen Funktionen.

Aus diesen Betrachtungen ist ersichtlich, dass die Bedingungen, unter welchen sich die Grösse R_n der Null unbegränzt nähert, lediglich von der Form der Funktion $F(x)$ abhängen, indem sie sich für Spezialisirungen derselben verschieden gestalten; hierdurch entsteht

für die Anwendung des so fruchtbaren Theoremes von Mac Laurin eine nicht geringe Unbequemlichkeit, in so fern wir genöthigt sind, bei jeder neuen uns vorkommenden Funktion $F(x)$ die Untersuchung über Lim R_n auch wieder von Neuem vorzunehmen. Es wäre daher in hohem Grade wünschenswerth, ein ganz allgemeines Kennzeichen zu haben, mit Hülfe dessen man der Funktion $F(x)$ gleich im voraus ansehen könnte, unter welchen Bedingungen das aus ihr hergeleitete R_n sich der Null als Gränze nähert oder nicht. Man kann die Sache aber auch noch unter einem anderen und sogar bequemeren Gesichtspunkte betrachten. So wie nämlich zwischen $F(x)$ und der Reihe

$$F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \ldots \text{ in inf.}$$

nur dann eine Identität statt findet, wenn Lim $R_n = 0$ ist, so kann man auch umgekehrt behaupten, dass wenn jene Identität vorhanden ist, auch $R_n = 0$ sein müsse. Denn gesetzt, man hätte auf einem von dem bisherigen ganz verschiedenen Wege gefunden

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \ldots \text{ in inf.} \qquad (18)$$

und die Bedingungen kennen gelernt, unter welchen diese Gleichung besteht, so würde man dieses Resultat mit dem Mac Laurin'schen Satze zusammenhalten können, nach welchem

$$F(x) - \text{Lim}\, R_n = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \ldots \text{ in inf.}$$

sein muss; hieraus ergiebt sich dann

$$F(x) = F(x) - \text{Lim}\, R_n,$$

mithin Lim $R_n = 0$. Es wäre also die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen besteht die Gleichung (18)?

Um aber die Allgemeinheit so hoch als möglich zu treiben, ist uns noch ein Schritt nöthig. Wir haben uns früher nicht darauf beschränkt, die Variablen in den Funktionen als blos reell anzusehen, sondern auch imaginäre Werthe derselben zugelassen, wir müssen daher auch die jetzige Untersuchung so allgemein halten, dass sie den Fall imaginärer Veränderlichen in sich schliesst. Zu diesem Zwecke denken wir uns x unter der Form $u + v\sqrt{-1}$ stehend, wo natürlich auch u oder v, die als reell vorausgesetzt werden, der Null gleich sein darf. Berücksichtigt man noch, dass eine zweitheilige Grösse von

der Form $u + v\sqrt{-1}$ stets auf das Schema $\varrho\,(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$ gebracht werden kann*), so spricht sich das Thema der jetzt nöthigen Untersuchung in folgender Frage aus:

Welche Eigenschaften müssen der Funktion $F(x)$ zukommen und welchen Bedingungen muss x unterworfen sein, wenn die Gleichung:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots \text{ in inf.} \quad (19)$$

worin x unter der Form $\varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$ vorausgesetzt wird, gelten soll?

§ 38.

Beziehungen zwischen einer Funktion und ihrem ersten Differenzialquotienten bei imaginären Variablen.

Da die Gleichung no. (19), ganz im Allgemeinen betrachtet, eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren successiven Differenzialquotienten enthält, so wird es vor Allem darauf ankommen, zu entscheiden, in wie fern sich die Relationen, welche wir bei reellen Variablen zwischen einer Funktion und ihren Differenzialquotienten statt finden sahen, auf imaginäre Veränderliche ausdehnen lassen. Wenden wir uns daher zunächst an die einfachste dieser Relationen nämlich

$$F(b) - F(a)$$
$$= \operatorname{Lim}\delta\,\{F'(a) + F'(a+\delta) + F'(a+2\delta) + \ldots + F'(a+\overline{n-1}\,\delta)\} \quad (1)$$

worin

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

*) Aus $u + v\sqrt{-1} = \varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$ folgt nämlich $\varrho\cos\tau = u$, $\sin\tau = v$, mithin

$$(\varrho\cos\tau)^2 + (\varrho\sin\tau)^2 = u^2 + v^2 \text{ oder } \varrho = \sqrt{u^2+v^2}$$
$$\frac{\varrho\sin\tau}{\varrho\cos\tau} = \frac{v}{u} \qquad \text{oder } \tan\tau = \frac{v}{u},$$

womit ϱ (der sogen. Modulus) und τ (das Argument) bestimmt sind. Für reelle u und v, die in jener Form immer vorausgesetzt werden, fallen auch ϱ und τ immer reell aus.

ist und die Funktion $F(x)$ und ebenso $F'(x)$ als stetig und endlich von $x=a$ bis $x=b$ vorausgesetzt werden, damit keine der Grössen

$$F(b)\ ,\ F(a)\ ,\ F'(a)\ ,\ F'(a+\delta)\ ,\ \ldots\ F'(a+\overline{n-1}\,\delta)$$

zweideutig oder unendlich ausfalle.

Substituiren wir jetzt für $F(x)$ eine andere Funktion, welche die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}=i$ enthält, nehmen also etwa

$$F(x)=f[r(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)]=f(re^{xi}), \qquad (2)$$

so ist die Operation des Differenzirens ganz gleichförmig ausführbar, wie schon in der ersten Abtheilung gezeigt wurde. Für

$$re^{xi}=z$$

ist nämlich

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{df(z)}{dx}=\frac{df(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=f'(z)\,.\,rie^{xi}$$

d. i.

$$F'(x)=rie^{xi}f'(re^{xi}).$$

Sollte nun die Gleichung (1) auch jetzt noch gelten, so müsste nach Substitution der Werthe von $F(x)$ und $F'(x)$:

$$f(re^{bi})-f(re^{ai})$$
$$=ri\,\mathrm{Lim}\,\delta\,\{e^{ai}f'(re^{ai})+e^{(a+\delta)i}f'(re^{(a+\delta)i})+e^{(a+2\delta)i}f'(re^{(a+2\delta)i})+\ldots$$
$$\ldots+e^{(a+\overline{n-1}\delta)i}f'(re^{(a+\overline{n-1}\delta)i})\} \qquad (4)$$

sein. In wie weit diess richtig ist, ergiebt sich durch folgende einfache Betrachtung.

Man denke sich die Funktion $f(re^{xi})$ dergestalt zerlegt, dass

$$f(re^{xi})=\varphi(r,x)+i\psi(r,x) \qquad (5)$$

ist, wo $\varphi(r,x)$ und $\psi(r,x)$ ein paar reelle Funktionen von x sind; man hat dann durch Differenziation nach x

$$rie^{xi}f'(re^{xi})=\varphi'(r,x)+i\psi'(r,x).$$

Setzt man hier der Reihe nach a , $a+\delta$, $a+2\delta$, ... $a+\overline{n-1}\delta$ für x, addirt sämmtliche so entstehende Gleichungen und multiplizirt diese Summe mit δ, so folgt

$$ri.\delta\,\{e^{ai}f'(re^{ai})+e^{(a+\delta)i}f'(re^{(a+\delta)i})+e^{(a+2\delta)i}f'(re^{(a+2\delta)i})+\ldots$$
$$\ldots+e^{(a+\overline{n-1}\delta)i}f'(re^{(a+\overline{n-1}\delta)i})\}$$
$$=\delta\,\{\varphi'(r,a)+\varphi'(r,a+\delta)+\varphi'(r,a+2\delta)+\ldots+\varphi'(r,a+\overline{n-1}\delta)\}$$
$$+i.\delta\,\{\psi'(r,a)+\psi'(r,a+\delta)+\psi'(r,a+2\delta)+\ldots+\psi'(r,a+\overline{n-1}\delta)\}.$$

Ist nun der Werth von r so gewählt*), dass keine der Funktionen auf der rechten Seite unstetig oder unendlich wird, dass also auch $\varphi(r,x)$

---

*) Man könnte für den ersten Augenblick glauben, dass auf den Werth von r nichts ankomme, weil er bei der Differenziation nach x als Constante figurirte; man darf aber nicht vergessen, dass eine Funktion von einer Variablen x und einer unbestimmten oder willkührlichen Constanten r im Grunde eine Funktion zweier Variablen r und x, und die Differenziation nach x eine partielle ist; es kann daher auch zusammengehörige Paare von Werthen für r und x geben, für welche diese Funktion unstetig oder unendlich wird. Ein Beispiel zum obigen Satze wird diess erläutern. Sei nämlich $f(z) = \text{Arctan}\, z$, so wird

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

mithin

$$ri\,e^{xi} f'(re^{xi}) = \frac{ri(\cos x + i\sin x)}{1+\{r(\cos x + i \sin x)\}^2} = \frac{ri(\cos x + i\sin x)}{1+r^2\cos 2x + ir^2 \sin 2x}$$

und wenn man Zähler wie Nenner mit $1+r^2\cos 2x - ir^2\sin 2x$ multiplizirt, nach leichter Reduktion

$$ri\,e^{xi} f'(re^{xi})$$
$$= \frac{r(1-r^2)\sin x}{1+2r^2\cos 2x + r^4} + i\,\frac{r(1+r^2)\cos x}{1+2r^2\cos 2x + r^4}$$

also

$$\varphi'(r,x) = \frac{r(1-r^2)\sin x}{1+2r^2\cos 2x + r^4}.$$

In der obigen Formel durchläuft nun x das Intervall $x=a$ bis $x=b$, indem es nach und nach alle Zwischenstufen $a+\delta$, $a+2\delta$ etc. ersteigt; wäre also z. B. $a<\frac{\pi}{2}$ und $b>\frac{\pi}{2}$, so käme auch der Werth $x=\frac{\pi}{2}$ mit vor, indem eine jener Zwischenstufen etwa $a+k\delta=\frac{\pi}{2}$ würde. In diesem Falle ist dann

$$\varphi'(r, a+k\delta) = \frac{r(1-r^2)}{1-2r^2+r^4} = \frac{r}{1-r^2}.$$

Man übersicht hier auf der Stelle die Determination, welche für r eintreten muss; es darf nämlich r nicht $=1$ sein.

Ebenso leicht findet man umgekehrt für $r=1$

$$ri\,e^{xi} f'(re^{xi}) = i\,\frac{2}{\cos x}$$

also $\psi'(1\,,\,x) = \frac{2}{\cos x}$, woraus folgt, dass das Intervall a bis b nicht den Werth $\frac{\pi}{2}$ einschliessen darf, weil sonst $\psi'(1,x)$ unstetig würde.

und $\psi(r,x)$ selbst stetig und endlich von $x=a$ bis $x=b$ bleiben, so erhalten wir als Gränzwerth der rechten Seite für unendlich abnehmende δ

$$\varphi(r,b)-\varphi(r,a)+i\{\psi(r,b)-\psi(r,a)\}$$
$$=\varphi(r,b)+i\psi(r,b)-\{\varphi(r,a)+i\psi(r,a)\}$$

d. i. nach no. (5)

$$f(re^{bi})-f(re^{ai})$$

und kommen hiermit wirklich auf die vorhin blos hypothetisch aufgestellte Gleichung (4) zurück.

Um die Bedingungen ihrer Gültigkeit kurz aussprechen zu können, wollen wir noch als Definition festsetzen, dass unter Stetigkeit und Endlichkeit einer Funktion mit imaginärer Variablen die Stetigkeit und Endlichkeit der beiden reellen Funktionen verstanden werden soll, in welche man sich jene nach dem Schema (5) zerlegt denken kann. Die Bedingung, dass die vier Funktionen $\varphi(r,x)$, $\psi(r,x)$, $\varphi'(r,x)$, $\psi'(r,x)$ endlich und stetig bleiben sollen, reduzirt sich nach diesem Sprachgebrauche darauf, dass $f(re^{xi})$ und $e^{xi}f'(re^{xi})$ endlich und stetig sein müssen oder, weil $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ schon an sich stetig und endlich ist, auf die Bedingung der Stetigkeit und Endlichkeit von $f(re^{xi})$ und $f'(re^{xi})$. Schreiben wir endlich noch der später nöthig werdenden Bezeichnungen wegen t für x, so können wir folgenden Satz aussprechen:

> Wählt man die Grösse r so, dass die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig bleiben, sobald man $z=re^{ti}$ und t willkührlich innerhalb des Intervalles $t=a$ bis $t=b$ nimmt, so gilt für
>
> $$\delta=\frac{b-a}{n}$$
>
> die folgenhe Relation:
>
> $$\frac{1}{ri}\{f(re^{bi})-f(re^{ai})\}=$$
> $$\operatorname{Lim}\delta\{e^{ai}f'(re^{ai})+e^{(a+\delta)i}f'(re^{(a+\delta)i})+e^{(a+2\delta)i}f'(re^{(a+2\delta)i})+\dots$$
> $$\dots+e^{(a+\overline{n-1}\delta)i}f'(re^{(a+\overline{n-1}\delta)i})\},\qquad (6)$$
>
> worin sich das Zeichen Lim auf das unbegränzte Wachsen der ganzen positiven Zahl n bezieht.

Es liegt hier der Gedanke nicht fern, a und b so zu wählen, dass die beiden Grössen

$$e^{ai}=\cos a+i\sin a$$

und

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b$$

einander gleich werden, wodurch sich die linke Seite unsrer in (6) verzeichneten Gleichung auf Null reduziren würde; es ist aber nichts leichter als diess, man braucht nämlich blos $a=0$ und $b=2\pi$ zu setzen. Ausserdem wird dann noch $\delta = \frac{2\pi}{n}$, wobei wir zur Abkürzung

$$e^{\delta i} = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n} = \vartheta$$

setzen wollen. Berücksichtigen wir endlich, dass $\cos t + i \sin t$ von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ keine anderen Werthe annimmt als solche, die es von $t=0$ bis $t=2\pi$ bekommt, so ergiebt sich noch das Theorem:

Wählt man die Grösse r so, dass die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig bleiben, wenn man für ganz beliebige t die Variable $z = re^{ti}$ setzt, so gilt die Gleichung

$$0 = \mathrm{Lim} \frac{f'(r) + \vartheta f'(r\vartheta) + \vartheta^2 f'(r\vartheta^2) + \ldots + \vartheta^{n-1} f'(r\vartheta^{n-1})}{n}. \quad (8$$

Dass die Gültigkeit dieser Formel sogleich ein Ende hat, wenn eine Unterbrechung der Stetigkeit oder ein Unendlichwerden von $f(z)$ oder $f'(z)$ für $z = re^{ti}$ vorkommt, sieht man sehr leicht an einzelnen Beispielen. Bemerkenswerth in dieser Beziehung ist die Annahme $f(z) = lz$. Vermöge der Formel

$$l(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + i \,\mathrm{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}$$

ergiebt sich dann

$$l(re^{ti}) = l(r\cos t + ir\sin t) = \tfrac{1}{2} l(r^2) + i \,\mathrm{Arctan}(\tan t).$$

Nach unserem Sprachgebrauche heisst nun Stetigkeit und Endlichkeit von $l(re^{ti})$ nichts Anderes als Stetigkeit und Endlichkeit von $\frac{1}{2}l(r^2)$ und $\mathrm{Arctan}(\tan t)$. Nun ist $\frac{1}{2}l(r^2)$ stetig und endlich für jedes von 0 verschiedene r, also muss erstlich $r \gtrless 0$ sein. Lassen wir aber in $\mathrm{Arctan}(\tan t)$ die Variable t das Intervall $t=0$ bis $t=2\pi$ durchlaufen, so tritt schon an der Stelle $t = \frac{\pi}{2}$ eine Unterbrechung der Continuität ein. Es ist nämlich, wenn δ eine bis zur Gränze Null abnehmende positive Grösse bezeichnet:

$$\text{Lim Arctan}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]=\text{Arctan}[+\infty]=+\frac{\pi}{2},$$

$$\text{Lim Arctan}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)\right]=\text{Arctan}[-\infty]=-\frac{\pi}{2}.$$

An der Stelle $t=\frac{\pi}{2}$ springt also die Funktion $u=\text{Arctan}\,(\tan t)$ von $u=+\frac{\pi}{2}$ nach $u=-\frac{\pi}{2}$ über. Die Gleichung (8) gilt daher nicht für $f(z)=lz$, und in der That ist dann $f'(z)=\frac{1}{z}$, mithin für ein ganzes positives m

$$\vartheta^m f'(r\vartheta^m)=\vartheta^m\frac{1}{r\vartheta^m}=\frac{1}{r},$$

folglich jener Gränzwerth nicht $=0$, sondern $=\frac{1}{r}$.

Es ist nun auch sehr leicht, den Gränzwerth von

$$\frac{f(r)+f(r\vartheta)+f(r\vartheta^2)+\ldots.+f(r\vartheta^{n-1})}{n}=F(r,n) \qquad (9)$$

auszumitteln, wobei $F(r,n)$ zur Abkürzung gebraucht wird. Es wird nämlich

$$\frac{dF(r,n)}{dr}=\frac{f'(r)+\vartheta f'(r\vartheta)+\vartheta^2 f'(r\vartheta^2)+\ldots+\vartheta^{n-1}f'(r\vartheta^{n-1})}{n},$$

mithin wenn δ ein kleines Inkrement von r bezeichnet:

$$\frac{F(r+\delta,n)-F(r,n)}{\delta}$$

$$=\frac{f'(r)+\vartheta f'(r\vartheta)+\vartheta^2 f'(r\vartheta^2)+\ldots.+\vartheta^{n-1}f'(r\vartheta^{n-1})}{n}+\varepsilon,$$

wo ε eine mit δ gleichzeitig bis zur Null abnehmende Grösse bedeutet. Gehen wir in dieser Gleichung zur Gränze für unausgesetzt wachsende n über, so ist wegen no. (8), wenn wir $\text{Lim}\,F(r,n)$ kurz mit $F(r)$ bezeichnen,

$$\frac{F(r+\delta)-F(r)}{\delta}=\varepsilon$$

und wenn wir noch die Gränze für unendlich abnehmende δ nehmen

$$F'(r)=0$$

für jedes beliebige r. Hieraus folgt sogleich, dass $F(r)$ selbst oder $\operatorname{Lim} F(r,n)$ von r unabhängig, d. i. eine Constante, sein müsse. Diess giebt den Satz:

Wählt man die Grösse r so, dass die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig bleiben, wenn man für ganz beliebige t die Variable $z=re^{ti}$ setzt, so gilt die Gleichung:

$$\text{Const.} = \operatorname{Lim} \frac{f(r)+f(r\vartheta)+f(r\vartheta^2)+\ldots+f(r\vartheta^{n-1})}{n}. \quad (10)$$

Da der vorliegende analytische Ausdruck aus $f(z)$ dadurch gebildet wird, dass man für z der Reihe nach $r, r\vartheta, r\vartheta^2, \ldots r\vartheta^{n-1}$ setzt, von den so entstandenen Werthen der Funktion das arithmetische Mittel und von diesem die Gränze für unendlich wachsende n nimmt, so dürfte es nicht unpassend sein, das Endresultat der genannten drei Operationen die Mittelgränze von $f(z)$ für r als Modulus zu nennen und in folgender Weise zu bezeichnen:

$$\operatorname{Lim} \frac{f(r)+f(r\vartheta)+f(r\vartheta^2)+\ldots+f(r\vartheta^{n-1})}{n} = M_r\{f(z)\}. \quad (11)$$

Bevor wir weiteren Untersuchungen über diese jeder Funktion zugehörige Constante Raum geben, wollen wir erst einige Beispiele für die Bestimmung derselben betrachten und zwar solche, die uns beim späteren Verlaufe der Untersuchung selbst wieder von Nutzen sein werden.

§. 39.

Bestimmung der Mittelgränzen einiger Funktionen.

I. Bleiben die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ endlich und stetig von $z=r_0(\cos t+i\sin t)$ bis $z=r_1(\cos t+i\sin t)$, wobei immer t völlig willkührlich gelassen wird und r_0, r_1 zwei verschiedene Werthe des Modulus r bezeichnen, so hat die Mittelgränze vermöge ihrer Unabhängigkeit von r für alle r zwischen r_0 und r_1 den nämlichen Werth; glückt es also, sie für $r=r_0$ oder $r=r_1$ zu bestimmen, was in speziellen Fällen sehr leicht sein kann, so gilt der gefundene Werth für alle nicht ausserhalb des Intervalles $r=r_0$ bis $r=r_1$ liegende r. Von besonderem Vortheile ist diese Bemerkung in dem Falle $r_0=0$, wo also $f(z)$ und $f'(z)$ stetig und endlich von $z=0$ bis $z=r_1(\cos t+i\sin t)$ bleiben; man hat dann sehr einfach für $r=0$

$$M_0\{f(z)\}=\text{Lim}\frac{f(0)+f(0)+\ldots+f(0)}{n}=f(0),$$

mithin allgemein

$$M_r\{f(z)\}=f(0)\ ,\ r_1\geqq r\geqq 0. \tag{1}$$

Nimmt man z. B. $f(z)=z^m$, so wird

$$f(re^{ti})=r^m\{\cos mt+i\sin mt\},$$
$$f'(re^{ti})=mr^{m-1}\{\cos(m-1)t+i\sin(m-1)t\}.$$

Setzt man m als positive ganze Zahl voraus, so giebt es keinen Werth von r und t, für welchen die vier Funktionen

$$r^m\cos mt,\ r^m\sin mt,\ r^{m-1}\cos(m-1)t,\ r^{m-1}\sin(m-1)t$$

unstetig oder unendlich würden; es ist demnach zufolge der Gleichung (1)

$$M_r\{z^m\}=0. \tag{2}$$

Diess lässt sich auch aus der Definition von $M_r\{z^m\}$ nachweisen. Man hat nämlich

$$M_r\{z^m\}$$
$$=\text{Lim}\frac{1}{n}\{r^m+(r\vartheta)^m+(r\vartheta^2)^m+\ldots+(r\vartheta^{n-1})^m\}$$
$$=\text{Lim}\frac{r^m}{n}\{1+\vartheta^m+\vartheta^{2m}+\ldots+\vartheta^{(n-1)m}\}.$$

Stellt man die eingeklammerte Reihe in der Form

$$1+\vartheta^m+(\vartheta^m)^2+(\vartheta^m)^3+\ldots+(\vartheta^m)^{n-1}$$

dar, so findet man leicht ihre Summe:

$$=\frac{1-(\vartheta^m)^n}{1-\vartheta^m}=\frac{1-\vartheta^{mn}}{1-\vartheta^m}.$$

Vermöge der Bedeutung von ϑ ist aber

$$\vartheta^{mn}=e^{mn\frac{2\pi}{n}i}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi,$$
$$\vartheta^m=e^{m\frac{2\pi}{n}i}=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n};$$

mithin

$$M_r\{z^m\}=\text{Lim}\frac{r^m}{n}\cdot\frac{1-\cos 2m\pi-i\sin 2m\pi}{1-\cos\frac{2m\pi}{n}-i\sin\frac{2m\pi}{n}}. \tag{3}$$

Der Zähler ist hier zwar $=0$, aber man darf daraus nicht schliessen wollen, dass der Gränzwerth ebenfalls Null sei; es ist nämlich

$$\operatorname{Lim}(1-\cos\frac{2m\pi}{n})=0\,,\ \operatorname{Lim}\sin\frac{2m\pi}{n}=0$$

und folglich stellt sich das Ganze unter die vieldeutige Form

$$M_r\{z^m\}=\frac{r^m}{\infty}\cdot\frac{0}{0}.$$

Wendet man dagegen im Zähler und Nenner die bekannten goniometri schen Formeln

$$1-\cos 2u=2\sin^2 u\,,\ \sin 2u=2\sin u\cos u$$

an, so wird

$$M_r\{z^m\}=\operatorname{Lim}\frac{r^m\sin m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\cdot\frac{\sin m\pi-i\cos m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}-i\cos\frac{m\pi}{n}}$$

und unter Berücksichtigung, dass

$$\operatorname{Lim}\sin\frac{m\pi}{n}=0\,,\ \operatorname{Lim}\cos\frac{m\pi}{n}=1,$$

$$\operatorname{Lim}(n\sin\frac{m\pi}{n})=\operatorname{Lim}\left(\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\frac{m\pi}{n}}\right)m\pi=m\pi$$

ist, ergiebt sich endlich

$$M_r\{z^m\}=\frac{r^m\sin m\pi}{m\pi}\cdot\frac{\sin m\pi-i\cos m\pi}{-i}, \tag{4}$$

d. i. $M_r\{z^m\}=0$ wie früher, weil $\sin m\pi=0$ ist.

II. Sind die Funktionen $f(z)$ und $f'(z)$ stetig und endlich für jedes $r>0$ an bis ins Unendliche hinaus, so kann man $M_r\{f(z)\}$ oft dadurch leicht bestimmen, dass man zuerst den Werth von $M_r\{f(z)\}$ in dem Falle aufsucht, wo r ins Unendliche wächst, was ebenfalls unter Umständen sehr leicht ist. So z. B. für $f(z)=\frac{1}{z^m}$ ist

$$f(re^{ti})=\frac{1}{r^m(\cos mt+i\sin mt)}=\frac{\cos mt-i\sin mt}{r^m}$$

und ähnlich

$$f'(re^{ti})=-m\frac{\cos(m+1)t-i\sin(m+1)t}{r^{m+1}},$$

und bei ganzen positiven m sind beide Funktionen stetig und endlich für alle $r>0$ und sonst beliebige t. Ausserdem ist

$$M_r\{\frac{1}{z^m}\}=\text{Lim}\,\frac{1}{nr^m}\{+\frac{1}{\vartheta^m}+\left(\frac{1}{\vartheta^m}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{\vartheta^m}\right)^{n-1}\}.$$

Bestimmt man zuerst $M_r\{\frac{1}{z^m}\}$ für $r=\infty$, so ist, weil $\text{Lim}\,\frac{1}{r^m}=0$ wird für $r=\infty$, $M_\infty\{\frac{1}{z^m}\}=0$ und folglich allgemein

$$M_r\{\frac{1}{z^m}\}=0\,,\, r>0. \qquad (5)$$

Man kann diess auch leicht aus der Formel (4) ersehen, wenn man daselbst $(-m)$ an die Stelle von m setzt, wodurch

$$M_r\{\frac{1}{z^m}\}=\frac{\sin m\pi}{r^m m\pi}\cdot\frac{\sin m\pi+i\cos m\pi}{i}$$

zum Vorschein kommt, was in der That $=0$ ist, wenn nicht $r=0$.

III. Wäre die Funktion $f(z)$ und ebenso ihr Differenzialquotient endlich und stetig von $r=0$ bis $r=r_1$ und dann wieder von $r=r_1$ bis $r=\infty$, so bestände sie gewissermassen aus zwei an einander geschobenen stetigen Funktionen und man würde ihre Mittelgränze für alle r zwischen 0 und r_1 dadurch bestimmen, dass man $r=0$ nähme und für alle $r>r_1$ dadurch, dass man $r=\infty$ nähme. Diese Bestimmungen können natürlich verschieden ausfallen und dann hat die Funktion zwei Mittelgränzen, von denen eine für das Intervall $r=0$ bis $r=r_1$ und die andere für das Intervall $r=r_1$ bis $r=\infty$ gilt. Z. B. für

$$f(z)=\frac{z}{z-a},\text{ also } f'(z)=-\frac{a}{(z-a)^2}$$

wird

$$f(re^{ti})=\frac{r(\cos t+i\sin t)}{r\cos t-a+ir\sin t}$$

$$f'(re^{ti})=-\frac{a}{(r\cos t-a+ir\sin t)^2}$$

und wenn wir um grösserer Allgemeinheit willen

$$a=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau) \qquad (6)$$

setzen, wo ϱ und τ gegebene Grössen sind, so ist

$$f(re^{ti})=\frac{r\cos t+ir\sin t}{r\cos t-\varrho\cos\tau+i(r\sin t-\varrho\sin\tau)}$$

und wenn Zähler wie Nenner mit $r\cos t-\varrho\cos\tau-i(r\sin t-\varrho\sin\tau)$ multiplizirt wird, so ergiebt sich nach einer kleinen Reduktion

$$f(re^{ti})$$

$$=\frac{r^2-r\varrho\cos(t-\tau)}{(r\cos t-\varrho\cos\tau)^2+(r\sin t-\varrho\sin\tau)^2}-i\frac{r\varrho\sin(t-\tau)}{(r\cos t-\varrho\cos\tau)^2+(r\sin t-\varrho\sin\tau)^2}.$$

Hier kann nun für $t=\tau$ eine Unstetigkeit eintreten; denn es wird in diesem Falle

$$f(re^{ti})=\frac{r^2-r\varrho}{(r-\varrho)^2}=\frac{r}{r-\varrho}$$

und folglich muss r von ϱ verschieden sein. Ganz ebenso verhält es sich mit $f'(re^{ti})$. Man sieht diess auch noch etwas kürzer auf folgende Weise. Die Funktion $\frac{z}{z-a}$ wird nur in dem einen Falle unstetig und zugleich unendlich, wo $z=a$ ist *), also für

$$r(\cos t+i\sin t)=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau),$$

woraus folgt $r\cos t=\varrho\cos\tau$, $r\sin t=\varrho\sin\tau$ und mithin

$$t=\tau,\text{ oder }=\tau+2\pi,\ \tau+4\pi,\text{ etc.},$$
$$r=\varrho.$$

Das erste kann man nicht hindern, weil t ein völlig willkührlicher Winkel ist, dessen Allgemeinheit nicht beschränkt werden darf, dagegen kann man verhindern, dass $r=\varrho$ wird, indem man $r \gtrless \varrho$ setzt. Da nun $f(z)$ und $f'(z)$ stetig und endlich bleiben für $r<\varrho$ und dann wieder für $r>\varrho$, so ist im ersten Falle

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=M_0\left\{\frac{z}{z-a}\right\}$$

und im zweiten

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=M_\infty\left\{\frac{z}{z-a}\right\}.$$

Da ferner für jedes t und $r=0$ in unserer Funktion

$$f(re^{ti})=0$$

ist, so hat man auch $M_0\{f(z)\}=0$, folglich

*) Man hat nämlich für $z=a+\delta$, wo δ eine bis zur Gränze Null abnehmende Grösse bezeichnet,

$$\text{Lim}\frac{z}{z-a}=\text{Lim}\frac{a+\delta}{\delta}=+\infty$$

und für $z=a-\delta$

$$\text{Lim}\frac{z}{z-a}=\text{Lim}\frac{a-\delta}{-\delta}=-\infty.$$

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=0\ ,\ r<\varrho. \tag{7}$$

Für $r=\infty$ ist dagegen

$$f(re^{ti})=$$

$$\operatorname{Lim}\frac{1-\frac{\varrho}{r}\cos(t-\tau)-i\frac{\varrho}{r}\sin(t-\tau)}{(\cos t-\frac{\varrho}{r}\cos\tau)^2+(\sin t-\frac{\varrho}{r}\sin\tau)^2}$$

wo sich das Zeichen Lim auf das unendliche Wachsen von r bezieht, oder

$$f(re^{ti})=\frac{1}{(\cos t)^2+(\sin t)^2}=1,$$

mithin

$$M_\infty\{f(z)\}=\operatorname{Lim}\frac{1+1+1+\ldots+1}{n}=1.$$

Hieraus folgt dann allgemein:

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=1\ ,\ r>\varrho. \tag{8}$$

Man kann zu diesen Resultaten auch auf einem zweiten, jedoch weniger direkten Wege gelangen. Erinnert man sich nämlich an die Formeln

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+\ldots \tag{9}$$

$$\frac{u}{1-u}=u+u^2+u^3+u^4+\ldots \tag{10}$$

welche einzig und allein für $u<1$ gelten, so ist für $u=\frac{z}{a}$, also $z<a$

$$\frac{z}{z-a}=-\frac{\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}}=-\frac{z}{a}-\frac{z^2}{a^2}-\frac{z^3}{a^3}-\ldots$$

und nun findet man die Mittelgänge sehr leicht, wenn man berücksichtigt, dass immer

$$M_r\{\varphi(z)+\psi(z)+\ldots\}=M_r\{\varphi(z)\}+M_r\{\psi(z)\}+\ldots$$

ist, wie man ohne alle Schwierigkeit aus der Definition der Mittelgränze ersieht. Es ergiebt sich so

$$M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=-\frac{1}{a}M_r\{z\}-\frac{1}{a^2}M_r\{z^2\}-\frac{1}{a^3}M_r\{z^3\}-\ldots$$

d. i. nach Formel (2) für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$M_r \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} \;,\quad z < a.$$

Dagegen ist für $u = \frac{a}{z}$, wo nun $z > a$ sein muss,

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \ldots$$

mithin

$$M_r \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = M_r\{1\} + aM_r \left\{ \frac{1}{z} \right\} + a^2 M_r \left\{ \frac{1}{z^2} \right\} + \ldots$$

oder unter Anwendung der Formel (5)

$$M_r \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = 1 \;,\quad z > a.$$

Die Bedingungen $z < a$ und $z > a$ gehen aber für

$$z = r(\cos t + i \sin t) \;,\quad a = \varrho(\cos \tau + i \sin \tau)$$

wegen des beliebigen τ in $r < \varrho$ und $r > \varrho$ über wie oben. Diese Ableitung setzt indessen voraus, dass die Gleichung (9) auch für imaginäre u in Anspruch genommen werden dürfe; diess lässt sich in der That rechtfertigen, wie sich im folgenden Paragraphen zeigen wird, wo wir den Gebrauch jener Formel nicht umgehen können.

IV. Um auch ein allgemeineres Beispiel zu haben, sei

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^m}$$

dabei $\varphi(z)$ eine Funktion, von der wir voraussetzen, dass sie selbst nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $m$ten inclusive endlich und stetig bleibe, und dass für $z = 0$ die Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\ldots \varphi^{(m-1)}(z)$ sich sämmtlich annulliren. Fängt das Intervall, innerhalb deren die Funktion und ihre Differenzialquotienten stetig und endlich bleiben mit dem Werthe $z = 0$ oder $r = 0$ an, so ist

$$M_r \left\{ \frac{\varphi(z)}{z^m} \right\} = M_0 \left\{ \frac{\varphi(z)}{z^m} \right\} = \frac{\varphi(0)}{0^m}.$$

Da nun aber für $z = 0$ die Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\ldots \varphi^{(m-1)}(z)$ sämmtlich verschwinden, so ist für diesen Werth von z

$$\frac{\varphi(z)}{z^m} = \frac{\varphi'(z)}{mz^{m-1}} = \frac{\varphi''(z)}{m(m-1)z^{m-2}} \ldots = \frac{\varphi^{(m)}(z)}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

indem man sich sehr leicht überzeugt, dass der zweite Beweis, welcher in §. 28. für die Regel gegeben wurde, nach der man den wahren Werth des vieldeutigen Quotienten $\frac{0}{0}$ aufsucht, ganz gleichförmig auch auf den Fall passt, in welchem die Variabele aus einer imaginären Gegend her bis zur Stelle Null gekommen ist. Man hat daher für $z=0$

$$\frac{\varphi(z)}{z^m} = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2.3\ldots m},$$

folglich wenn die Funktionen

$$\varphi(z)\ ,\ \varphi'(z)\ ,\ \varphi''(z)\ ,\ \ldots\ \varphi^{(m)}(z)$$

sämmtlich stetig und endlich bleiben für alle Werthe des Modulus von $r=0$ bis $r=r_1$

$$M_r \left\{ \frac{\varphi(z)}{z^m} \right\} = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{1.2.3\ldots m}\ ,\ r_1 \geqq r \geqq 0. \tag{11}$$

Ist die ebenerwähnte Bedingung der Stetigkeit und Endlichkeit von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, ... etc. nicht erfüllt, so darf man auch die Richtigkeit des gefundenen Theoremes nicht behaupten, weil die Regel zur Aufsuchung des wahren Werthes unbestimmt scheinender Quotienten sich auf die Voraussetzung stützt, dass die Funktionen im Zähler und Nenner nebst ihren Differenzialquotienten bis inclus. den ersten nicht verschwindenden stetig und endlich seien. Da nun in unserem Falle z^m sammt seinen Differenzialquotienten schon stetig und endlich ist, so bedarf es blos noch der vorhin ausgesprochenen Bedingung.

Nimmt man

$$\varphi(z)=F(z)-F(0)-\frac{z}{1}F'(0)-\frac{z^2}{1.2}F''(0)-\ldots-\frac{z^{m-1}}{1.2..(m-1)}F^{(m-1)}(0),$$

so wird, wie vorhin verlangt wurde,

$$\varphi(0)=0\ ,\ \varphi'(0)=0\ ,\ \varphi''(0)=0\ ,\ \ldots\ \varphi^{(m-1)}(0)=0$$

dagegen

$$\varphi^{(m)}(0) = F^{(m)}(0). \tag{12}$$

Da nun ferner leicht erhellt, dass der Ausdruck

$$F(0) + \frac{z}{1}F'(0) + \frac{z^2}{1.2}F''(0) + \ldots + \frac{z^{m-1}}{1.2..(m-1)}F^{(m-1)}(0),$$

welcher eine ganze rationale und algebraische Funktion von z darstellt, immer endlich und stetig ist, sobald nur nicht eine der Grössen $F(0)$,

$F''(0)$ etc. unendlich gross wird, so ist zur Stetigkeit und Endlichkeit von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$ ... $\varphi^{(m)}(z)$ weiter nichts als Stetigkeit und Endlichkeit von $F(z), F'(z), F''(z), \ldots F^{(m)}(z)$ nöthig. Alsdann ist nach no. (11) und (12)

$$M_r \left\{ \frac{F(z) - F(0) - \frac{z}{1} F'(0) - \ldots - \frac{z^{m-1}}{1.2..(m-1)} F^{(m-1)}(z)}{z^m} \right\}$$

$$= \frac{F^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}.$$

Andererseits aber ist die linke Seite auch

$$= M_r \left\{ \frac{F(z)}{z^m} \right\} - F(0) M_r \left\{ \frac{1}{z^m} \right\} - \frac{F'(0)}{1} M_r \left\{ \frac{1}{z^{m-1}} \right\} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{F^{(m-1)}(0)}{1.2\ldots(m-1)} M_r \left\{ \frac{1}{z} \right\}$$

d. i. nach no. (5), wenn $z > 0$ oder $r > 0$:

$$= M_r \left\{ \frac{F(z)}{z^m} \right\}. \qquad (14)$$

Aus der Vergleichung der in no. (13) und (14) gefundenen Resultate ergiebt sich nun sogleich folgender Satz:

Bleiben die Funktionen

$$F(z)\ ,\ F'(z)\ ,\ F''(z)\ ,\ \ldots\ F^{(m)}(z)$$

endlich und stetig für alle Werthe des Modulus r, welche innerhalb des Intervalles $r=0$ bis $r=r_1$ liegen, so ist

$$M_r \left\{ \frac{F(z)}{z^m} \right\} = \frac{F^{(m)}(0)}{1.2\ldots m}\ ,\ r_1 > r > 0. \qquad (15)$$

von welchem wir gleich nachher Gebrauch machen werden.

§. 40.

Allgemeines Kennzeichen für die Anwendbarkeit des Satzes von Mac Laurin.

Die wichtigste Anwendung, welche sich von der Theorie der Mittelgränzen machen lässt, besteht darin, dass man zeigen kann, wie jede gewissen Bedingungen Genüge leistende Funktion als Mittelgränze eines sehr einfachen Ausdruckes angesehen werden darf. Setzen wir nämlich in der Gleichung

$$M_r\{f(z)\} = f(0),$$

welche so lange gilt, als sich $f(z)$ und $f'(z)$ stetig ändern und nicht unendlich werden,

$$f(z) = z\,\frac{F(z)-F(a)}{z-a},$$

so ergiebt sich $f(0) = 0$ und also

$$M_r\left\{z\,\frac{F(z)-F(a)}{z-a}\right\} = 0. \tag{1}$$

Man übersieht aber leicht, dass so lange $F(z)$, $F'(z)$ und $F''(z)$ stetig und endlich bleiben, diess auch mit $f(z)$ und $f'(z)$ der Fall sein muss. Denn wenn bei dieser Voraussetzung eine Unstetigkeit in den Werthen von $f(z)$ eintreten sollte, so könnte diess nur für $z = a$ der Fall sein; aber für $z = a + \delta$, wo δ eine unbegränzt abnehmende Grösse bezeichnen möge, haben wir

$$f(a+\delta) = (a+\delta)\,\frac{F(a+\delta)-F(a)}{-\delta}$$

mithin

$$f(a) = -aF'(a);$$

also wird auch hier $f(a)$ noch nicht unendlich oder unstetig, vorausgesetzt, dass a noch in demjenigen Intervalle liegt, innerhalb dessen $F(z)$ und $F'(z)$ stetig und endlich bleiben. Ebenso hat man

$$f'(z) = z\,\frac{(z-a)F'(z)-[F(z)-F(a)]}{(z-a)^2} + \frac{F(z)-F(a)}{z-a}$$

und hier könnte ein Unendlich- oder Unstetigwerden nur in

$$\frac{(z-a)F'(z)-[F(z)-F(a)]}{(z-a)^2}$$

für $z = a$ vorkommen; der wahre Werth dieses Ausdrucks ist dann aber $\frac{1}{2}F''(a)$ und folglich findet keine Unterbrechung der Stetigkeit oder Endlichkeit Statt, sobald $F''(z)$ stetig und endlich ist für ein Intervall, welches a umfasst. Die Gleichung (1) gilt also für alle r, welche innerhalb desjenigen Intervalles liegen, in welchem $F(z)$, $F'(z)$ und $F''(z)$ stetig und endlich bleiben. Andererseits folgt aber aus (1)

$$M_r\left\{\frac{zF(z)}{z-a}\right\} - M_r\left\{\frac{zF(a)}{z-a}\right\} = 0$$

d. i.

$$M_r\left\{\frac{zF(z)}{z-a}\right\} = F(a)\,M_r\left\{\frac{z}{z-a}\right\}.$$

Wenden wir hier die unter no. (7) und (8) des vorigen Paragraphen gefundenen Formeln an, indem wir ϱ den Modulus von a nennen, so erhalten wir

$$M_r \left\{ \frac{zF(z)}{z-a} \right\} = 0 \ , \ r < \varrho$$

und

$$M_r \left\{ \frac{zF(z)}{z-a} \right\} = F(a) \ , \ r > \varrho \tag{2}$$

und hier ist die letztere Gleichung von besonderem Interesse, indem sie uns zeigt, dass jede Funktion einer beliebigen Grösse a als Mittelgränze eines gewissen Ausdrucks angesehen werden kann; nennen wir noch 0 und r_1 die Gränzen, innerhalb deren $F(z)$, $F'(z)$ und $F''(z)$ endlich und stetig bleiben, so sind die Bedingungen für die Gültigkeit von no. (2) noch schärfer ausgesprochen:

$$r_1 > r > \varrho > 0.$$

Um nun weiter gehen zu können, müssen wir uns zunächst versichern, dass wenn der Modulus von a kleiner als der von z ist, die Gleichung

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \ldots, \tag{3}$$

welche ursprünglich nur für reelle a und z bekannt ist, ihre Gültigkeit behält. Substituiren wir für a und z ihre Werthe:

$$z = r(\cos t + i \sin t) \ , \ a = \varrho(\cos\tau + i\sin\tau),$$

so wird

$$\frac{a}{z} = \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\cos\tau + i\sin\tau}{\cos t + i\sin t},$$

d. i., wenn man Zähler und Nenner mit $\cos t - i \sin t$ multiplizirt,

$$\frac{a}{z} = \frac{\varrho}{r}\left[\cos(\tau - t) + i\sin(\tau - t)\right], \tag{4}$$

wo wir zur Abkürzung

$$\frac{\varrho}{r} = q \ , \ \tau - t = \Theta \tag{5}$$

setzen wollen. Ferner ist

$$\frac{z}{z-a} = \frac{r(\cos t + i\sin t)}{(r\cos t - \varrho\cos\tau) + i(r\sin t - \varrho\sin\tau)}$$

und wenn man Zähler wie Nenner mit

multiplizirt:

$$(r\cos t-\varrho\cos\tau)-i(r\sin t-\varrho\sin\tau)$$

$$\frac{z}{z-a}=\frac{r^2-r\varrho\cos(\tau-t)+ir\varrho\sin(\tau-t)}{(r\cos t-\varrho\cos\tau)^2+(r\sin t-\varrho\sin\tau)^2}.$$

Berücksichtigt man, dass der Nenner auch

$$=r^2-2r\varrho\cos(\tau-t)+\varrho^2$$

ist und dividirt Zähler und Nenner mit r^2, so kommt

$$\frac{z}{z-a}=\frac{1-\frac{\varrho}{r}\cos(\tau-t)+i\frac{\varrho}{r}\sin(\tau-t)}{1-2\frac{\varrho}{r}\cos(\tau-t)+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2},$$

d. i. nach der in no. (5) eingeführten Bezeichnung

$$\frac{z}{z-a}=\frac{1-q\cos\Theta+iq\sin\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}.$$

Substituiren wir diess in no. (3) und bemerken, dass nach (4) und (5)

$$\frac{a}{z}=q(\cos\Theta+i\sin\Theta),$$

folglich

$$\frac{a^m}{z^m}=q^m(\cos m\Theta+i\sin m\Theta)$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{1-q\cos\Theta+iq\sin\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}$$
$$=1+q(\cos\Theta+i\sin\Theta)+q^2(\cos 2\Theta+i\sin 2\Theta)$$
$$+q^3(\cos 3\Theta+i\sin 3\Theta)+\ldots.$$

oder durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1-q\cos\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}\\ =1+q\cos\Theta+q^2\cos 2\Theta+q^3\cos 3\Theta+\ldots\end{array}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{q\sin\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}\\ =q\sin\Theta+q^2\sin 2\Theta+q^3\sin 3\Theta+\ldots\end{array}\right\}\quad(7)$$

Wenn nun die Gleichung (3) für imaginäre a und z richtig bliebe unter der Voraussetzung, dass der Modulus ϱ von a kleiner als der Modulus r von z ist, so müssten die daraus abgeleiteten Gleichungen (6) und (7) für jedes beliebige Θ gelten, so lange $q=\frac{\varrho}{r}$ unter der Einheit

liegt. Dass dem in der That so sei, ergiebt sich auf folgende Weise.

Es bezeichne S_n die Summe der n Glieder enthaltenden Reihe

$$1+q\cos\Theta+q^2\cos 2\Theta+q^3\cos 3\Theta+\ldots+q^{n-1}\cos(n-1)\Theta. \quad (8)$$

Multipliziren wir dieselbe mit

$$1-2q\cos\Theta+q^2=(1+q^2)-2q\cos\Theta$$

und zerlegen jedes Produkt von der Form

$$2\cos m\Theta\cos\Theta$$

in die Cosinussumme

$$\cos(m-1)\Theta+\cos(m+1)\Theta,$$

so erhalten wir sehr leicht

$$\begin{aligned}
&(1-2q\cos\Theta+q^2)\,S_n\\
=\;& 1+q^2 && -2q\cos\Theta\\
&+(1+q^2)\,q\cos\Theta && -q^2(1+\cos 2\Theta)\\
&+(1+q^2)\,q^2\cos 2\Theta && -q^3(\cos\Theta+\cos 3\Theta)\\
&+(1+q^2)\,q^3\cos 3\Theta && -q^4(\cos 2\Theta+\cos 4\Theta)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(1+q^2)\,q^{n-1}\cos(n-1)\Theta && -q^n(\cos(n-2)\Theta+\cos n\Theta).
\end{aligned}$$

Nimmt man diese Grössen in vertikaler Richtung zusammen, so entstehen durch Auflösung der Paranthesen vier verschiedene Colonnen, deren Glieder sich, wie man sehr leicht übersieht, so weit heben, dass man übrig behält

$$(1-2q\cos\Theta+q^2)\,S_n$$
$$=1-q\cos\Theta+q^{n+1}\cos(n-1)\Theta-q^n\cos n\Theta,$$

woraus sich sehr leicht ergiebt:

$$S_n=\frac{1-q\cos\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}+\frac{q\cos(n-1)\Theta-\cos n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n. \quad (9)$$

Die Reihe in (6) geht aber aus der in (8) hervor, wenn man in der letzteren die Gliederanzahl n ins Unendliche wachsen lässt; wir müssen daher den Gränzwerth des Ausdruckes in (9) für unausgesetzt zunehmende n aufsuchen, wobei es blos auf den Gränzwerth von

$$\frac{q\cos(n-1)\Theta-\cos n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n \quad (10)$$

ankommt, da das erste auf der rechten Seite in (9) stehende Glied von n gar nicht abhängt. Bei wachsenden n oszilliren nun die Cosinus von $(n-1)\Theta$ und $n\Theta$ immer zwischen $+1$ und -1 hin und her und der

Zähler in no. (10) erhält offenbar seinen grössten Werth, wenn $\cos(n-1)\Theta = +1$, $\cos n\Theta = -1$ ist, woraus folgt, dass, wie gross auch n sein möge, der fragliche Quotient die Grösse

$$\frac{q+1}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n$$

nicht übersteigen kann. Da nun aber für $q<1$ die Potenz q^n kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden kann, so folgt

$$\text{Lim}\,\frac{q+1}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n=0$$

und um so mehr

$$\text{Lim}\,\frac{q\cos(n-1)\Theta-\cos n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n=0,$$

folglich durch Substitution dieses Werthes in no. (9):

$$\text{Lim}\,S_n=\frac{1-q\cos\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2},\ q<1$$

und diess ist in der That nichts Anderes als die Gleichung (6), weil jetzt Lim S_n die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe (8) bedeutet.

Durch ein völlig analoges Verfahren überzeugt man sich von der Richtigkeit der Gleichung (7). Man setzt nämlich

$$S_n=q\sin\Theta+q^2\sin 2\Theta+q^3\sin 3\Theta+\ldots+q^{n-1}\sin(n-1)\Theta,$$

multiplizirt beiderseits mit

$$1-2q\cos\Theta+q^2=(1+q^2)-2q\cos\Theta$$

und zerlegt rechts jedes Produkt von der Form

$$2\sin m\Theta\cos\Theta$$

in die Sinussumme

$$\sin(m-1)\Theta+\sin(m+1)\Theta.$$

Auf diese Weise findet man ohne Schwierigkeit

$$(1-2q\cos\Theta+q^2)S_n$$
$$=q\sin\Theta+q^{n+1}\sin(n-1)\Theta-q^n\sin n\Theta$$

oder

$$S_n=\frac{q\sin\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}+\frac{q\sin(n-1)\Theta-\sin n\Theta}{1-2q\cos\Theta+q^2}q^n$$

und mittelst Ueberganges zur Gränze für unausgesetzt wachsende n für $q<1$

$$\operatorname{Lim} S_n = \frac{q \sin \Theta}{1-2q\cos\Theta + q^2}, \; q<1,$$

was mit der Gleichung (7) zusammenfällt.

Addirt man nun die Gleichungen (6) und (7), deren Richtigkeit wir so erkannt haben, nachdem man die letztere mit $i=\sqrt{-1}$ multiplizirt hat, wendet rückwärts die Substitutionen in no. (5) an und setzt am Ende

$$r(\cos t + i \sin t) = z\,, \; \varrho(\cos\tau + i\sin\tau) = a,$$

so kommt man auf die Gleichung (3) zurück und hat damit ihre Gültigkeit für $\varrho<r$ bewiesen. Hiervon lässt sich nun eine wichtige Anwendung auf die Gleichung (2) machen; durch Substitution von (3) in (2) wird nämlich

$$F(a) = M_r\left\{F(z) + a\frac{F(z)}{z} + a^2\frac{F(z)}{z^2} + a^3\frac{F(z)}{z^3} + \dots\right\}$$

oder auch

$$F(a) = \left. M_r\{F(z)\} + aM_r\left\{\frac{F(z)}{z}\right\} + a^2M_r\left\{\frac{F(z)}{z^2}\right\} + \dots \right\} r>\varrho. \qquad (11)$$

Erinnert man sich nun, dass die Mittelgränze einer jeden Funktion eine constante Grösse ist, so erkennt man in der vorliegenden Gleichung eine Formel, welche zur Verwandlung einer Funktion $F(a)$ in eine nach steigenden Potenzen von a fortgehende Reihe dient. Es fragt sich nun blos noch, unter welchen Bedingungen die Coeffizienten dieser Potenzen, nämlich die Mittelgränzen

$$M_r\{F(z)\}\,,\; M_r\left\{\frac{F(z)}{z}\right\},\; M_r\left\{\frac{F(z)}{z^2}\right\},\; \dots$$

endliche Grössen werden, weil sich sonst das erhaltene Resultat unter die nichtssagende Form $F(a)=\infty\pm\infty\pm\infty$ etc. stellen würde. Hierauf antwortet uns die Gleichung (15) des vorigen Paragraphen, wonach

$$M_r\left\{\frac{F(z)}{z^m}\right\} = \frac{F^{(m)}(0)}{1.2.3\dots m}\,,\; r_1>r>0$$

ist, sobald $F(z), F'(z), F''(z), \dots F^{(m)}(z)$ endlich und stetig bleiben innerhalb eines gewissen Intervalles $r=0$ bis $r=r_1$. Bringen wir diesen Satz für $m=0, 1, 2, 3,$ in inf. in Anwendung, so ergiebt sich aus no. (11):

$$\left. \begin{array}{c} F(a) = F(0) + a\frac{F'(0)}{1} + a^2\frac{F''(0)}{1.2} + \ldots. \\ r_1 > r > \varrho > 0 \end{array} \right\} \quad (12)$$

wobei die Funktionen

$$F(z)\ ,\ F'(z)\ ,\ F''(z)\ ,\ F'''(z)\ , \ldots. \text{ in inf.}$$

endlich und stetig bleiben müssen von $r = 0$ bis $r = r_1$. Wenn man nun berücksichtigt, dass die gefundene Reihe mit der im Mac Laurinschen Satze vorkommenden identisch ist, so ergiebt sich folgendes wichtige Theorem:

> Wenn eine Funktion $F(z)$ so beschaffen ist, dass sich für $z = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$ ein Intervall $r=0$ bis $r = r_1$ angeben lässt, innerhalb dessen bei beliebigen t und $r_1 > r > 0$ die genannte Funktion nebst allen ihren Differenzialquotienten ins Unendliche hinab stetig und endlich bleibt, so lässt sich dieselbe für alle diejenigen Werthe $x = \varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$ in eine Reihe von der Form
>
> $$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$
>
> verwandeln, deren Modulus ϱ innerhalb jenes Intervalles 0 bis r_1 liegt und deren Argument τ beliebig ist; die erwähnte Reihe fällt mit der im Theoreme von Mac Laurin vorkommenden zusammen.

Das so eben ausgesprochene allgemeine Criterium für die Anwendbarkeit des Mac Laurinschen Theoremes gehört unter die Sätze, welche sich leichter vermuthen als beweisen lassen. Dass man in der That Grund genug hat, einen derartigen Satz als Fundamentaltheorem für die Theorie der nach steigenden Potenzen einer Variabelen fortgehenden Reihen zu vermuthen, möge folgendes wohl nicht überflüssige Raisonnement darthun. — Wer verlangt, dass $F(x)$ als Summe einer Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 +$ etc. erscheinen solle und demgemäss hypothetisch die Gleichung

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots. \quad (13)$$

aufstellt, der schreibt offenbar der Funktion dieselben Eigenschaften zu wie der Reihe, denn sonst wäre eine Gleichung zwischen beiden eine vollendete Absurdität. Welche sind denn nun aber die Eigenschaften der Reihe? Es ist nicht schwer, deren wenigstens einige zu

entdecken. Bezeichnen wir die Reihe kurz mit $\Phi(x)$ und setzen x als reell voraus, so erhellt zunächst sehr leicht, dass $\Phi(x)$ eine stetige Funktion von x sein muss und das Nämliche gilt auch von den Differenzialquotienten $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$ etc. Soll nun eine beliebige Funktion $F(x)$ der Reihe $\Phi(x)$ gleich sein, so kann dies offenbar nur so lange geschehen, als auch $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. immer stetig bleiben. Würde dagegen eine dieser Funktionen an irgend einer Stelle $x=\xi$ discontinuirlich, so kann für $x>\xi$ offenbar gar keine Gleichung zwischen $F(x)$ und $\Phi(x)$ mehr bestehen, wenn sie vorher, d. h. für $x<\xi$, bestanden hat. Das Verlangen nach einer solchen würde mit der geometrischen Forderung eine stetige und eine unstetige Curve durchweg zur Deckung zu bringen, auf ganz gleicher Linie stehen. Wären ferner die Constanten A, B, C etc. sämmtlich positiv, so würde $\Phi(x)$ desto grösser sein, je mehr x betrüge, also $\Phi(x)$ eine von $x=0$ bis $x=\infty$ beständig zunehmende Funktion bilden. Daraus folgt denn wieder, dass zwischen $F(x)$ und $\Phi(x)$ für alle x nur dann eine Gleichung bestehen kann, wenn $F(x)$ ebenfalls eine durchweg wachsende Funktion ist; nähme dagegen $F(x)$ zu von $x=0$ etwa bis $x=\xi'$, aber ab sobald $x>\xi'$ geworden ist, so könnten $F(x)$ und $\Phi(x)$ höchstens für die in dem Intervalle $x=0$ bis $x=\xi'$ enthaltenen x gleich sein, und wäre diess der Fall, so kann für $x>\xi$ ganz sicher keine Gleichung zwischen $F(x)$ und der Reihe mehr statt finden. Diess lässt sich noch bestimmter an einzelnen Beispielen nachweisen. Gesetzt z. B. wir hätten gefunden:

$$(1-x)^{\frac{2}{3}}=1-\frac{2}{3}x-\frac{2.1}{3.6}x^2-\frac{2.1.4}{3.6.9}x^3-\dots \qquad (14)$$

ohne zu wissen wie weit diese Gleichung gilt, so lässt sich sogleich die Gränze angeben, über welche hinaus die Gültigkeit derselben sich nicht erstrecken kann. Es folgt nämlich durch Differenziation

$$\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}x^2+\dots,$$

da nun hier für $x=1$ eine Unstetigkeit eintritt, in so fern die linke Seite die zwei Werthe $+\infty$ oder $-\infty$ hat, jenachdem $x=\text{Lim}(1-\delta)$ oder $=\text{Lim}(1+\delta)$ ist, so folgt, dass wenn die Gleichung von $x=0$ bis $x=1$ besteht (und das wissen wir nach dem Früheren), sie über 1 hinaus keinen Bestand mehr haben kann. Das Nämliche gilt dann auch von der Gleichung (14). Ebenso könnte man das zweite der ge-

gebenen Criterien anwenden, indem man die Gleichung (14) in folgender Form darstellt:

$$1-\sqrt[3]{(1-x)^2}=\frac{2}{3}x+\frac{2.1}{3.6}x^2+\frac{2.1.4}{3.6.9}x^2+\ldots \qquad (15)$$

Da nun die Reihe lauter positive Grössen enthält, so bildet sie für positive wachsende x eine zunehmende Funktion; diess ist aber mit der Funktion auf der linken Seite nicht der Fall; letztere nimmt zu von $x=0$ bis $x=1$, wo sie ihr Maximum 1 erreicht und sobald $x>1$ ist, findet eine continuirliche Abnahme in ihr statt. Die Gleichung (15) kann also bei positiven x höchstens von $x=0$ bis $x=1$ gelten.

Wenn nun aus diesen Betrachtungen ganz sicher hervorgeht, dass die Funktion $F(x)$ nur dann mittelst des Mac Laurinschen Theoremes verwandelt werden k a n n, wenn sie gewissen Bedingungen genügt, so fragt es sich immer noch, ob sie, wenn diess letztere der Fall ist, sich verwandeln lassen m u s s, oder mit anderen Worten: unser Raisonnement giebt zwar die Nothwendigkeit gewisser Bedingungen an, aber es handelt sich nicht um blos nothwendige Bedingungen, sondern um solche, die zugleich n o t h w e n d i g und h i n r e i c h e n d sind. Diese letzteren nun haben wir durch das vorhergehende Theorem kennen gelernt und zwar in der wünschenswerthen Ausdehnung auf nicht blos reelle Werthe der Variabelen.

§. 42.

Beispiele zum Theoreme des vorigen Paragraphen.

Der grosse Vortheil, welchen das im vorigen Paragraphen ausgesprochene Criterium für die Anwendung des Theoremes von Mac Laurin darbietet, besteht darin, dass man sich die oft sehr umständliche Betrachtung über den Gränzwerth der Grösse R_n in §. 37. völlig ersparen und zugleich die gewonnenen Resultate auf imaginäre Werthe der Veränderlichen x ausdehnen kann. Einige Beispiele mögen diess zeigen.

I. Sei zuerst $F(x)=(1+x)^{\mu}$, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich μ ganz und positiv ist oder nicht. Im ersten Falle sind auch $F'(x)$, $F''(x)$ etc. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten, von denen jeder nächstfolgende um eine Einheit kleiner als der vorhergehende ist; es kommt daher unter diesen Funktionen eine

vor, welche sich auf eine blose Constante reduzirt, während alle nachherigen der Null gleich sind. Da nun keine der Funktionen $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$ etc. eine Potenz mit negativem Exponenten darstellt, so kann für ein endliches bestimmtes x niemals ein Unstetig- oder Unendlichwerden irgend einer jener Funktionen eintreten und daher gilt die für $(1+x)^\mu$ gefundene Reihe ganz allgemein bei beliebigen x, wenn μ ganz und positiv ist. Anders dagegen wird die Sache für nicht ganze positive μ. Dann haben wir für $F^{(n)}(x)$ die Formel

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$$

und da man n so gross nehmen darf als man will, so kann man auch $n>\mu$ machen, wodurch

$$F^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)\frac{1}{(1+x)^{n-\mu}}$$

wird. Hier kann nun allerdings eine Unterbrechung der Continuität eintreten, sobald nämlich $x=-1$ oder, wenn $x=r(\cos t+i\sin t)$ genommen wird, $r=1$, $t=\pi$ ist. Es muss folglich der Modulus von x kleiner als der Modulus $r_1=1$ sein, für welchen die Unstetigkeit und hier auch gleichzeitig die Unendlichkeit von $F^{(n)}(x)$ zum Vorschein kommt. — Diess Alles zusammen giebt den Satz:

Die Gleichung

$$(1+x)^\mu=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots \tag{1}$$

gilt für alle x wenn μ positiv und ganz ist, ausserdem nur für solche x, deren Modulus unter der Einheit liegt.

Für reelle x kommen wir hiermit auf das Frühere zurück; bei imaginären x, etwa

$$x=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau),$$

darf demnach τ beliebig sein, wenn $\varrho<1$ ist. Diese letztere Substitution giebt zu einer eleganten Transformation Veranlassung. Setzen wir nämlich um kurz zu sein

$$\frac{\mu}{1}=\mu_1,\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}=\mu_2,\ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}=\mu_3 \text{ etc.},$$

so ist jetzt

$$\begin{aligned}&[1+\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)]^\mu\\ &=1+\mu_1\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)+\mu_2\varrho^2(\cos2\tau+i\sin2\tau)\\ &\quad+\mu_3\varrho^3(\cos3\tau+i\sin3\tau)+\ldots\end{aligned} \tag{2}$$

Setzen wir dagegen

$$1+\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)=R(\cos T+i\sin T),$$

so folgt

$$R\cos T=1+\varrho\cos\tau\,,\ R\sin T=\varrho\sin\tau\,,$$

und

$$(R\cos T)^2+(R\sin T)^2=1+2\varrho\cos\tau+\varrho^2,$$

$$R=(1+2\varrho\cos\tau+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3)$$

$$\frac{R\sin T}{R\cos T}=\tan T=\frac{\varrho\sin\tau}{1+\varrho\cos\tau}$$

mithin

$$T=\text{Arctan}\,\frac{\varrho\sin\tau}{1+\varrho\cos\tau}+k\pi, \qquad (4)$$

wo, wie immer, Arctan den kleinsten aller zu einer gegebenen Tangente gehörigen Bögen und k eine positive ganze Zahl bezeichnet. Für die so bestimmten Werthe von R und T ist nun

$$[1+\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)]^\mu=R^\mu(\cos T+i\sin T)^\mu$$
$$=R^\mu(\cos\mu T+i\sin\mu T), \qquad (5)$$

indem man sich leicht überzeugen kann, dass die Formel

$$(\cos\Theta+i\sin\Theta)^m=\cos m\Theta+i\sin m\Theta,$$

welche wir in der Einleitung für blos ganze positive m gelten sahen, auch für jedes andere reelle μ gilt *). Durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen in (2) und (5) ergiebt sich jetzt:

---

*) Sind nämlich p und q beliebige positive ganze Zahlen, so ist

$$(\cos\frac{p}{q}\,\Theta+i\sin\frac{p}{q}\,\Theta)^q=\cos p\Theta+i\sin p\Theta=(\cos\Theta+i\sin\Theta)^p$$

folglich durch beiderseitige Ausziehung der $q$ten Wurzel

$$\cos\frac{p}{q}\Theta+i\sin\frac{p}{q}=(\cos\Theta+i\sin\Theta)^{\frac{p}{q}},$$

was umgekehrt geschrieben den Beweis liefert, dass die oben erwähnte Formel auch dann gilt, wenn m ein beliebiger positiver Bruch $\frac{p}{q}$ ist. Wäre ferner m eine positive Irrationalzahl, so kann man sich dieselbe als Gränzwerth eines rationalen Bruches $\frac{p}{q}$ (etwa Dezimalbruches) denken, indem man sich p und q stetig ändern lässt. Für $\text{Lim}\,\frac{p}{q}=m$ beweist man hierdurch die Gül-

$$R^\mu \cos \mu T = 1 + \mu_1 \varrho \cos \tau + \mu_2 \varrho^2 \cos 2\tau + \ldots . \qquad (6)$$
$$R^\mu \sin \mu T = \mu_1 \varrho \sin \tau + \mu_2 \varrho^2 \sin 2\tau + \ldots .$$

Die ganze Zahl k, welche vorhin noch unbestimmt blieb, lässt sich jetzt leicht bestimmen; für $\varrho = 0$ wird nämlich $R = 1$, $T = k\pi$, folglich nach no. (6)

$$\cos \mu k \pi = 1.$$

Da aber μ eine ganz beliebige Grösse bedeutet, so kann diese Gleichung nur bestehen wenn $k = 0$ ist. Vermöge der Werthe von R und T ergiebt sich dann

$$(1 + 2\varrho \cos \tau + \varrho^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cos\left(\mu \operatorname{Arctan} \frac{\varrho \sin \tau}{1 + \varrho \cos \tau}\right)$$
$$= 1 + \mu_1 \varrho \cos \tau + \mu_2 \varrho^2 \cos 2\tau + \mu_3 \varrho^3 \cos 3\tau + \ldots . \qquad (7)$$

und

$$(1 + 2\varrho \cos \tau + \varrho^2)^{\frac{1}{2}\mu} \sin\left(\mu \operatorname{Arctan} \frac{\varrho \sin \tau}{1 + \varrho \cos \tau}\right)$$
$$= \mu_1 \varrho \sin \tau + \mu_2 \varrho^2 \sin 2\tau + \mu_3 \varrho^3 \sin 3\tau + \ldots . \qquad (8)$$

und diese Gleichungen gelten für ganz beliebige ϱ, sobald μ eine positive ganze Zahl darstellt, ausserdem nur für $\varrho < 1$.

II. Sei ferner $F(x) = l(1 + x)$, also

$$F^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 1 . 2 . . (n-1)}{(1 + x)^n},$$

so giebt es für x einen Modulus, bei welchem $F^{(n)}(x)$ unstetig und zu gleicher Zeit unendlich wird, wenn man nämlich $x = r(\cos t + i \sin t)$, $t = \pi$, $r = 1$ also $x = -1$ setzt. Die Reihe für den Logarithmus von $1 + x$ gilt demnach nur so lange, als der Modulus von x unter der Einheit liegt. Bei reellen x kommen wir hiermit auf das Frühere zu-

---

tigkeit des Satzes für irrationale positive m. Aus diesem Allen erhellt, dass derselbe für jedes **positive** m gilt. Man hat nun weiter

$$\frac{1}{(\cos \Theta + i \sin \Theta)^m} = \frac{1}{\cos m\Theta + i \sin m\Theta} = \cos m\Theta - i \sin m\Theta$$
$$= \cos(-m)\Theta + i \sin(-m)\Theta,$$

d. i.

$$(\cos \Theta + i \sin \Theta)^{(-m)} = \cos(-m)\Theta + i \sin(-m)\Theta,$$

woraus man ersieht, dass der Satz für jedes negative m gilt, wenn er für jedes positive m richtig ist; nach dem Vorigen folgt jetzt die allgemeine Gültigkeit desselben.

rück; bei imaginären x also $x=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)$ wird

$$l[1+\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)]$$
$$=\tfrac{1}{1}\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)-\tfrac{1}{2}\varrho^2(\cos 2\tau+i\sin 2\tau)+\tfrac{1}{3}\varrho^3(\cos 3\tau+i\sin 3\tau)-\ldots,$$

und wenn man links die Formel

$$l(\alpha+\beta i)=\tfrac{1}{2}\,l\,(\alpha^2+\beta^2)+i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

für $\alpha=1+\varrho\cos\tau$, $\beta=\varrho\sin\tau$ anwendet, so findet man durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}l(1+2\varrho\cos\tau+\varrho^2)\\ =\tfrac{1}{1}\varrho\cos\tau-\tfrac{1}{2}\varrho^2\cos 2\tau+\tfrac{1}{3}\varrho^3\cos 3\tau-\ldots\end{array}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{\varrho\sin\tau}{1+\varrho\cos\tau}\\ =\tfrac{1}{1}\varrho\sin\tau-\tfrac{1}{2}\varrho^2\sin 2\tau+\tfrac{1}{3}\varrho^3\sin 3\tau-\ldots,\end{array}\right\}\quad(10)$$

wobei immer $\varrho<1$ sein muss. Für $\tau=\frac{\pi}{2}$ giebt die letztere Formel noch das bewerkenswerthe Resultat:

$$\mathrm{Arctan}\,\varrho=\tfrac{1}{1}\varrho-\tfrac{1}{3}\varrho^3+\tfrac{1}{5}\varrho^5-\ldots,\qquad(11)$$

auf welches wir bald zurückkommen werden.

III. Für $F(x)=e^x$ wird $F^{(n)}(x)$ ebenfalls $=e^x$; ferner ist für imaginäre x etwa $x=u+vi$

$$e^x=e^u(\cos u+i\sin u)$$

und da nun e^u, $\cos u$ und $\sin u$ durchweg stetige Funktionen sind, so folgt, dass $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. für alle x stetig und endlich bleiben, dass mithin die Reihe für e^x ohne alle Einschränkung gilt. Nimmt man wieder $x=\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)$, so wird

$$e^{\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)}$$
$$=1+\frac{\varrho(\cos\tau+i\sin\tau)}{1}+\frac{\varrho^2(\cos 2\tau+i\sin 2\tau)}{1.2}$$
$$+\frac{\varrho^3(\cos 3\tau+i\sin 3\tau)}{1.2.3}+\ldots$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$e^{\varrho\cos\tau+i\varrho\sin\tau}=e^{\varrho\cos\tau}[\cos(\varrho\sin\tau)+i\sin(\varrho\sin\tau)]$$

ist, durch Vergleichung des Reellen und Imaginären beiderseits:

$$\left.\begin{array}{l} e^{\varrho\cos\tau}\cos(\varrho\sin\tau) \\ =1+\frac{\varrho\cos\tau}{1}+\frac{\varrho^2\cos 2\tau}{1.2}+\frac{\varrho^3\cos 3\tau}{1.2.3}+\ldots, \end{array}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\varrho\cos\tau}\sin(\varrho\sin\tau) \\ =\frac{\varrho\sin\tau}{1}+\frac{\varrho^2\sin 2\tau}{1.2}+\frac{\varrho^3\sin 3\tau}{1.2.3}+\ldots. \end{array}\right\} \quad (13)$$

gültig für jedes beliebige ϱ. Nimmt man noch $\tau=\frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich

$$\cos\varrho=1-\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}-\frac{\varrho^6}{1.2\ldots6}+\ldots.$$

$$\sin\varrho=\frac{\varrho}{1}-\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

wie wir ebenfalls schon auf anderem Wege gefunden haben.

Auf ganz gleiche Weise würde man sich überzeugen, dass die für $\cos x$ und $\sin x$ entwickelten Reihen für jeden beliebigen Werth von x den genannten Funktionen gleich gelten, wobei wir uns aber nicht aufhalten wollen, da diese Betrachtung zu keinen wesentlich neuen Resultaten führt. Wichtiger dagegen ist die Anwendung des Mac Laurinschen Satzes auf einige zusammengesetztere Funktionen, wobei wir noch die Reihen für $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\operatorname{Arcsin} x$ und $\operatorname{Arctan} x$ kennen lernen werden.

§. 43.

Anwendung des Mac Laurinschen Theoremes auf Funktionen von Exponenzialgrössen.

Da sich das Mac Laurinsche Theorem auf jede Funktion anwenden lässt, deren höhere Differenzialquotienten durch eine independente Formel dargestellt werden können, so liegt der Gedanke sehr nahe, auch die zusammengesetzteren Funktionen, deren Differenzialquotienten wir früher aufgesucht haben, in dieser Rücksicht zu betrachten und wir wenden uns daher zunächst an die aus Exponenzialgrössen zusammengesetzten Funktionen.

I. Sei zunächst

$$F(x)=\frac{1}{e^x+1},$$

so haben wir nach §. 21. Formel (4).

$$-F^{(n)}(x)=\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)-\overset{n}{J}_2\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2+\overset{n}{J}_3\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^3-\dots$$
$$+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^{n+1},$$

wobei für irgend ein ganzes positives p die Coeffizienten mittelst der Formel

$$\overset{n}{J}_p=p^n-(p-1)_1(p-1)^n+(p-1)_2(p-2)^n-(p-1)_3(p-3)^n+\dots \quad (1)$$

bestimmt werden. Hieraus folgt nun

$$-F^{(n)}(0)=\frac{1}{2}\overset{n}{J}_1-\frac{1}{2^2}\overset{n}{J}_2+\frac{1}{2^3}\overset{n}{J}_3-\dots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\overset{n}{J}_{n+1}$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\overset{n}{J}_1-\frac{1}{2^2}\overset{n}{J}_2+\frac{1}{2^3}\overset{n}{J}_3-\dots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\overset{n}{J}_{n+1}=A_n \quad (2)$$

setzen, wo nun A_n eine völlig bekannte Grösse ist,

$$F^{(n)}(0)=-A_n.$$

Nach der Mac Laurinschen Formel ergiebt sich nun sogleich

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{A_1x}{1}-\frac{A_2x^2}{1.2}-\frac{A_3x^3}{1.2.3}-\dots. \quad (3)$$

Ohne aber die Werthe von A_1, A_2 etc. zu berechnen, kann man schon im Voraus leicht absehen, dass A_2, A_4, A_6 etc. sämmtlich der Null gleich sind. Aus der obigen Formel kann man nämlich noch die folgende ableiten:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}+\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\dots.$$

und ebenso für negative x

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}-\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\dots.$$

Nun ist aber

$$\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1},$$

folglich muss auch

$$-\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}-\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\dots.$$
$$=-\left\{\frac{A_1x}{1}+\frac{A_2x^2}{1.2}+\frac{A_3x^3}{1.2.3}+\dots.\right\}$$

sein und diese Gleichung reduzirt sich auf die folgenden:

$$-A_1=-A_1\,,\ +A_2=-A_2\,,\ -A_3=-A_3\,,\ +A_4=-A_4\,,\ \text{etc.}$$

oder

$$A_2=0\,,\ A_4=0\,,\ A_6=0\,,\ldots$$

Berechnet man die Werthe der übrig bleibenden Grössen A_1, A_3, A_5, ..., so findet man einen Zeichenwechsel in ihnen, nämlich $A_1=\frac{1}{4}$, $A_3=-\frac{1}{8}$ etc und daher ist es vortheilhafter auf folgende Weise zu bezeichnen:

$$C_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{1}{2}\overset{n}{J}_1-\frac{1}{2^2}\overset{n}{J}_2+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\overset{n}{J}_{n+1}\right\} \tag{4}$$

so dass

$$A_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n$$

wird, wobei n immer ungerade ist. Bei dieser Bezeichnungsweise und unter Weglassung der Grössen A_2, A_4, A_6 etc. stellt sich die Gleichung (3) in folgende Form:

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{C_1x}{1}+\frac{C_3x^3}{1.2.3}-\frac{C_5x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots \tag{5}$$

Es ist nicht schwer, die Gränzen für die Gültigkeit dieser Gleichung anzugeben. Die Funktion auf der linken Seite bleibt nämlich so lange endlich und stetig als der Nenner nicht Null wird, was für $x=\pi\sqrt{-1}$ eintritt. Es muss folglich der jedesmalige Modulus von x kleiner als π sein.

Zur Berechnung der mit C bezeichneten Grössen kann man übrigens noch eine andere Formel aufstellen, wenn man sich erinnert, dass zufolge des §. 21. auch folgende Gleichung gilt:

$$D^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$$
$$=-\frac{\overset{n}{L}_1e^x-\overset{n}{L}_2e^{2x}+\overset{n}{L}_3e^{3x}-\ldots+(-1)^{n-1}\overset{n}{L}_ne^{nx}}{(e^x+1)^{n+1}},$$

worin für ein ganzes positives p

$$\overset{n}{L}_p=p^n-(n+1)_1(p-1)^n+(n+1)_2(p-2)^n-\ldots \tag{6}$$

ist. Es folgt dann, weil $F^{(n)}(0)=-A_n$ war, für $x=0$

$$A_n=\frac{1}{2^{n+1}}\{\overset{n}{L}_1-\overset{n}{L}_2+\overset{n}{L}_3-\ldots+(-1)^{n-1}\overset{n}{L}_n\}$$

und nach der Relation zwischen A_n und C_n für ein ungerades n

$$C_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n+1}} \{ \overset{n}{L}_1 - \overset{n}{L}_2 + \overset{n}{L}_3 - \dots + (-1)^{n-1} \overset{n}{L}_n \} \quad (7)$$

und man wird nun zur Berechnung von C_n diejenige der Formeln (4) und (7) benutzen, bei welcher der Calcül am bequemsten ist.

II. Wollte man das Mac Laurinsche Theorem auf die analoge Funktion

$$\frac{1}{e^x - 1}$$

anwenden, so würde man schon das erste Glied unter der Form $\frac{1}{0}$ erhalten, und in der That ist hier jener Satz gar nicht anwendbar, weil die vorstehende Funktion für $x=0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und unendlich wird. Dagegen kann man

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

setzen, da diese Funktion für $x=0$ den endlichen Werth 1 annimmt und ebenso wie ihre Differenzialquotienten stetig und endlich bleibt von $x=0$ bis $x=2\pi\sqrt{-1}$, wo eine zweite Unstetigkeit eintritt. Wollte man hier die höheren Differenzialquotienten wirklich entwickeln und dann in ihnen $x=0$ nehmen, so würden sie sich sämmtlich unter der vieldeutigen Form $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} + \frac{1}{0}$ etc. präsentiren; diess lässt sich indessen durch einen sehr einfachen Kunstgriff vermeiden. Man hat nämlich

$$\frac{x}{e^x - 1} - \frac{x}{e^x + 1} = \frac{2x}{e^{2x} - 1},$$

folglich

$$\frac{d}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) - \frac{d}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x + 1}\right) = \frac{d}{dx^n}\left(\frac{2x}{e^{2x} - 1}\right).$$

Setzt man in dem Gliede auf der rechten Seite $2x = y$, so ist auch für

$$\frac{x}{e^x + 1} = \Phi(x),$$

$$F^{(n)}(x) - \Phi^{(n)}(x) = \frac{d}{dy^n}\left(\frac{y}{e^y - 1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n$$
$$= F^{(n)}(y) \, . \, 2^n$$

oder

$$F^{(n)}(x) - \Phi^n(x) = 2^n F^{(n)}(2x).$$

Für $x=0$ ergiebt sich hieraus

$$F^{(n)}(0) - \Phi^{(n)}(0) = 2^n F^{(n)}(0),$$

folglich, wenn man $F^{(n)}(0)$ als Unbekannte ansieht,

$$F^{(n)}(0) = -\frac{\Phi^{(n)}(0)}{2^n-1}. \qquad (9)$$

Es käme also blos darauf an $\Phi^{(n)}(0)$ zu finden, was aber sehr leicht ist, wenn man die Gleichung (5) mit x multiplicirt. Man erhält nämlich zunächst

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}x - \frac{C_1 x^2}{1} + \frac{C_3 x^4}{1.2.3} - \frac{C_5 x^6}{1.2.3.4.5} + \dots$$

unn da andererseits nach dem Mac Laurinschen Satze

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1}x + \frac{\Phi''(0)}{1.2}x^2 + \dots$$

sein muss, so erhält man durch Vergleichung beider Resultate leicht

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2}, \quad \Phi^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} n C_{n-1}$$

für gerade n,

und $= 0$

für ungerade n.

Mithin ist nach no. (9)

$$F'(0) = -\frac{1}{2}, \quad F^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} n C_{n-1}}{2^n - 1}$$

für gerade n,

und $= 0$

für ungerade n.

Es ist demnach, wenn wir für $F(x)$, $F(0)$, $F'(0)$ etc. ihre Werthe substituiren:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{2C_1}{2^2-1}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \frac{4C_3}{2^4-1}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{6C_5}{2^6-1}\cdot\frac{x^6}{1.2\dots6} - \dots \qquad (10)$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\frac{(2n)C_{2n-1}}{2^{2n}-1} = B_{2n-1},$$

woraus umgekehrt

$$C_{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n}B_{2n-1}$$

folgt, so können wir die unter (5) und (10) gewonnenen Resultate in folgender Form darstellen:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}x+\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3-\ldots\\ \text{mod. } x<\pi.\end{array}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{B_1}{1.2}x-\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3+\ldots\\ \text{mod. } x<2\pi.\end{array}\right\} \quad (12)$$

und in diesen Formeln ist

$$B_{2n-1}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)}{2^{2n}-1}\left\{\frac{1}{2}\overset{2n-1}{J_1}-\frac{1}{2^2}\overset{2n-1}{J_2}+\ldots-\frac{1}{2^{2n}}\overset{2n-1}{J_{2n}}\right\} \quad (13)$$

oder auch

$$B_{2n-1}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\overset{2n}{L_1}-\overset{2n}{L_2}+\overset{2n}{L_3}-\ldots-\overset{2n}{L_{2n}}\right\} \quad (14)$$

wobei die Grössen J und L nach den Formeln (1) und (6) berechnet werden.

Durch Addition der Gleichungen (11) und (12), unter der Bemerkung, dass

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{e^x+1}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

ist, ergiebt sich noch

$$\left.\begin{array}{c}\frac{2}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{x}-\frac{(2^2-2)B_1}{1.2}x+\frac{(2^4-2)B_3}{1.2.3.4}x^3-\ldots\\ \text{mod. } x<\pi.\end{array}\right\} \quad (15)$$

III. Ein etwas complizirteres Beispiel ist das folgende. Es sei

$$F(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}+1},$$

so hat man nach der allgemeinen Formel no. (7) in §. 20., wenn man

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+1}$$

setzt,

$$F^{(n)}(x) = \frac{1}{1}\overset{n}{K}_1 e^x f'(e^x) + \frac{1}{1.2}\overset{n}{K}_2 e^{2x} f''(e^x) + \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{K}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{1.2\dots n}\overset{n}{K}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x).$$

Es ist aber nach Formel (12) in §. 14.

$$f^{(p)}(z) = (-1)^p 1.2\dots p \frac{2\cos[(p+1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{z}]}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}(p+1)}},$$

mithin

$$f^{(p)}(e^x) = (-1)^p 1.2\dots p \frac{2\cos[(p+1)\operatorname{Arctan} e^{-x}]}{(e^{2x}+1)^{\frac{1}{2}(p+1)}}$$

und wenn dies für $p = 1, 2, 3, \dots n$ in die Formel für $F^{(n)}(x)$ substituirt wird, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} F^{(n)}(x) = &- \overset{n}{K}_1 e^x \frac{2\cos(2\operatorname{Arctan} e^{-x})}{(e^{2x}+1)^{\frac{2}{2}}} \\ &+ \overset{n}{K}_2 e^{2x} \frac{2\cos(3\operatorname{Arctan} e^{-x})}{(e^{2x}+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \dots\dots\dots \\ &+ (-1)^n \overset{n}{K}_n e^{nx} \frac{2\cos[(n+1)\operatorname{Arctan} e^{-x}]}{(e^{2x}+1)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

folglich für $x = 0$ wegen $\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$F^{(n)}(0) = -\overset{n}{K}_1 \frac{2\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2} + \overset{n}{K}_2 \frac{2\cos\frac{3\pi}{4}}{(\sqrt{2})^3} - \dots + (-1)^n \overset{n}{K}_n \frac{2\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}},$$

wobei wir zur Abkürzung

$$-\overset{n}{K}_1 \cos\frac{2\pi}{4} + \overset{n}{K}_2 \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}} - \overset{n}{K}_3 \frac{\cos\frac{4\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2} + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \overset{n}{K}_n \frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n-1}} = A_n \qquad (16)$$

setzen wollen. Es ist dann $F^{(n)}(0) = A_n$ und mithin

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_2}{1.2}x^2 + \frac{A_3}{1.2.3}x^3 + \dots$$

Für negative x hätte man ebenso

$$\frac{2}{e^{-x}+e^{x}}=1-\frac{A_1}{1}x+\frac{A_2}{1.2}x^2-\frac{A_3}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Hier sind nun die linken Seiten beider Gleichungen einander gleich und folglich müssen es auch die rechten Seiten sein. Aus dieser Bemerkung erhält man $A_1 = A_3 = A_5$ etc, $= 0$ und also bleibt übrig

$$\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}=1+\frac{A_2}{1.2}x^2+\frac{A_4}{1.2.3.4}x^4+\ldots$$

Berechnet man die Werthe von A_2, A_4 etc. nach Formel (16), so findet man einen Zeichenwechsel in denselben und daher ist es passend, folgendermassen zu bezeichnen:

$$B_{2n}=(-1)^n\left\{\overset{2n}{K}_2\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{2n}{K}_3\frac{\cos\frac{4\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\overset{2n}{K}_4\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{(\sqrt{2})^3}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\overset{2n}{K}_{2n}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{2n-1}}\right\} \qquad (17)$$

damit die Grössen B_{2n} positiv bleiben und

$$A_{2n}=(-1)^n B_{2n}$$

ist. Für die nach der obigen Formel bestimmten Werthe von B ist nun

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}&=1-\frac{B_2}{1.2}x^2+\frac{B_4}{1.2.3.4}x^4-\ldots\\ &\mathrm{mod}\,x<\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Die hinzugefügte Bedingung $\mathrm{mod}\,x<\frac{\pi}{2}$ ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Funktion

$$\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{2e^{x}}{e^{2x}+1}$$

und deren Differenzialquotienten nicht eher unstetig oder unendlich werden, als bis $x=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ geworden ist.

§ 44.

Die Reihen für die Tangente, Cotangente, Cosekante und Sekante.

Nachdem wir früher gezeigt haben, auf welche Weise sich $\cos x$ und $\sin x$ mittelst des Mac Laurin'schen Theoremes in Reihen verwan-

deln lassen, liegt es uns noch ob, die Reihen für $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$ und $\sec x$ zu entwickeln, womit dann die Aufgabe, eine direkte näherungsweise Berechnung der goniometrischen Funktionen anzugeben, vollständig gelöst wäre. Zur Erfüllung der gestellten Forderung bedarf es aber gar keines neuen Calcüls, indem die gesuchten Reihen sich aus den im vorigen Paragraphen entwickelten durch ein paar einfache Transformationen sehr leicht ableiten lassen, wie aus dem Folgenden erhellen wird.

I. Subtrahiren wir beide Theile der Gleichung (11) von $\frac{1}{2}$ mit der Bemerkung, dass

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}x-\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}x^3+\dots$$

$$\operatorname{mod} x < \pi.$$

Nehmen wir hier $x = z\sqrt{-1}$, wo nun z der Modulus von x ist, und dividiren beiderseits mit $\sqrt{-1} = i$, so wird

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i}\frac{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}{e^{\frac{z}{2}i}+e^{-\frac{z}{2}i}}=\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}z+\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}z^3+\dots\\ z<\pi.\end{array}\right\}\quad(1)$$

Die linke Seite ist hier nichts Anderes, als $\frac{1}{2}\tan\frac{z}{2}$; aus den Gleichungen

$$\cos\frac{z}{2}+i\sin\frac{z}{2}=e^{\frac{z}{2}i}$$

$$\cos\frac{z}{2}-i\sin\frac{z}{2}=e^{-\frac{z}{2}i}$$

folgt nämlich durch Subtraktion und Addition

$$\sin\frac{z}{2}=\frac{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}{2i}\qquad(2)$$

$$\cos\frac{z}{2}=\frac{e^{\frac{z}{2}i}+e^{-\frac{z}{2}i}}{2}\qquad(3)$$

und durch Division mit der zweiten in die erste

$$\tan\frac{z}{2}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}},$$

und folglich haben wir noch no. (1)

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tan\frac{z}{2}=\frac{(2^2-1)\,B_1}{1.2}z+\frac{(2^4-1)\,B_3}{1.2.3.4}z^3+\ldots.\\ z<\pi.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Setzen wir endlich noch $z=2x$ und multipliziren beiderseits mit 2, so ergiebt sich für $2x<\pi$

$$\left.\begin{aligned}\tan x=\frac{2^2(2^2-1)\,B_1}{1.2}x+\frac{2^4(2^4-1)\,B_3}{1.2.3.4}x^3\\ +\frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2.3.4.5.6}x^5+\ldots.\\ x<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

II. Durch beiderseitige Addition von $\frac{1}{2}$ zur Gleichung (12) des vorigen Paragraphen erhält man leicht

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{x}+\frac{B_1}{1.2}x-\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3+\ldots$$

$$\operatorname{mod} x<2\pi$$

und für $x=z\sqrt{-1}$ nach Multiplikation mit $\sqrt{-1}=i$

$$\frac{i}{2}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}i}+e^{-\frac{z}{2}i}}{e^{\frac{z}{2}i}-e^{-\frac{z}{2}i}}=\frac{1}{z}-\frac{B_1}{1.2}z-\frac{B_3}{1.2.3.4}z^3-\ldots$$

$$z<2\pi$$

d. i., wenn man dasjenige berücksichtigt, was sich durch Division von no. (2) in no. (3) ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2}=\frac{1}{z}-\frac{B_1}{1.2}z-\frac{B_3}{1.2.3.4}z^3-\ldots\\ z<2\pi\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Für $z=2x$ findet man hieraus nach Multiplikation mit 2,

$$\left.\begin{array}{l}\cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2^2 B_1}{1.2}x - \dfrac{2^4 B_3}{1.2.3.4}x^3 \\ \qquad - \dfrac{2^6 B_5}{1.2.3.4.5.6}x^5 - \dots \\ \qquad x < \pi.\end{array}\right\} \quad (7)$$

III. Ersetzt man in der Gleichung (15) des vorigen Paragraphen x durch $x\sqrt{-1}$, multiplizirt nachher mit $\sqrt{-1} = i$ und bemerkt, dass

$$\frac{2i}{e^{xi} - e^{-xi}} = \frac{1}{\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}} = \frac{1}{\sin x}$$

ist, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{(2^2-2)B_1}{1.2}x - \dfrac{(2^4-2)B_3}{1.2.3.4}x^3 \\ \qquad + \dfrac{(2^6-2)B_5}{1.2.3.4.5.6}x^5 \\ \qquad x < \pi.\end{array}\right\} \quad (8)$$

Das Nämliche würde man auch durch Addition der Gleichungen (4) und (6) erhalten, wenn man die Relation

$$\frac{1}{2}\tan\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{z}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}} + \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right\} = \frac{1}{2\cos\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2}} = \frac{1}{\sin z}$$

dabei berücksichtigt und nachher x für z schreibt.

IV. Substituiren wir endlich in der Formel (18) des vorigen Paragraphen $x\sqrt{-1}$ für x und berücksichtigen, dass

$$\frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

ist, so gelangen wir zur letzten Formel dieser Art, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\sec x = 1 + \dfrac{B_2}{1.2}x^2 + \dfrac{B_4}{1.2.3.4}x^4 + \dfrac{B_6}{1.2..6}x^6 + \dots \\ \qquad x < \dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right\} \quad (9)$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass man auch die Logarithmen

der Cosinus und Sinus, oder was, abgesehen vom Vorzeichen, das Nämliche ist, die Logarithmen der Sekanten und Cosekanten mittelst der so eben entwickelten Formeln in Reihen verwandeln kann. Es geschieht diess auf folgende Weise.

V. Für

$$F(x) = l \sec x = -l \cos x$$

wird

$$\frac{dF(x)}{dx} = \tan x,$$

und wenn wir diese Gleichung $(n-1)$ mal differenziren:

$$\frac{d^n F(x)}{dx^n} = \frac{d^{n-1} \tan x}{dx^{n-1}}$$

oder für $\tan x = \Phi(x)$

$$F^{(n)}(x) = \Phi^{(n-1)}(x)$$

und folglich auch

$$F^{(n)}(0) = \Phi^{(n-1)}(0).$$

Aus der Gleichung (5) erhält man aber sehr leicht

$$\Phi^{(n-1)}(0) = \frac{2^n(2^n-1)B_{n-1}}{n}$$

wenn n gerade ist

$$= 0$$

für ungerade n.

Nach dem Vorigen folgt nun

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3..n} = \frac{2^n(2^n-1)B_{n-1}}{1.2.3..n} \cdot \frac{1}{n}$$

für gerade n

$$= 0$$

für ungerade n.

Wendet man jetzt auf die Funktion $F(x) = l \sec x$ den Mac Laurin'schen Satz mit der Bemerkung an, dass $F(0) = 0$ ist, so ergiebt sich auf der Stelle

$$l \sec x = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{x^6}{6} + \cdots \qquad (10)$$

und diese Gleichung gilt für alle $x < \frac{\pi}{2}$, weil die Funktion $F(x)$ so

wie ihre Differentialquotienten erst an der Stelle $x=\frac{\pi}{2}$ unstetig und unendlich werden.

VI. Nimmt man

$$F(x)=l(x\operatorname{cosec}x)=lx-l\sin x\,,$$

so wird

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{x}-\cot x,$$

folglich für $\frac{1}{x}-\cot x=\Psi(x)$,

$$F^{(n)}(x)=\Psi^{(n-1)}(x)$$

und

$$F^{(n)}(0)=\Psi^{(n-1)}(0).$$

Stellt man aber die Gleichung (7) in folgender Form dar:

$$\frac{1}{x}-\cot x=\frac{2^2B_1}{1.2}x+\frac{2^4B_3}{1.2.3.4}x^3+\dots$$

so findet man ohne Schwierigkeit

$$\Psi^{(n-1)}(0)=\frac{2^nB_{n-1}}{n}$$

für gerade n

$$=0$$

für ungerade n, mithin nach dem Früheren

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3..n}=\frac{2^nB_{n-1}}{1.2.3..n}\cdot\frac{1}{n}$$

für gerade n

$$=0$$

für ungerade n.

Mit Hülfe des Mac Laurin'schen Theoremes ergiebt sich nun für $F(x)=l(x\operatorname{cosec}x)$ und unter der Rücksicht, dass

$$F(0)=l\left(\frac{x}{\sin x}\right)=l(1)=0$$

ist,

$$l(x\operatorname{cosec}x)=\frac{2^2B_1}{1.2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{2^4B_3}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{4}+\dots \qquad (11)$$

und diese Gleichung gilt für alle $x<\pi$, weil $F(x)$ erst für $x=\pi$ unstetig und unendlich wird. Eine etwas bequemere Form der Gleichung ist noch die folgende

$$l\,\mathrm{cosec}\,x = lx - \frac{2^2 B_1}{1.2}x^2 - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{2^6 B_5}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{x^6}{6} - \ldots \quad x < \pi. \qquad (12)$$

Differenzirt man die Gleichungen (10) und (12), so kommt man natürlich wieder auf die früheren in (5) und (7) zurück.

§. 45.

Die Bernoullischen Zahlen und die Sekantenkoeffizienten.

Wir haben in den Betrachtungen der beiden vorigen Paragraphen folgende zwei Reihen von Grössen kennen gelernt:

$$B_1\;,\;B_3\;,\;B_5\;,\;B_7,\;\ldots$$

und

$$B_2\;,\;B_4\;,\;B_6\;,\;B_8,\;\ldots$$

welche in der gesammten höheren Analysis eine wichtige Rolle spielen, wo sie bei mehreren Untersuchungen vorkommen, und denen man desshalb besondere Namen gegeben hat; es heissen nämlich B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoullischen Zahlen und B_2, B_4, B_6 etc. die Sekantenkoeffizienten. Wir wollen nun hier zeigen, auf welche verschiedene Weisen dieselben berechnet werden können, wenn man nicht von den bereits entwickelten Formeln (13), (14) und (17) in §. 43. Gebrauch machen will.

I. Multiplizirt man die Gleichung (6) des vorigen Paragraphen mit $\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$, so wird die linke Seite derselben

$$= \cos^2\frac{z}{2} = \frac{1+\cos z}{2}$$

und die rechte

$$= \sin z\left\{\frac{1}{z} - \frac{B_1}{1.2}z - \frac{B_3}{1.2.3.4}z^3 - \ldots\right\}.$$

Setzt man nun für $\cos z$ und $\sin z$ die gleichgeltenden Reihen und führt die auf der rechten Seite angedeutete Multiplikation wirklich aus, so erhält man zwei nach geraden Potenzen von z fortschreitende Reihen, in denen man die Coeffizienten gleicher Potenzen von z mit einander vergleichen kann. Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung

$$1.2.3\ldots m = m'$$

ein, so giebt die Ausführung der Multiplikation folgende Gleichung:

$$1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2'}+\frac{1}{2}\frac{z^4}{4'}-\frac{1}{2}\frac{z^6}{6'}+\ldots.$$
$$=1-\left\{\frac{1}{3'}+\frac{B_1}{1'.2'}\right\}z^2$$
$$+\left\{\frac{1}{5'}+\frac{B_1}{3'.2'}-\frac{B_3}{1'.4'}\right\}z^4$$
$$-\left\{\frac{1}{7'}+\frac{B_1}{5'.2'}-\frac{B_3}{3'.4'}+\frac{B_5}{1'.6'}\right\}z^6$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und die Vergleichung der Coeffizienten von z^n, wo n eine gerade Zahl >0 ist:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n'}=\frac{1}{(n+1)'}+\frac{B_1}{(n-1)'.2'}-\frac{B_3}{(n-3)'.4'}+\frac{B_5}{(n-5)'.6'}-\ldots.$$

Durch Multiplikation mit $(n+1)'$ ergiebt sich hieraus

$$\frac{n+1}{2}=1+\frac{(n+1)n}{1.2}B_1-\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}B_3$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.6}B_5-\ldots$$

d. i nach der bekannten Bezeichnung der Binomialkoeffizienten

$$\frac{n-1}{2}=(n+1)_2B_1-(n+1)_4B_3+(n+1)_6B_5-\ldots.$$

und wenn man $n=m-1$ setzt, wo nun m ungerade ist:

$$\frac{m-2}{2}=m_2B_1-m_4B_3+m_6B_5-\ldots \qquad (1)$$

Aus dieser sehr einfachen Formel erhält man leicht die Bernoullischen Zahlen, wenn man der Reihe nach $m=3, 5, 7$ etc. nimmt nach folgendem Schema:

$m=3$ giebt $\frac{1}{2}=3.B_1$ folgl. $B_1=\frac{1}{6}$

$m=5$ giebt $\frac{3}{2}=10.B_1-5B_3=10.\frac{1}{6}-5B_3$ folglich $B_3=\frac{1}{30}$

u. s. f.

Hieraus ersieht man, dass die Gleichung (1) irgend eine Bernoullische

Zahl aus allen ihren Vorgängern berechnen lehrt, dass sie mithin eine sogenannte **Rekursionsformel** ist.

Mittelst eines ganz ähnlichen Verfahrens liesse sich noch eine ganze Reihe solcher Formeln entwickeln; so hätte man z. B. aus (7)

$$\cos x = \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1.2} x - \frac{2^4 B_3}{1.2\,3.4} x^3 - \ldots \right)$$

und aus no. (5)

$$\sin x = \cos x \left\{ \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2} x + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4} x^3 + \ldots \right\}$$

und könnte nun für $\cos x$, $\sin x$ die gleichgeltenden Reihen setzen, die angedeuteten Multiplikationen ausführen und dann eine Coeffizientenvergleichung vornehmen; man würde aber zu weniger einfachen Formeln gelangen, weil die verschiedenen Potenzen von 2 sich in diesen Calcül einmengen.

Behandelt man ebenso die Gleichung (9), indem man

$$1 = \cos x \left(1 + \frac{B_2}{2'} x^2 + \frac{B_4}{4'} x^4 + \frac{B_6}{6'} x^6 + \ldots \right)$$

und für $\cos x$ die gleichgeltende Reihe setzt, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 1 = 1 &- \left(\frac{1}{2'} - \frac{B^2}{2'} \right) x^2 \\ &+ \left(\frac{1}{4'} - \frac{B_2}{2'.2'} + \frac{B_4}{4'} \right) x^4 \\ &- \left(\frac{1}{6'} - \frac{B_2}{4'.2'} + \frac{B_4}{2'.4'} - \frac{B_6}{6'} \right) x^6 \\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

und folglich ist der Coeffizient von x^m, wo m nur gerade sein darf, $=0$, d. i.

$$0 = \frac{1}{m'} - \frac{B_2}{(m-2)'.2'} + \frac{B_4}{(m-4)'.4'} - \frac{B_6}{(m-6)'.6'} + \ldots$$

Durch Multiplikation mit m' wird hieraus

$$1 = \frac{m(m-1)}{1.2} B_2 - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} B_4 + \ldots$$

oder nach der Bezeichnung der Binomialkoeffizienten

$$1 = m_2 B_2 - m_4 B_4 + m_6 B_6 - \ldots \qquad (2)$$

was ein der Formel (1) sehr analoges Resultat ist. Für $m = 2, 4, 6$

etc. findet man leicht $B_2=1$, $B_4=5$, $B_1=61$ u. s. w. Die Sekantenkoeffizienten sind übrigens lauter ganze Zahlen; denn da m gerade ist, so bildet $m_m B_m = B_m$ das letzte Glied in der Reihe (2), und da m_2, m_4, m_6 etc. ganze Zahlen sind, so folgt jetzt, dass wenn B_2, B_4, B_6 ... B_{m-2} ganze Zahlen sind, es auch B_m sein muss; nun ist aber $B_2=1$ und folglich sind auch alle übrigen Sekantenkoeffizienten ganze Zahlen, die beiläufig bemerkt ganz ungemein rasch steigen.

Auch eine Relation zwischen den Bernoullischen Zahlen und den Sekantenkoeffizienten lässt sich mittelst der erwähnten Methode entdecken, wenn man nämlich die Gleichung (9) mit $\sin x$ multiplizirt und in der so entstehenden Formel

$$\tan x = \sin x \left(1 + \frac{B_2}{2'} x^2 + \frac{B_4}{4'} x^4 + \ldots\right)$$

für $\tan x$ und $\sin x$ die gleichgeltenden Reihen setzt. Vergleicht man nachher die Coeffizienten von x^m, wo m eine ungerade Zahl ist, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m+1} 2^{m+1}(2^{m+1}-1) B_m = 1 - m_2 B_2 + m_4 B_4 - \ldots \quad (3)$$

woraus man für $m=1, 3, 5$, etc. die Bernoullischen Zahlen berechnen könnte, vorausgesetzt, dass die Sekantenkoeffizienten bereits bekannt sind.

II. Man kann dagegen auch solche Formeln aufstellen, mittelst deren man jede beliebige der mit B bezeichneten Zahlen berechnen kann, ohne die Vorgänger derselben zu kennen. Einige solcher, wie man zu sagen pflegt, independenter Formeln haben wir bereits entwickelt in no. (13), (14) und (17) §. 43.; wir stellen jetzt noch einige hinzu, welche vor jenen den Vorzug grösserer Eleganz haben.

Bezeichnet man $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ mit $F(x)$, $\tan x$ mit $\Phi(x)$ und $\sec x$ mit $\Psi(x)$, so ist vermöge einer bekannten trigonometrischen Formel

$$F(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$$

und folglich auch wenn man nach $n$maliger Differenziation $x=0$ macht

$$F^{(n)}(0) = \Phi^{(n)}(0) + \Psi^{(n)}(0).$$

Für ein ungerades n hat man aber vermöge der Reihen für $\Phi(x) = \tan x$ und $\Psi(x) = \sec x$

$$\Phi^{(n)}(0) = \frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1} B_n \; , \; \Psi^{(n)}(0) = 0$$

und für ein gerades $n > 0$

$$\Phi^{(n)}(0) = 0 \; , \; \Psi^{(n)}(0) = B_n ,$$

wo im ersten Falle B_n eine Bernoullische Zahl und im zweiten einen Sekantenkoeffizienten bedeutet Nach dem Vorigen ist nun auch

$$\left.\begin{aligned} F^{(n)}(0) &= \frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1} B_n \text{ für ungerade } n \\ &= B_n \text{ für gerade } n \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

und man kann demnach aus dem $n$ten Differenzialquotienten von $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ eine Formel zur Berechnung der Bernoullischen Zahlen sowohl als der Sekantenkoeffizienten ableiten. Um nun jenen Differenzialquotienten zu entwickeln, bemerken wir zunächst, dass

$$F(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$$

ist, oder wenn man $\cos\frac{x}{2}$ und $\sin\frac{x}{2}$ durch imaginäre Exponenzialgrössen ausdrückt:

$$F(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}i} + e^{-\frac{x}{2}i} + \frac{1}{i}\left(e^{\frac{x}{2}i} - e^{-\frac{x}{2}i}\right)}{e^{\frac{x}{2}i} + e^{-\frac{x}{2}i} - \frac{1}{i}\left(e^{\frac{x}{2}i} - e^{-\frac{x}{2}i}\right)},$$

d. i. durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit $ie^{\frac{x}{2}i}$;

$$F(x) = \frac{i(e^{xi}+1) + (e^{xi}-1)}{i(e^{xi}+1) - (e^{xi}-1)} = \frac{(i+1)e^{xi} + (i-1)}{(i-1)e^{xi} + (i+1)},$$

und wenn man Zähler und Nenner negativ nimmt:

$$F(x) = \frac{(1-i) - (1+i)e^{xi}}{(1-i)e^{xi} - (1+i)}.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1+i}{1+i}$ wird hieraus unter der Bemerkung, dass $1 + i^2 = 0$ ist

$$F(x) = \frac{1 - ie^{xi}}{e^{xi} - i},$$

wofür man endlich auch schreiben kann

$$F(x) = -i + \frac{2}{e^{xi} - i}.$$

Hieraus folgt nun unmittelbar

$$F^{(n)}(x) = 2\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^{xi} - i}\right\}. \tag{5}$$

Zur Entwicklung dieses Differenzialquotienten kann man zwei verschiedene Wege einschlagen, welche dann auch zu verschiedenen Formeln führen.

A. Nehmen wir in der früher abgeleiteten Formel

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{e^z - a}\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^z}{e^z - a}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^z}{e^z - a}\right)^2 + \dots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^z}{e^z - a}\right)^{n+1}\right\}$$

$a = i$ und $z = xi$, so ergiebt sich auf der Stelle nach no. (2)

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^{xi} - i}\right\} = \frac{1}{2}F^{(n)}(x)$$

$$= i^{n-1}\left\{\overset{n}{J}_1\left(\frac{e^{xi}}{e^{xi} - i}\right) - \overset{n}{J}_2\left(\frac{e^{xi}}{e^{xi} - i}\right)^2 + \dots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1}\left(\frac{e^{xi}}{e^{xi} - i}\right)^{n+1}\right\},$$

folglich für $x = 0$

$$F^{(n)}(0) = 2i^{n-1}\left\{\overset{n}{J}_1 \frac{1}{1-i} - \overset{n}{J}_2 \frac{1}{(1-i)^2} + \dots + (-1)^n \overset{n}{J}_{n+1} \frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right\}.$$

Um hier eine Sonderung der reellen und imaginären Grössen vornehmen zu können, bemerken wir, dass

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

folglich

$$\frac{1}{1-i} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}$$

und nach dem Moivre'schen Satze

$$\frac{1}{(1-i)^m} = \frac{\cos\frac{m\pi}{4} + i\sin\frac{m\pi}{4}}{(\sqrt{2})^m}$$

ist. Bringen wir diess in der Formel für $F^{(n)}(0)$ in Anwendung, so ergiebt sich

$$F^{(n)}(0)=2i^{n-1}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\}$$
$$+2i^n\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\}.$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n ungerade oder gerade ist; im ersten wird i^{n-1} reell $=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ und i^n imaginär $=(-1)^{\frac{n-1}{2}}i$ und folglich haben wir durch Vergleichung mit no. (1)

$$\frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{n+1}B_n \tag{6}$$
$$=2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\}$$

$$0=\overset{n}{J}_1\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}. \tag{7}$$

Ist dagegen n gerade, so wird i^n reell $=(-1)^{\frac{n}{2}}$ und i^{n-1} imaginär und folglich ist wieder durch Vergleichung mit (1):

$$B_n=2(-1)^{\frac{n}{2}}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\} \tag{8}$$

$$0=\overset{n}{J}_1\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\cos\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}} \tag{9}$$

und von diesen vier Gleichungen, in welchen die Grössen J nach der bekannten Formel

$$\overset{n}{J}_p=p^n-(p-1)_1(p-1)^n+(p-1)_2(p-2)^n-\ldots \tag{10}$$

bestimmt werden, dient die erste zur Berechnung der Bernoullischen Zahlen und die dritte zu der der Sekantenkoeffizienten. Beide Formeln lassen sich übrigens so zu sagen unter einen Hut bringen, so dass die Unterscheidung von ungeraden und geraden n wegfällt; setzt man nämlich:

$$\varepsilon=\frac{1-(-1)^n}{2},\ \eta=\frac{1+(-1)^n}{2}, \tag{11}$$

so enthält die Gleichung:

$$\frac{2^{\varepsilon(n+1)}(2^{\varepsilon n+1}-1)}{2(\varepsilon n+1)}B_n$$

$$=(-1)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}\left\{\overset{n}{J}_1\frac{\varepsilon\cos\frac{\pi}{4}+\eta\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}-\overset{n}{J}_2\frac{\varepsilon\cos\frac{2\pi}{4}+\eta\sin\frac{2\pi}{4}}{(\sqrt{2})^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n\overset{n}{J}_{n+1}\frac{\varepsilon\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+\eta\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right\} \quad (12)$$

die Formeln (3) und (5) gleichzeitig in sich. Für ungerade n wird nämlich $\varepsilon=1$ und $\eta=0$, für gerade n dagegen $\varepsilon=0$ und $\eta=1$, wodurch man auf die genannten Gleichungen zurückkommt, wenn man sich dieselben durch 2 dividirt denkt.

B. Anders gestalten sich die Ausdrücke, wenn man sich zur Bestimmung von $F^{(n)}(0)$ der Formel

$$\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{e^z-a}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(e^z-a)^{n+1}}\left\{\overset{n}{L}_1\,a^{n-1}e^z+\overset{n}{L}_2\,a^{n-2}e^{2z}+\ldots+\overset{n}{L}_n\,e^{nz}\right\}$$

bedient, worin die Grössen L mittelst der Gleichung

$$\overset{n}{L}_p=p^n-(n+1)_1(p-1)^n+(n+1)_2(p-2)^n-\ldots \quad (13)$$

bestimmt werden. Man findet nämlich für $a=i$, $z=xi$ und nach no. (5)

$$\tfrac{1}{2}F^{(n)}(x)$$

$$=\frac{(-1)^n i^n}{(e^{xi}-i)^{n+1}}\left\{\overset{n}{L}_1\,i^{n-1}e^{xi}+\overset{n}{L}_2\,i^{n-2}e^{2xi}+\ldots+\overset{n}{L}_n\,e^{nxi}\right\}$$

und für $x=0$, wenn man mit i^n in die Parenthese multiplizirt,

$$\tfrac{1}{2}F^{(n)}(0) \quad (14)$$

$$=\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}\left\{\overset{n}{L}_1 i^{2n-1}+\overset{n}{L}_2 i^{2n-2}+\overset{n}{L}_3 i^{2n-3}+\ldots+\overset{n}{L}_n i^n\right\}.$$

Die in Paranthese stehende Reihe zerfällt wegen

$$i^{2n-1}=(-1)^{n-1}i\ ,\ i^{2n-2}=(-1)^{n-1}$$
$$i^{2n-3}=(-1)^{n-2}i\ ,\ i^{2n-4}=(-1)^{n-2}$$

u. s. f.

in eine imaginäre und eine reelle Partie, nämlich

$$(-1)^{n-1}\{\overset{n}{L}_1-\overset{n}{L}_3+\overset{n}{L}_5-\ldots.\}i$$
$$+(-1)^{n-1}\{\overset{n}{L}_2-\overset{n}{L}_4+\overset{n}{L}_6-\ldots.\},$$

wobei die eingeklammerten Reihen, die wir für den Augenblick mit P und Q bezeichnen wollen, nur so weit fortgesetzt werden, dass kein Index die Zahl n übersteigt. Setzen wir nun in no. (14)

$$(-1)^{n-1}(Pi+Q)$$

für den Inhalt der Parenthese, so wird

$$\frac{1}{2}F^{(n)}(0)=-\frac{Pi+Q}{(1-i)^{n+1}}=-\frac{Pi+Q}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{n+1}}$$

$$=-\frac{(Pi+Q)\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^{n+1}}$$

d. i. durch Ausführung der angedeuteten Multiplikation im Zähler

$$\frac{1}{2}F(0)=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\left\{P\sin\frac{(n+1)\pi}{4}+Q\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right\}$$
$$-\frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\left\{P\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+Q\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right\}.$$

Da wir aber aus no. (4) wissen, dass $F^{(n)}(0)$ immer reell ist, so muss der Faktor von i für sich Null sein, so dass

$$\frac{1}{2}F^{(n)}(0)=\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}\left\{P\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-Q\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right\}$$

übrig bleibt. Berücksichtigen wir endlich, dass die beiden für $F^{(n)}(0)$ in no. (4) angegebenen Werthe in der Formel

$$F^{(n)}(0)=\frac{2^{\varepsilon(n+1)}(2^{\varepsilon n+1}-1)}{2n+1}B_n$$

zusammengefasst werden können, so gelangen wir vermöge der Bedeutungen von P und Q zu folgendem Endresultate:

$$\frac{2^{(\varepsilon+\frac{1}{2})(n+1)}(2^{\varepsilon n+1}-1)}{2(\varepsilon n+1)}B_n \qquad (15)$$
$$=\{\overset{n}{L}_1-\overset{n}{L}_3+\overset{n}{L}_5-\ldots.\}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$
$$-\{\overset{n}{L}_2-\overset{n}{L}_4+\overset{n}{L}_6-\ldots.\}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Es möge endlich noch bemerkt werden, dass die bisherigen Formeln in eine weit elegantere und symmetrischere Gestalt gebracht werden können, sobald man von der herkömmlichen Bezeichnungsweise, der wir hier gehuldigt haben, abgeht und die folgende einführt:

$$\tan x = \frac{G_1 x}{1} + \frac{G_3 x^3}{1.2.3} + \frac{G_5 x^5}{1.2.3.4.5} + \dots \qquad (16)$$

$$\sec x = 1 + \frac{G_2 x^2}{1.2} + \frac{G_4 x^4}{1.2.3.4} + \dots \,. \qquad (17)$$

wobei

G_1 , G_3 , G_5, ... die Tangentenkoeffizienten,
G_2 , G_4 , G_6, ... die Sekantenkoeffizienten

heissen mögen, so dass die Bernouillischen Zahlen weiter nicht gebraucht, aber vermittelst der Relation

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} = G_{2n-1} \quad \text{oder} \quad B_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} G_{2n-1}$$

aus den Tangentenkoeffizienten abgeleitet werden können, während immer $B_{2n} = G_{2n}$ ist. Multiplizirt man nun die Gleichung (16) mit $\cos x$, setzt für $\sin x$ und $\cos x$ die gleichgeltenden Reihen und vergleicht dann die Coeffizienten von x^m, wo m immer ungerade ist, so findet man für die Tangentenkoeffizienten die Rekursionsformel

$$1 = m_1 G_1 - m_3 G_3 + m_5 G_5 - \dots \,, \; m \text{ ungerade}, \qquad (18)$$

welche der für die Sekantenkoeffizienten entwickelten

$$1 = m_2 G_2 - m_4 G_4 + m_6 G_6 - \dots \,, \; m \text{ gerade}. \qquad (19)$$

vollkommen analog ist. Zugleich ergiebt sich aus no. (18), dass die Grössen G_1 , G_3 , G_5 etc. sämmtlich ganze Zahlen sind wie die Sekantenkoeffizienten. Ferner hat man

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1 + \frac{G_1 x}{1} + \frac{G_2 x^2}{1.2} + \frac{G_3 x^3}{1.2.3} + \dots$$

folglich für $F(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, $F^{(n)}(0) = G_n$ und mithin nach dem für $F^{(n)}(0)$ gefundenen Werthe

$$\left.\begin{aligned} 2^{\frac{n-1}{2}} G_n = (\overset{n}{L}_1 - \overset{n}{L}_3 + \overset{n}{L}_5 - \dots) \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \\ - (\overset{n}{L}_2 - \overset{n}{L}_4 + \overset{n}{L}_6 - \dots) \cos \frac{(n+1)\pi}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

wo eine Unterscheidung gerader oder ungerader n gar nicht mehr vorkommt *).

§. 46.

Die Reihen für die cyklometrischen Funktionen.

Zur vollständigen Lösung des Problemes, die sämmtlichen Funktionen der algebraischen Analysis in Reihen zu verwandeln, fehlt uns noch die Entwickelung der Reihen für Arcsin x, Arccos x, Arctan x u. s. w. Dieselbe lässt sich auf folgende Weise bewerkstelligen.

I. Für $F(x) = \operatorname{Arcsin} x$ könnte man auf die früher abgeleiteten Ausdrücke von $F^{(n)}(x)$ zurückgehen, um daraus für $x=0$ das allgemeine Glied der Mac Laurin'schen Reihe nämlich

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}$$

zu entwickeln; man gelangt aber weit kürzer durch die Bemerkung zum Ziele, dass

$$\frac{d^n \operatorname{Arcsin} x}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

folglich für $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \Phi(x)$,

$$F^{(n)}(x) = \Phi^{(n-1)}(x)$$

und mithin auch

$$F^{(n)}(0) = \Phi^{(n-1)}(0)$$

ist. Vermöge des Binomialtheoremes hat man aber unter der Bedingung $1 > x > -1$ und für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

und hieraus findet man sehr leicht

*) Es wäre für die Eleganz des Calcüls sehr zu wünschen, dass die Analytiker auf den im Obigen enthaltenen Vorschlag eingehen möchten, was um so leichter sein dürfte, als der Buchstabe G, der hier eine spezifische Bedeutung erhalten hat (etwa wie π), sonst nur äusserst selten gebraucht wird.

$$\Phi^{(n-1)}(0) = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\, 1.2\ldots(n-1)$$

für ungerade n,

$$\text{und } = 0$$

für gerade n, folglich vermöge der vorigen Relation zwischen $F^{(n)}(0)$ und $\Phi^{(n-1)}(0)$

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Diese Formel ist nur für $n=1$ unbrauchbar; in diesem Falle hat man aber unmittelbar

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{F'(0)}{1} = 1.$$

Berücksichtigt man nun noch die Gleichung $F(0) = 0$, so giebt die Anwendung des Mac Laurin'schen Satzes

$$\text{Arcsin}\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (1)$$

und diese Gleichung gilt so lange, als keine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. unstetig oder unendlich wird. Man hat nun

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und die übrigen Differenzialquotienten sind Brüche, deren Zähler verschiedene Potenzen von x mit ganzen positiven Exponenten enthalten und deren Nenner Potenzen von $1-x^2$ sind. Hieraus folgt sogleich, dass erst für $x=1$ ein Unendlichwerden von $F'(x)$, $F''(x)$ etc. eintreten kann, und dass mithin die Gleichung (1) für jedes $x < 1$ richtig bleibt.

Bemerkt man, dass

$$\text{Arcsin}\, x = \text{Arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist, so hat man auch

$$\text{Arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots$$

$$x < 1$$

oder für

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = z, \quad \text{also } x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

wo nun durch jedes beliebige reelle z die Bedingung $x < 1$ erfüllt wird

$$\text{Arctan } z$$

$$= \frac{1}{1}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^5 + \ldots \quad (2)$$

Für die Entwickelung von $\text{Arccos}\, x$ in eine Reihe bedarf es keines neuen Calcüls, da nämlich

$$\text{Arccos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x$$

ist, so hat man auf der Stelle:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \ldots \\ x < 1.\end{array}\right\} \quad (3)$$

II. Will man $\text{Arctan}\, x$ in eine Reihe verwandeln, so kann man sich entweder der früher entwickelten Formel

$$\frac{d^n \,\text{Arctan}\, x}{dx^n} = (-1)^{n-1} 1.2\ldots(n-1)\frac{\sin\left(n \,\text{Arctan}\, \frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}n}}$$

oder einer der in no. I benutzten ganz ähnlichen Methode bedienen, indem man bemerkt, dass für $F(x) = \text{Arctan}\, x$, $F'(x) = \Psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$F^{(n)}(x) = \Psi^{(n-1)}(x)$$

und folglich auch

$$F^{(n)}(0) = \Psi^{(n-1)}(0)$$

ist. Man hat aber für $x < 1$

$$\Psi(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

und hieraus findet sich sehr leicht

$$\Psi^{(n-1)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 1.2\ldots(n-1)$$

für ungerade n,

$$= 0$$

für gerade n, und mittelst der vorher gezeigten Relation zwischen $F^{(n)}(0)$ und $\Psi^{(n-1)}(0)$,

$$\frac{F^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}$$

für ungerade n,

$$=0$$

für gerade n. Die Anwendung des Mac Laurin'schen Theoremes giebt jetzt wegen $F(0)=0$,

$$\text{Arctan}\, x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots. \qquad (4)$$

Die Gränzen für die Gültigkeit dieser Gleichung bestimmen sich aus der einfachen Bemerkung, dass die Funktionen $F'(x)$, $F''(x)$ etc. für $x=1.\sqrt{-1}$ unendlich werden und dass folglich $x<1$ sein muss.

Da nach einer bekannten Formel

$$\text{Arctan}\, x=\text{Arcsin}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, so hat man auch

$$\text{Arcsin}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

und für

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=z, \text{ also } x=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$

wo nun $z<$ sein muss, wenn $x<1$ bleiben soll:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Arcsin}\, z=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)-\ldots \\ z<\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Will man $\text{Arccot}\, x=\text{Arctan}\,\frac{1}{x}$ berechnen, so braucht man blos die Formel

$$\text{Arccot}\, x=\text{Arctan}\,\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\, x$$

anzuwenden, indem man für x die oben entwickelte Reihe setzt

Berücksichtigt man die Gleichung

$$\text{Arctan}\,\alpha + \text{Arctan}\,\beta = \text{Arctan}\,\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta},$$

welche immer gilt, sobald $\alpha < 1$ und $\beta < 1$ ist, so hat man auch noch

$$\left.\begin{aligned}\text{Arctan}\,\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} &= \frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^5}{5}-\dots\\ &+\frac{\beta}{1}-\frac{\beta^3}{3}+\frac{\beta^5}{5}-\dots\\ &\alpha < 1\,,\ \beta < 1\,,\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

wovon wir später eine interessante Anwendung machen werden.

§. 47.

Die Convergenz und Divergenz der Reihen.

Wenn wir nach der langen Folge von Consequenzen, welche sich an das Theorem von Mac Laurin und den in §. 41. entwickelten Satz knüpfen, von dem reichen Detail des Calcüls absehen und uns noch einmal zu einem Ueberblicke über das grosse Ganze dieser Untersuchungen erheben, so finden wir den hervorstechendsten Charakterzug derselben darin, dass der Gedankengang stets mit der Forderung anfängt, eine ihrer Form nach gegebene Funktion in eine nach steigenden Potenzen der Variabelen geordnete Reihe zu verwandeln, so weit diess überhaupt möglich ist. So wie nun hier die Funktion als das Primäre auftritt, wovon noch eine andere in gewisser Hinsicht weitläufigere Form gesucht wird, so liesse sich auch die umgekehrte Aufgabe stellen, nämlich, wenn eine Reihe gegeben ist, diejenige Funktion zu suchen, welche unter Anwendung des Mac Laurin'schen Theoremes die vorherbestimmte Reihe reproduziren würde; mit anderen Worten: dem Probleme von der Verwandlung gegebener Funktionen in Reihen, steht das Problem der Summirung gegebener Reihen gegenüber. Um diess zunächst an einem Beispiele zu erläutern, betrachten wir die Aufgabe, die Summe $F(x)$ der Reihe

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

aufzufinden. Bei dieser sehr einfachen Form reicht es hin, den Differenzialquotienten von $F(x)$ zu nehmen, um sogleich auf eine andere

Reihe zu kommen, deren Summe schon bekannt ist; man erhält nämlich

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \text{ wenn } x < 1 \text{ ist,}$$

und folglich muss $F(x)$ eine solche Funktion von x sein, dass $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ werden kann. Hier zeigt nun ein Blick auf die bekannten Differenzialformeln, dass $F(x) = \text{Arctan}\, x + C$ sein müsse, wo C eine beliebige Constante bedeutet, so dass man also für $x < 1$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \text{Arctan}\, x + C$$

hat, wo sich nun die Constante C leicht bestimmen lässt, wenn man $x = 0$ setzt; man findet nämlich $C = 0$, wodurch die obige Gleichung auf ein schon bekanntes Resultat zurückkommt. Man wird sehr leicht bemerken, dass Aufgaben dieser Art nicht mehr in die Differenzialrechnung gehören, wie das direkte Problem von der Verwandlung der gegebenen Funktionen in Reihen, sondern vielmehr der Integralrechnung anheim fallen müssen, weil es bei ihnen darauf ankommt, aus den Differenzialquotienten einer ihrer Natur nach unbekannten Funktion diese letztere zu bestimmen. Wenn nun aber auch hier an keine weitere Auseinandersetzung über dergleichen Aufgaben zu denken ist, so giebt uns doch die blose Kenntniss derselben schon zu einer Untersuchung Gelegenheit, welche jedenfalls der Lösung einer solchen Aufgabe vorausgehen muss und die auch für die Differenzialrechnung von einiger Wichtigkeit ist. Bevor man sich nämlich nach den Rechnungsoperationen umsieht, mittelst deren man die Funktion aufsucht, welche der gegebenen Reihe gleich sein soll, muss man erst wissen, ob eine solche Funktion überhaupt existirt, weil man sonst viel Mühe und Scharfsinn aufbieten könnte, um etwas zu suchen, was nirgends zu finden ist. Dass es in der That solche Fälle geben kann, in welchen es Thorheit sein würde, nur den Griffel anzusetzen, kann man leicht an einzelnen Beispielen sehen. Wäre z. E. die Summe der Reihe

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \ldots \text{ in inf.}$$

aufzusuchen, so hätte man für $x < 1$, $\frac{1}{x} > 1$ folglich $x + \frac{1}{x} > 1$ und mithin wäre die fragliche Summe $> 1 + 1 + 1 + \ldots$ d. h. sie wäre unan-

gebbar, weil sie jede angebbare noch so grosse Zahl übersteigt: für $x=1$ wäre sie $=2+2+2+\ldots$, also ebenfalls unendlich und für $x>1$ wäre $\frac{1}{x}<1$ und $x+\frac{1}{x}$ wieder >1, folglich die Sache wie im ersten Falle. Da nun ein vierter Fall nicht möglich ist, so folgt, dass es keine endliche bestimmte Funktion $F(x)$ geben kann, der man die obige Reihe gleich setzen dürfte. — Während wir also früher untersuchten, welchen Bedingungen eine gegebene Funktion genügen muss, wenn sie sich nach dem Mac Laurin'schen Theoreme in eine Reihe soll verwandeln lassen, so müssen wir jetzt umgekehrt fragen, welche Bedingungen muss eine gegebene Reihe erfüllen, wenn sie einer bestimmten endlichen Funktion gleich sein soll. Man kann diese Frage auch noch auf einen anderen Ausdruck bringen, wenn man durch eine Definition den Unterschied zwischen solchen Reihen, die einer bestimmten endlichen Grösse gleich sind und denen, welche dieser Eigenschaft ermangeln, fest hält. Denken wir uns nämlich eine Reihe von Grössen u_0, u_1, u_2, ... u_{n-1}, die so beschaffen sind, dass der Werth einer jeden durch ihre Stelle bestimmt wird, oder dass überhaupt irgend eine u_m aus ihnen eine gegebene Funktion $\varphi(m)$ ihres Index bildet, und setzen wir

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

so bildet offenbar S_n eine gewisse Funktion der Gliederanzahl n. Machen wir nun die vorliegende endliche Reihe dadurch zu einer unendlichen, dass wir die Termenzahl n unbegränzt wachsen lassen, nehmen also

$$\operatorname{Lim} S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

so sind hinsichtlich der Funktion S_n zwei verschiedene Fälle möglich; entweder nämlich nähert sich dieselbe für unausgesetzt zunehmende n einer bestimmten angebbaren Grösse als Gränze, oder nicht. Im ersten Falle heisst die unendliche Reihe eine convergente und $\operatorname{Lim} S_n$, was zur Abkürzung mit S bezeichnet werden möge, ihre Summe, so dass also

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ inf.}$$

ist, im zweiten Falle nennt man die unendliche Reihe divergent, und da hier $\operatorname{Lim} S_n$ nicht angebbar ist, so kann auch keine solche Gleichung wie vorhin aufgestellt werden. Man darf demnach sagen: nur die convergenten Reihen haben Summen, die divergenten dagegen nicht, oder auch: nur eine convergente Reihe gilt einer bestimmten

Grösse **gleich**, während es keine Grösse giebt, der man eine divergente Reihe gleich setzen dürfte. Man kann diesen Ausspruch auch sogleich umkehren; weiss man nämlich im Voraus, dass die Gleichung $S = u_0 + u_1 + u_2 +$ etc., worin S eine unendliche Grösse bezeichnet, statt findet, so muss die Reihe rechts nothwendig convergiren, denn wäre diess nicht der Fall, so würde es keine Grösse geben, mit der man sie identifiziren könnte, was der Voraussetzung widerspricht.

Es giebt demnach zwei verschiedene Wege, um über die Convergenz von Reihen überhaupt zu entscheiden. Kennt man nämlich im Voraus die Bedingungen, unter welchen eine Grösse S in eine (ihr gleiche) Reihe von der Form $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. verwandelt werden kann, so weiss man a priori die Umstände, unter welchen die letztere convergirt; ist dagegen S nicht gegeben, sondern die Reihe, so muss man a posteriori die Bedingungen ihrer Convergenz aufsuchen. Die erste Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Umstände, unter welchen die Verwandlung einer Funktion $S = F(x)$ möglich ist, haben wir für den Fall, dass die fragliche Reihe nach steigenden Potenzen der Variabelen x fortschreitet, in §. 41. gelöst und können jetzt das Resultat in folgende Worten zusammenfassen: „die im Theoreme von Mac Laurin vorkommende Reihe convergirt so lange, als der Modulus von x unter dem kleinsten von den Modulis liegt, für welche die Funktion $F(x)$ oder irgend einer ihrer Differenzialquotienten unstetig oder unendlich wird;“ dagegen liegt uns noch die Untersuchung ob, welche a posteriori die Convergenzbedingungen für eine gegebene Reihe aufsuchen soll.

Es ist nun sehr leicht, wenigstens eine der Bedingungen anzugeben, unter welchen allein eine Reihe wie

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

convergiren kann, wobei wir übrigens der Allgemeinheit wegen nicht voraussetzen, dass dieselbe successive Potenzen einer Variabelen enthalten müsse. Die fragliche Bedingung besteht nämlich darin, dass eine unbegränzte Abnahme der Glieder statt finden oder, für wachsende n, $\operatorname{Lim} u_n = 0$ sein muss. Denn wären alle Glieder grösser als eine gegebene Grösse ε, so hätte man wenigstens bei lauter positiven Gliedern

$$\begin{aligned} & u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. \\ > & \ \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \ldots \\ > & \ \varepsilon(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots.) \end{aligned}$$

und wie klein nun auch ε sein möge, so kann man doch das Produkt $\varepsilon(1+1+\ldots.)$ grösser als jede noch so grosse angebbare Zahl machen, wenn man nur hinreichend viel Einheiten zusammennimmt; es würde also die Summe der zuerst genannten Reihe jede angebbare Zahl übersteigen, folglich unangebbar und die Reihe divergent sein.

So nothwendig nun auch die Bedingung $\operatorname{Lim} u_n = 0$ ist, so wenig hinreichend zeigt sie sich in einzelnen Fällen, namentlich wenn alle Reihenglieder positiv sind. Z. B. für $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$ $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ etc., $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ hat man zwar $\operatorname{Lim} u_n = 0$, gleichwohl aber divergirt die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$$

Denn wenn S_n die Summe der n ersten Glieder bezeichnet, so ist

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots. + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots. + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

d. i.

$$S_n > n\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ oder } S_n > \sqrt{n},$$

woraus man ersieht, dass die fragliche Reihe divergirt, weil S_n über alle Gränze hinauswächst, sobald diess mit der Termenzahl n der Fall ist. Beispiele dieser Art, deren Zahl sich leicht vermehren liesse, weisen darauf hin, dass noch andere Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn die Convergenz einer Reihe ausser Zweifel sein soll. Zur Aufsuchung derselben halten wir uns nun an folgendes unmittelbar klare Prinzip: „wenn die beiden Reihen

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots.$$

und

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

nur positive Glieder enthalten und man schon weiss, dass die erste derselben convergirt, so convergirt die zweite ebenfalls und zwar stärker, sobald

$$u_0 < t_0\,,\; u_1 < t_1\,,\; u_2 < t_2\,, \text{ etc.}$$

ist; divergirt dagegen die erste, so ist diess auch mit der zweiten der Fall, wenn die Ungleichungen

$$u_0 > t_0 \,, \; u_1 > t_1 \,, \; u_2 > t_2 \,, \text{ etc.}$$

statt finden." Man kann diess noch erweitern, wenn man sich erinnert, dass eine convergente unendliche Reihe und eine endliche Reihe zusammen wieder eine convergente unendliche Reihe bilden. Ist nun, wenn auch nicht von vorn herein $u_0 < t_0$, $u_1 < t_1$, etc., so doch wenigstens von einer bestimmten endlichen Stelle an

$$u_m < t_m \,, \; u_{m+1} < t_{m+1} \,, \; u_{m+2} < t_{m+2} \,, \; \ldots;$$

so ist die Summe der Reihe

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$$

eine unendliche Grösse, weil es die von $t_m + t_{m+1} +$ etc. ist; hieraus folgt, dass auch die Summe der Reihe

$$\begin{aligned} & u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1} \\ & + u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

eine endliche Grösse sein, d. h. die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergiren müsse. Ebenso leicht kann man sich überzeugen, dass die letztere Reihe divergirt, sobald von einer gewissen Stelle an $u_m > t_m$, $u_{m+1} > t_{m+1}$ etc. und die Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc. eine divergente ist.

Das so eben aufgestellte Princip der Reihenvergleichung lässt sich übrigens noch in etwas anderer Form aussprechen, wodurch seine Anwendung wesentlich erleichtert wird. Sei nämlich:

$$\frac{t_{m+1}}{t_m} = \lambda_1 \,, \; \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}} = \lambda_2 \,, \; \frac{t_{m+3}}{t_{m+2}} = \lambda_3 \,, \; \ldots \tag{1}$$

so findet man sehr leicht

$$t_{m+1} = \lambda_1 t_m \,, \; t_{m+2} = \lambda_1 \lambda_2 t_m \,, \; t_{m+3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 t_m, \text{ etc.}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} & t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \ldots \\ & = t_m (1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ebenso hat man für

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \mu_1 \,, \; \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} = \mu_2 \,, \; \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} = \mu_3 \,, \; \ldots \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} & u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots \\ & = u_m (1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Finden nun die folgenden Ungleichungen statt:

$$\mu_1 < \lambda_1 \,,\; \mu_2 < \lambda_2 \,,\; \mu_3 < \lambda_3 \,, \ldots. \tag{5}$$

so ist auch $\mu_1 \mu_2 < \lambda_1 \lambda_2$, $\mu_1 \mu_2 \mu_3 < \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ etc. und ebenso

$$1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \ldots$$
$$< 1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots$$

d. i. vermöge der Gleichungen (2) und (4)

$$\frac{1}{u_m}(u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots.)$$
$$< \frac{1}{t_m}(t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + \ldots.)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots \\ < \dfrac{u_m}{t_m}(t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \ldots) \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wenn nun die Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots.$$

convergirt, so ist auch die Summe der Reihe

$$t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + \ldots$$

als eines Stückes von ihr eine endliche Grösse; folglich findet auch nach no. (6) das Nämliche mit der Summe der Reihe

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$$

und ebenso mit der von

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

statt, d. h. die letztere convergirt. Setzt man für die mit λ und μ bezeichneten Grössen ihre Werthe aus (1) und (3), so gehen die Ungleichungen (5) über in

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{t_{m+1}}{t_m} \,,\; \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}} \,, \text{ etc.}$$

und man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$$

convergirt, so convergirt auch die folgende

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

sobald der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von irgend einer bestimmten Stelle an kleiner wird und auch kleiner bleibt als der entsprechende Quotient $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Ebenso leicht überzeugt man sich von der Richtigkeit des ganz analogen Theoremes:

Wenn die Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

divergirt, so divergirt auch die folgende

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sobald der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von einer bestimmten Stelle an grösser wird und auch grösser bleibt als der entsprechende Quotient $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Von diesem für die Lehre von der Convergenz der Reihen sehr wichtigen Satze wollen wir nun zuvörderst einige Anwendungen machen, die zu eben so viel Criterien führen, mittelst deren man a posteriori über die Convergenz oder Divergenz gegebener Reihen entscheiden kann.

§. 48.

Vergleichung zwischen beliebigen Reihen und der geometrischen Progression.

Nach der sehr bekannten Formel für die Summirung der geometrischen Progression hat man

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}$$
$$= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

und folglich, wenn man die Gliederanzahl n unbegränzt wachsen lässt

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ in inf.}$$
$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} \operatorname{Lim} x^n.$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $x < 1$ oder > 1 ist. Im ersten wird $\operatorname{Lim} x^n = 0$ und folglich

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}\ ,\ x<1$$

wie wir schon auf anderem Wege gefunden haben; für $x>1$ dagegen nimmt x^n mit x über alle Gränze hinaus zu und wird keine bestimmte Grösse mehr. Ist endlich $x=1$, so geht die Reihe $1+x+x^2+$ etc. über in $1+1+1+$ etc. und hat demnach wieder keine bestimmte Summe. Aus diesem Allen zusammen folgt nun, dass die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem $x<1$ oder $x \geqq 1$ ist.

Hier bietet sich nun sogleich Gelegenheit zur Anwendung des im vorigen Paragraphen entwickelten Principes der Reihenvergleichung, wenn man nämlich für t_0, t_1, t_2, etc. die Glieder der so eben betrachteten Reihe setzt. Man hat dann

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = x$$

und folglich convergirt die beliebige Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

wenn von einer bestimmten Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < x$$

oder, weil im Falle der Convergenz $x<1$ sein muss, wenn

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

ist; dagegen divergirt sie, sobald von einer gewissen Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > x \text{ und } x \geqq 1,$$

also

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

wird. Diess lässt sich auch noch etwas bequemer aussprechen. Heisst nämlich k der Gränzwerth von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für unendlich wachsende n, so darf man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = k \pm \delta$$

setzen, wo δ eine Grösse bezeichnet, die bis zur Gränze Null abnimmt, sobald n wächst, die man also so klein machen kann, als es nur verlangt wird. Ist nun $k < 1$, so muss sich immer ein Werth m von n finden lassen so gross, dass $\delta < 1 - k$, also $k + \delta < 1$ ist und es von nun an auch bleibt, weil δ abnimmt, sobald n wächst. Wenn also $\operatorname{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ist, so giebt es immer eine Stelle $n = m$, von welcher ab der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner ist und bleibt als die Einheit. Wenn dagegen $k > 1$, so muss sich wieder ein Werth m von n finden lassen, für welchen $\delta < k - 1$, also $k - \delta > 1$ ist und es nun auch bleibt; es giebt daher für $\operatorname{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ eine Stelle $n = m$, von welcher ab der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ immer über der Einheit liegt. Vermöge dieser Bemerkung und in Betracht des Vorigen erhalten wir nun folgendes Criterium der Convergenz oder Divergenz:

Die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem

$$\operatorname{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} \lessgtr 1$$

ist, wobei das obere Zeichen dem Falle der Convergenz, das untere dem der Divergenz entspricht.

Mit welcher Leichtigkeit sich dieser Satz anwenden lässt, werden die folgenden Beispiele zeigen.

Wäre die Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

zu entscheiden, so hätte man $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{x}{1}$, $u_2 = \frac{x^2}{2}$ etc.

$$u_n = \frac{x^n}{n}, \; u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

folglich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} x = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} x,$$

mithin

$$\operatorname{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x,$$

also findet für $x<1$ Convergenz und für $x>1$ Divergenz statt.

Hätte man ebenso über die Reihe

$$1.x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots.$$

zu diskutiren, so ergiebt sich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}=(1+\frac{1}{n})x,$$

folglich

$$\mathrm{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

und demnach convergirt oder divergirt sie mit der vorigen unter gleichen Bedingungen.

Ist die Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

gegeben, so wird

$$u_n=\frac{x^n}{1.2\ldots n},\ u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)},$$

mithin

$$\mathrm{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{Lim}\frac{x}{n+1}=0$$

für jedes willkührliche x. Dass es in der That eine Stelle giebt, von welcher ab die fragliche Reihe rascher als eine Progression abnimmt, wenn auch die Anfangsglieder sehr gross gewesen sind, kann man noch auf folgende Weise sehen. Wenn $n>p+1$, wo p eine beliebige Grösse bedeutet, so ist auch $np>p^2+p$ und

$$np+n>p^2+p+n,$$
$$np+n-p^2-p>n,$$

d. i.

$$(p+1)(n-p)>n.$$

Vermöge dieses Satzes können wir für $p=0, 1, 2, \ldots.(n-1)$ die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\begin{aligned} 1.n &= n \\ 2(n-1) &> n \\ 3(n-2) &> n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\ \cdot\ \cdot \\ (n-1)2 &> n \\ n1 &= n. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation derselben folgt leicht

$$1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots . n^2 > n^n$$

und

$$1 . 2 . 3 \ldots . n > (\sqrt{n})^n,$$

folglich

$$\frac{x^n}{1 . 2 . 3 \ldots . n} < \frac{x^n}{(\sqrt{n})^n} < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Trifft man also in der Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \ldots .$$

auf ein Glied u_n, in welchem $\sqrt{n} > x$ oder $n > x^2$ ist, und ein solches muss sich für jedes bestimmte x finden, so ist von hier ab

$$\frac{x^n}{1 . 2 \ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1 . 2 \ldots (n+1)} + \frac{x^{n+2}}{1 . 2 \ldots (n+2)} + \ldots .$$

$$< \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n + \left(\frac{x}{\sqrt{n+1}}\right)^{n+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{n+2}}\right)^{n+2} + \ldots . .$$

d. i.

$$< \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n + \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n+2} + \ldots .$$

und es findet also von hier an eine stärkere Convergenz statt als in einer geometrischen Progression.

So wie die eben betrachtete Reihe immer convergirte, so divergirt stets die folgende:

$$1 + 1 . x + 1 . 2x^2 + 1 . 2 . 3x^3 + \ldots .$$

Man hat nämlich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 . 2 \ldots . n(n+1)\, x^{n+1}}{1 . 2 \ldots . n x^n} = (n+1)\, x,$$

folglich für jedes von Null verschiedene x

$$\text{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Wäre dagegen $x=0$, so würde gar keine Reihe, sondern nur das erste Glied 1 vorhanden sein; also divergirt die Reihe immer und zwar von einer gewissen Stelle an stärker als eine geometrische Progression. Denn man hat nach dem Vorigen

$$1 . 2 . 3 \ldots . n x^n > (x\sqrt{n})^n,$$

sowie also $x\sqrt{n} > 1$ geworden ist, und dieser Fall tritt über lang oder kurz doch ein, so divergirt die Reihe stärker als die folgende:

$$(x\sqrt{n})^n + (x\sqrt{n})^{n+1} + \ldots,$$

wie man durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtung leicht findet.

Wenden wir endlich den gefundenen Satz auf die Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

an, worin α, β, γ lauter positive Grössen sein mögen, so ist

$$u_n=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1).\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}x^n,$$

$$u_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n).\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{1.2.3\ldots(n+1).\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}x$$

und wenn man Zähler wie Nenner mit $n.n$ dividirt:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\frac{\alpha}{n}+1)(\frac{\beta}{n}+1)}{(1+\frac{1}{n})(\frac{\gamma}{n}+1)}x,$$

woraus sich

$$\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x$$

findet. Die fragliche Reihe convergirt oder divergirt also, je nachdem $x<1$ oder $x>1$ ist.

Man wird aus diesen Beispielen ersehen, dass die angegebene Regel ohne Schwierigkeiten zu einer sicheren Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz einer Reihe führt, sobald der Gränzwerth des Quotienten zweier Nachbarglieder entweder unter der Einheit liegt oder sie übersteigt; die Frage wäre nur noch, was in dem Falle von der Reihe zu halten ist, wo jener Gränzwerth der Einheit gleich wird. Da hat denn die Erfahrung an einzelnen Beispielen gezeigt, dass das genannte Kennzeichen hier nichts mehr entscheidet, indem es sowohl convergente als divergente Reihen giebt, in denen gleichmässig

$\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ist. In der That darf man auch in diesem Falle keine Entscheidung durch jene Regel verlangen, denn der Nerv ihres Beweises liegt darin, dass für $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}\lessgtr 1$, es eine Stelle $n=m$ geben muss, von welcher ab der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner respektive grösser ist und bleibt als die Einheit, was natürlich für $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ nicht mehr behauptet werden darf. In den meisten Fällen nun, wo $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ist, wird man durch die im folgenden Paragraphen entwickelte Regel zu einer Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz gelangen.

§. 49.

Anderweite Reihenvergleichung.

Da das Princip der Reihenvergleichung voraussetzt, dass man schon eine Reihe habe, für welche die Bedingungen der Convergenz und Divergenz bekannt sind, so wird es zunächst darauf ankommen, eine summirbare Reihe zu entdecken, wie diess z. B. im vorigen Paragraphen mit der geometrischen Progression der Fall war. Hierzu dient uns die folgende Betrachtung.

Wenn a_0, a_1, ... a_{n-1}, b_0, b_1, ... b_{n-1} ganz beliebige, aber von Null verschiedene Grössen bezeichnen, so gilt zuvörderst die folgende rein identische Gleichung:

$$\frac{a_0\,a_1\,a_2\ldots\ldots a_{n-1}}{b_0\,b_1\,b_2\ldots\ldots b_{n-1}}=1+\frac{a_0-b_0}{b_0}+\frac{a_1-b_1}{b_1}\cdot\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_2-b_2}{b_2}\cdot\frac{a_0\,a_1}{b_0\,b_1}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{b_{n-1}}\cdot\frac{a_0\,a_1\ldots.a_{n-2}}{b_0\,b_1\ldots.b_{n-2}},$$

von deren Richtigkeit man sich sehr leicht dadurch überzeugen kann, dass man

$$\frac{a_0-b_0}{b_0}=\frac{a_0}{b_0}-1$$
$$\frac{a_1-b_1}{b_1}=\frac{a_1}{b_1}-1$$
u. s. f.

setzt und alle jetzt noch angedeuteten Rechnungsoperationen ausführt,

wobei sich alle Glieder auf der rechten Seite mit Ausnahme eines einzigen gegenseitig heben und eine blose Identität zurücklassen. Nimmt man nun in der erwähnten Gleichung

$$a_0=\alpha\ ,\ a_1=\alpha+1\ ,\ a_2=\alpha+2\ ,\ \ldots\ a_{n-1}=\alpha+n-1;$$
$$b_0=\beta\ ,\ b_1=\beta+1\ ,\ b_2=\beta+2\ ,\ \ldots\ b_{n-1}=\beta+n-1;$$

wobei α und β ein paar beliebige aber positive Grössen bezeichnen mögen, so ergiebt sich ohne Weiteres

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}$$
$$=1+\frac{\alpha-\beta}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\beta+2}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\ldots.$$
$$\ldots+\frac{\alpha-\beta}{\beta+n-1}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)} \qquad (1)$$

Aus dieser Gleichung liesse sich jetzt die Summe einer unendlichen Reihe ableiten; das Produkt auf der linken Seite besteht nämlich aus n fraktionären Faktoren und die Reihe rechts aus n Gliedern; lässt man daher n unausgesetzt wachsen und bestimmt den Gränzwerth des Produktes links, so erhält man unmittelbar die Summe der unendlichen Reihe rechts. Da α nicht $=\beta$ sein kann, weil sonst die Gleichung (1) auf das triviale Resultat $1=1$ hinauskäme, so haben wir hinsichtlich jener Gränzenbestimmung nur zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $\alpha<\beta$ oder $\alpha>\beta$. Von diesen beiden lässt sich aber der zweite wieder auf den ersten reduziren; denn gesetzt, man hätte gefunden:

$$\text{Lim}\,\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}=K\ ,\ \alpha<\beta,$$

so wäre

$$\text{Lim}\,\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}=\frac{1}{K}\ ,\ \alpha<\beta,$$

und wenn man jetzt $\beta=\alpha'$, $\alpha=\beta'$ setzte, so hätte man

$$\text{Lim}\,\frac{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)\ldots(\alpha'+n-1)}{\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)\ldots(\beta'+n-1)}=\frac{1}{K}\ ,\ \beta'<\alpha'$$

und hiermit zugleich den zweiten Fall bewältigt, in welchem $\alpha>\beta$ oder $\alpha'>\beta'$ ist.

Wenn nun der Gränzwerth des Produktes

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}\ ,\ \text{für }\beta>\alpha$$

gesucht werden soll, so kann man zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich α und β beide ganze Zahlen sind oder nicht, was zu folgenden Untersuchungen veranlasst.

A. Wenn für ganze positive α und β, $\beta > \alpha$ sein soll, so kann men

$$\beta = \alpha + k$$

setzen, wo k eine ganze positive Zahl bedeutet; da nun in dem Produkte unter no. (2) die Zahl n noch beliebig ist, so darf man dieselbe auch $> k+1$ machen, so dass $\alpha + n - 1 > \alpha + k$ wird. Schreibt man jetzt das fragliche Produkt in folgender Form

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+k-1)(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots.(\alpha+n-1)}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots(\alpha+n+k-1)},$$

so lässt sich auf der Stelle eine bedeutende Hebung vornehmen, bei welcher übrig bleibt:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+k-1)}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots.(\alpha+n+k-1)}. \qquad (3)$$

Da nun der Zähler gar kein n mehr enthält und blos aus k constanten Faktoren besteht, so folgt, dass für unausgesetzt wachsende n das vorliegende Produkt sich der Gränze Null nähert, indem diess schon mit den einzelnen Faktoren

$$\frac{\alpha}{\alpha+n}, \frac{\alpha+1}{\alpha+n+1}, \ldots \frac{\alpha+k-1}{\alpha+n+k-1}$$

der Fall ist; das Produkt in no. (3) war aber mit dem in no. (1) identisch, folglich ist auch

$$\text{Lim}\,\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)} = 0$$

für ganze positive α und β und $\beta > \alpha$.

B. Sind α und β nicht zugleich ganze positive Zahlen, aber doch wenigstens rational, so kann man sie immer auf gleichen Nenner bringen und demnach

$$\alpha = \frac{a}{c}, \beta = \frac{b}{c}$$

setzen, worin a, b, c ganze positive Zahlen sind und wegen $\beta > \alpha$, $b > a$ sein muss; das Produkt in no. (2) nimmt dann die folgende Form an:

$$\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots.(a+\overline{n-1}\,c)}{b(b+c)(b+2c)\ldots.(b+\overline{n-1}\,c)}$$

Nun finden aber offenbar nachstehende Beziehungen statt:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1},$$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+2}{b+2},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c-1}{a+c-1};$$

wobei blos der Satz angewendet wird, dass ein ächter Bruch wächst, wenn man seinen Zähler und Nenner um gleich Viel vermehrt. Aus der Multiplikation der obigen Relationen, deren Anzaht c ist, folgt nun leicht:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c<\frac{a(a+1)(a+2)\ldots.(a+c-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots.(b+c-1)} \qquad (4)$$

und wenn wir für a und b der Reihe nach $a+c$ und $b+c$, $a+2c$ und $b+2c$, u. s. f. bis $a+\overline{n-1}c$ und $b+\overline{n-1}c$ setzen, so ist ferner

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^c<\frac{(a+c)(a+c+1)\ldots.(a+2c-1)}{(b+c)(b+c+1)\ldots.(b+2c-1)},$$

$$\left(\frac{a+2c}{b+2c}\right)^c<\frac{(a+2c)(a+2c+1)\ldots.(a+3c-1)}{(b+2c)(b+2c+1)\ldots.(b+3c-1)}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\left(\frac{a+\overline{n-1}\,c}{b+\overline{n-1}\,c}\right)^c<\frac{(a+\overline{n-1}c)(a+\overline{n-1}c+1)\ldots(a+nc-1)}{(b+\overline{n-1}c)(b+\overline{n-1}c+1)\ldots(b+nc-1)}.$$

Multiplizirt man die Ungleichungen von (4) inclusive an, so erhellt, dass der Zähler des neuen Produktes rechts sämmtliche in der Reihe

$$a\ ,\ a+1\ ,\ a+2\ ,\ \ldots.\ a+nc-1$$

enthaltenen Zahlen als Faktoren enthält und zwar in natürlicher ununterbrochener Folge; ebenso enthält der Nenner alle Zahlen von b bis $b+nc-1$, und es ist demnach

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^c\left(\frac{a+2c}{b+2c}\right)^c\cdot\cdot\left(\frac{a+\overline{n-1}\,c}{b+\overline{n-1}\,c}\right)^c$$

$$<\frac{a(a+1)(a+2)\ldots.(a+nc-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots.(b+nc-1)}$$

oder wenn die ganze Zahl $nc = m$ gesetzt wird:

$$\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots.(a+\overline{n-1}\,c)}{b\,(b+c)(b+2c)\ldots.(b+\overline{n-1}\,c)}$$

$$< \left\{\frac{a(a+1)(a+2)\ldots.(a+m-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots.(b+m-1)}\right\}^{\frac{1}{c}}$$

Wenn nun n, also auch m, ins Unendliche wächst, so nimmt das grössere der beiden obigen Produkte bis zur Gränze Null ab, weil in ihm a, b und m ganze positive Zahlen sind und $b > a$ ist (nach A). Dasselbe muss um so mehr mit dem kleineren Produkte der Fall sein, weil es wegen der positiven a, b und c nicht negativ werden kann. Wir haben also

$$\text{Lim}\,\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots.(a+\overline{n-1}c)}{b(b+c)(b+2c)\ldots.(b+\overline{n-1}c)} = 0\ ,\ b > a$$

oder auch

$$\text{Lim}\,\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)} = 0\ ,\ \beta > \alpha \qquad (5)$$

für alle rationalen positiven α und β. Da man irrationale Grössen so genau, als es nur verlangt wird, durch rationale Brüche darstellen kann, so darf man die Gültigkeit der Gleichung (5) auch für irrationale positive α und β behaupten; also gilt dieselbe überhaupt für alle positiven α und β, sobald nur $\alpha < \beta$ ist.

Nach der Bemerkung, welche wir früher über den Fall $\alpha > \beta$ machten, findet sich nun sehr leicht, dass das Produkt (2) für $\beta < \alpha$ mit n gleichzeitig über alle Gränze hinaus zunimmt.

Gehen wir jetzt in der identischen Gleichung (1) zur Gränze für unendlich wachsende n über, so wird:

$$0 = 1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta}\left\{1 + \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta+1)(\beta+2)} + \ldots.\right\},\ \beta > \alpha$$

und also die Reihe rechts convergent für $\beta > \alpha$; dagegen würde sie für $\beta < \alpha$ divergiren, weil dann die linke Seite der obigen Gleichung nicht angebbar ist. Eleganter sieht das gefundene Resultat in folgender Form aus:

$$\frac{\beta}{\beta-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta+1)(\beta+2)} + \ldots.\ ,\ \beta > \alpha,$$

oder wenn man $\beta - 1$ für β schreibt, wo nun $\beta - 1 > \alpha$ oder $\beta > \alpha + 1$ sein muss:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\beta-1}{\beta-\alpha-1}=1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\ldots.\\ \beta>\alpha+1.\end{array}\right\}\quad(6)$$

Dagegen divergirt die vorliegende Reihe für $\beta=\alpha+1$, weil sich dann ihre Glieder auf lauter Einheiten reduziren, und ebenso für $\beta<\alpha+1$, wo sie die Einheit beständig übersteigen.

Hieraus lässt sich nun sogleich wieder eine Convergenzregel ableiten, wenn man die Reihe in (6) für die früher mit t_0, t_1, t_2, ... bezeichnete nimmt. Es ist dann

$$t_n=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)},$$

$$t_{n-1}=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n)},$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{\alpha+n}{\beta+n}$$

und folglich wird die Reihe

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

convergiren, wenn von einer gewissen Stelle an der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{\alpha+n}{\beta+n}\qquad(7)$$

ist und bleibt, wobei aber noch $\beta>\alpha+1$ sein muss. Um diese zwei verschiedenen Bedingungen in eine einzige zusammenfassen zu können, schliessen wir weiter so: aus der vorigen Ungleichung folgt noch

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{\beta+n}{\alpha+n}.$$

und durch Subtraktion von 1 von beiden und Multiplikation mit n;

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n>\frac{n}{\alpha+n}(\beta-\alpha).$$

Je grösser n ist, desto grösser ist auch die rechte Seite dieser Ungleichung, weil der Bruch $\frac{n}{\alpha+n}$ mit n wächst; der grösste überhaupt mögliche Werth derselben ist der Gränzwerth für unendlich wachsende n, nämlich

$$\operatorname{Lim}\left[\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n\right]>\beta-\alpha,$$

und wenn diese Ungleichung erfüllt ist, so sind, wie man leicht sieht, auch die vorhergehenden erfüllt. Bemerkt man nun noch, dass wegen der Convergenz $\beta > \alpha + 1$ also $\beta - \alpha > 1$ ist, so erhält man den Satz:

Die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

welche nur positive Glieder enthält, convergirt, sobald die Bedingung

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] > 1 \tag{8}$$

erfüllt ist, dagegen divergirt sie, wenn der genannte Gränzwerth < 1 ist,

von dessen zweiter Hälfte man sich durch eine der vorigen völlig analoge Betrachtung überzeugen wird.

Um die Anwendung dieses Criteriums zu zeigen, wählen wir zunächst die am Ende des vorigen Paragraphen betrachtete Reihe für den Fall $x = 1$, in welchem das frühere Kennzeichen nichts entscheiden wollte; es ist dann

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{n\gamma + \gamma + n^2 + n}{\alpha\beta + \alpha n + \beta n + n^2},$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{(\gamma + 1 - \alpha - \beta)\, n + \gamma - \alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{n}{\alpha + n} \cdot \frac{(\gamma + 1 - \alpha - \beta)\, n + \gamma - \alpha\beta}{\beta + n}$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{\frac{\alpha}{n} + 1} \cdot \frac{\gamma + 1 - \alpha - \beta + \frac{\gamma - \alpha\beta}{n}}{\frac{\beta}{n} + 1}$$

folglich

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] = \gamma + 1 - \alpha - \beta,$$

und wenn diess mehr als 1 betragen soll, so muss $\gamma - \alpha - \beta$ positiv sein. Demnach convergirt die Reihe

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \dots \tag{9}$$

für $\gamma > \alpha + \beta$ und divergirt für $\gamma < \alpha + \beta$.

Wäre die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots. \quad (10)$$

gegeben, so ergiebt sich $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{1^\mu}$, $u_2 = \frac{1}{2^\mu}$ etc.,

$$u_n = \frac{1}{n^\mu}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^\mu},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu - 1\right\}.$$

Betrachtet man aber einen Ausdruck von der Form

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m,$$

worin z eine beliebige positive Grösse, m eine positive ganze Zahl ist, so übersieht man leicht mit Hülfe des Binomialtheoremes, dass er mit m zugleich wächst; das Nämliche gilt von dem Ausdrucke

$$\left(1 + \frac{px}{q}\right)^q$$

wenn p, q und x positiv sind für zunehmende q. Ist nun $q < p$, so kommt für $q = p$ mehr heraus, als für $q < p$, mithin

$$(1 + x)^p > (1 + \frac{px}{q})^q, \; p > q$$

und

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}} > 1 + \frac{p}{q}x$$

oder wenn $\frac{p}{q} = \mu$ gesetzt wird, wo nun $\mu > 1$ ist,

$$(1 + x)^\mu > 1 + \mu x, \; \mu > 1, \; x \text{ positiv};$$

folglich ist für $x = \frac{1}{n}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu > 1 + \frac{\mu}{n}$$

und hieraus erhält man

$$n\{(1 + \frac{1}{n})^\mu - 1\} > \mu, \text{ d. i. } > 1,$$

und folglich

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] > 1, \text{ für } \mu > 1.$$

Demnach convergirt die Reihe (10) für $\mu > 1$ und ebenso leicht würde man sich überzeugen, dass sie für $\mu < 1$ divergirt. Diess letztere ist auch noch der Fall für $\mu = 1$; denn schreibt man die Reihe in folgender Gestalt:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{32}\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

so ist der Inhalt der ersten Parenthese $>\frac{2}{4}$, d. i. $>\frac{1}{2}$, der der zweiten $>\frac{4}{8}$ oder $>\frac{1}{2}$, der Inhalt der dritten $>\frac{8}{16}$, d. i. $>\frac{1}{2}$, der der vierten $>\frac{16}{32}$ oder $>\frac{1}{2}$ u. s. f., folglich

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots,$$

woraus sogleich die Divergenz der fraglichen Reihe hervorgeht. Die Reihe (10) convergirt und divergirt also, je nachdem $\mu > 1$ oder $\mu \leqq 1$ ist.

§. 50.

Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Die Betrachtungen der vorigen beiden Paragraphen setzten voraus, dass sämmtliche Glieder der Reihe positiv seien; man kann sie aber auch mittelst eines sehr einfachen Kunstgriffes auf Reihen mit solchen Gliedern ausdehnen, die bald positiv bald negativ sind. Wäre nämlich

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots \qquad (1)$$

eine Reihe der Art, in welcher u_0, u_1, u_2, etc. an sich sämmtlich positiv sind, so ist klar, dass dieselbe convergiren muss, wenn diess mit der folgenden

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

der Fall ist, welche aus der in (1) stehenden dadurch hervorgeht, dass man die in jener vorkommenden Minuszeichen in Pluszeichen verwandelt. Denn wenn die Reihe $u_0 + u_1 + u_2$ etc. eine endliche Summe hat, so sind auch die Summen der Reihen

$$u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \ldots.$$
$$\text{und } u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \ldots.$$

endliche Grössen und folglich ist es auch ihre Differenz, die aber nichts Anderes ist, als die Summe der Reihe (1). Man kann daher von den früher entwickelten Kennzeichen, mittelst deren man die Convergenz oder Divergenz der Reihen mit nur positiven Gliedern entscheidet, auch für Reihen mit Gliedern von verschiedenen Vorzeichen Gebrauch machen, sobald man von den Vorzeichen der Glieder u_n und u_{n+1} abstrahirt, oder, was das Nämliche ist, sobald man die dort vorkommenden Quotienten

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ und } \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

immer als positiv ansieht.

Es giebt aber noch einen zweiten Fall, in welchem es leicht ist, die Convergenz oder Divergenz einer Reihe mit positiven und negativen Gliedern zu entscheiden. Findet nämlich in der gegebenen Reihe ein bloser Zeichenwechsel statt, so dass sie also von der Form

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots.$$

ist, und weiss man schon im Voraus, dass den absoluten Werthen nach

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 \;, \ldots.$$

und dass bei dieser beständigen Abnahme die Glieder kleiner als jede angebbare Zahl werden, so muss die Reihe nothwendig convergiren. Denn stellt man sie in den beiden folgenden Formen dar:

$$u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots. \qquad (2)$$
$$u_0 - \{(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots.\} \qquad (3)$$

so sind in no. (2) die Differenzen $u_2 - u_3$, $u_4 - u_5$ etc. sämmtlich positiv und folglich ist die Summe der Reihe

$$> u_0 - u_1.$$

Ebenso sind in no. (3) die Differenzen $u_1 - u_2$, $u_3 - u_4$ etc. positive

Grössen und folglich ist der ganze Inhalt der Parenthese ebenfalls positiv; demnach muss die Summe der Reihe

$$< u_0$$

sein. Die Summe der fraglichen Reihe ist also zwischen zwei positiven endlichen Grössen $u_0 - u_1$ und u_0 enthalten, folglich selbst eine endliche positive Grösse und mithin convergirt die gegebene Reihe.

Dieses Criterium ist oft sehr leicht anzuwenden, weil man in vielen Fällen den Reihengliedern ihre Abnahme unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit unmittelbar ansehen kann. So erkennt man z. B. die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

auf den ersten Blick als eine convergente, weil ihre Summe mehr als $u_0 - u_1 = 1 - \frac{1}{2}$ und weniger als $u_0 = 1$ beträgt.

§ 51.

Die wichtigsten numerischen Reihen.

Wir haben früher gesehen, dass die Gleichung

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0)$$

so lange besteht, als der Modulus von x unter dem kleinsten von denjenigen Modulis liegt, für welche irgend eine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc unendlich oder unstetig wird, und dass die Gültigkeit jener Gleichung aufhört, sobald der Modulus von x den gedachten Modulus übersteigt. Hierbei drängt sich nun noch die Frage auf, ob man nicht unter Umständen den Modulus von x noch jenem Modulus gleich nehmen dürfe, vorausgesetzt, dass das zugehörige Argument von x in diesem Falle einen gewissen erst noch zu bestimmenden Werth hat. Der Sinn dieser Frage wird sogleich deutlicher werden, wenn wir ein bestimmtes Beispiel betrachten. Nehmen wir etwa

$$F(x) = \frac{1}{e^x + 1}, \quad x = \varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

so wird $F(x)$ unstetig und unendlich für $\varrho = \pi$, $\tau = \frac{\pi}{2}$, weil man dann

$$\frac{1}{e^{\pi\sqrt{-1}}+1}=\frac{1}{-1+1}$$

erhält; die Gleichnng

$$\frac{1}{e^x+1}=A_0+A_1x+A_3x^3+\ldots.,$$

worin A_0, A_1, A_3 etc. zur Abkürzung dienen, gilt daher für jedes beliebige τ nur dann, wenn der Modulus ϱ von x weniger als π beträgt. Geben wir aber dem Argumente τ den speziellen Werth 0 und nehmen doch $\varrho=\pi$, so wird

$$F(x)=\frac{1}{e^\pi+1},$$

also noch nicht unstetig oder unendlich und es würde sich also fragen, ob die obige Gleichung nicht vielleicht noch für dieses System von ϱ und τ Bestand hat, wenn man auch ϱ nicht $>\pi$ nehmen darf. — Ebenso gilt die Gleichung

$$\operatorname{Arctan}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots.$$

nicht für $x>1$, weil

$$\frac{d\operatorname{Arctan}x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

für $x=\sqrt{-1}$ unendlich und unstetig wird, folglich der Modulus von $x<1$ bleiben muss: setzt man aber $x=1$, oder, was das Nämliche ist, $\varrho=1$, $\tau=0$, so bleiben $\operatorname{Arctan}x$ und $\frac{1}{1+x^2}$ noch endlich und stetig und es fragt sich daher wieder, ob die für $\operatorname{Arctan}x$ gefundene Reihe nicht noch für $x=1$ gilt.

Diese Frage lässt sich nun durch die folgende sehr einfache Betrachtung leicht beantworten. Es seien $F(x)$ und $\Phi(x)$ zwei stetige und endliche Funktionen, welche einander für $x<a$ identisch sind; dann hat man für jedes δ, wie klein dasselbe auch sein möge, $F(a-\delta)=\Phi(a-\delta)$. Bleiben nun beide Fuuktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ auch noch für $x=a$ stetig und endlich, so muss offenbar auch $F(a)=\Phi(a)$ sein, denn da die Gleichung $F(a-\delta)=\Phi(a-\delta)$ nicht zu gelten aufhört, wie klein auch δ sein möge, so könnte nur dann $F(a)$ nicht $=\Phi(a)$ sein, wenn eine dieser Funktionen für $x=a$ eine Unterbre-

chung der Stetigkeit erlitte oder für sich allein unendlich würde, was aber der Voraussetzung widerspricht. Man kann diesen Schluss, auf den hier Alles ankommt, auch geometrisch veranschaulichen. Denken wir uns nämlich $y = F(x)$ und $y = \Phi(x)$ als Gleichungen zweier Curven, so werden sich wegen $F(x) = \Phi(x)$ für $x < a$ diese letzteren decken bis dicht vor derjenigen Ordinate, welche $x = a$ entspricht. Sei in fig. 17. $OA = a$ und sowohl $F(a)$ als $\Phi(a)$ eine endliche Grösse, so giebt es nur zwei Fälle, in denen $F(a)$ nicht $= \Phi(a)$ zu sein braucht. Entweder nämlich decken sich zwar die Curven auf dem ganzen Laufe von M bis P und es wird hier eine der Funktionen diskontinuirlich, so dass etwa $F(a) = AP$, $\Phi(a) = AQ$ wäre; dann könnte man allerdings sagen: alle Punkte auf der Strecke MP gehören zwei Curven an, nur für $x = a$ ist diess nicht mehr der Fall, hier springen die Curven, die sich früher deckten, auseinander. Wird nun dieser Fall durch die Annahme ausgeschlossen, dass weder $F(x)$ noch $\Phi(x)$ für $x = a$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleide, so bleibt blos noch eine zweite Möglichkeit, nämlich die, dass sich die Curven irgend wo vorher etwa bei T schon getrennt hätten. Diess würde aber der Voraussetzung widersprechen, dass sich die Curven $y = F(x)$ und $y = \Phi(x)$ für jedes $x < a$ decken. Denn wenn OS die Abscisse ist, welche dem Trennungspunkte beider Curven entspricht, so nehme man zwischen S und A den Punkt R an und setze $OR = x$, so ist $x < a$ und folglich müssen sich die Curven der Voraussetzung nach decken; diess würde aber in der Zeichnung nicht der Fall sein, weil in ihr der Abscisse OR die beiden verschiedenen Ordinaten RU und RV entsprechen.

Der oben bewiesene Satz lässt sich nun mit der grössten Leichtigkeit für unsere Untersuchung benutzen, wenn für $F(x)$ die gegebene Funktion und für $\Phi(x)$ die Summe der Reihe

$$F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \dots$$

genommen wird. Ist nun schon $F(x)$ stetig und endlich für $x = a$, so muss diess noch mit $\Phi(a)$ der Fall sein, wenn $F(a) = \Phi(a)$ werden soll. Endlichkeit von $\Phi(a)$ ist aber nichts Anderes als Convergenz der vorstehenden Reihe; ist diese vorhanden, so bleibt $\Phi(x)$ auch stetig für $x = a$; denn im Falle des Gegentheiles müsste $\Phi(a)$ zwei Werthe haben: $\operatorname{Lim} \Phi(a - \delta)$ und $\operatorname{Lim} \Phi(a + \delta)$, was aber nicht möglich ist,

weil $\Phi(a)$ die Summe einer convergenten Reihe ist und eine solche Summe nur einen einzigen Werth haben kann.

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich daraus das folgende Theorem:

Entwickelt man eine Funktion $F(x)$ nach dem Mac Laurinschen Theoreme in die Reihe

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \dots$$

und setzt ganz allgemein

$$x = \varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

so besteht die obige Gleichung unter folgenden Bedingungen: ist r der kleinste unter den Modulis, für welche irgend eine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. aufhört stetig und endlich zu sein, so nimmt man entweder $\varrho < r$ und dann ist τ ganz beliebig, oder $\varrho = r$ und wählt τ so, dass $F(x)$ für dieses System von Werthen noch stetig und endlich bleibt, zugleich aber die Reihe noch convergirt. Für $\varrho > r$ gilt die Funktion der Reihe nicht mehr gleich.

Im ersten Falle also kennt man a priori die Convergenz der Mac Laurin'schen Reihe, im zweiten muss man dieselbe a posteriori erst entscheiden, wozu die in den beiden vorigen Paragraphen entwickelten Regeln dienen. Wir wollen diess auf einige Beispiele anwenden.

I. Die Binomialformel

$$\left.\begin{aligned}&(1+x)^\mu\\ &= 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \dots\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

gilt, wie wir bereits wissen, so lange, als der Modulus von x, d. h. bei reellen x der absolute Werth von x, unter der Einheit liegt; es entsteht daher noch die Frage, wie weit dieselbe für $x = +1$ oder $x = -1$ gilt. Diess giebt folgende Untersuchung.

1. Für $x = +1$ wird die fragliche Reihe:

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \dots \quad (2)$$

und die linke Seite bleibt bei beliebigen μ immer noch eine endliche und stetige Funktion für $x = +1$; damit also noch eine Gleichung

zwischen beiden bestehe, ist blos noch Convergenz der Reihe (2) nöthig. Diese entscheidet sich leicht, wenn man die Fälle eines positiven oder negativen μ besonders betrachtet.

Für ein positives μ nämlich giebt es immer zwei ganze positive Zahlen $m-1$ und m, zwischen denen μ enthalten ist, so dass $\mu-(m-1)$ noch positiv ausfällt, dagegen $\mu-m$ negativ wird. Betrachten wir nun das $m$te, $(m+1)$te, $(m+2)$te u. s. f. Glied der Reihe (2) nämlich

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m+1)(\mu-m)}{1.2.3\ldots m(m+1)},$$

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m+1)(\mu-m)(\mu-m-1)}{1.2.3\ldots m(m+1)(m+2)},$$

u. s. w.

so ist das erste derselben noch positiv, das zweite negativ, weil es den negativen Faktor $\mu-m$ enthält, das dritte positiv wegen der zwei negativen Faktoren $\mu-m$, $\mu-(m-1)$, das vierte würde durch seine drei negativen Faktoren wieder negativ werden u. s. f. Man kann also die Reihe (2) in folgender Form darstellen:

$$1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}+\ldots.+\frac{\mu(\mu-1)(m-\mu+1)}{1.2\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+1)}{1.2..\,m}\left\{1-\frac{m-\mu}{m+1}+\frac{(m-\mu)(m-\mu+1)}{(m+1)(m+2)}-\ldots\right\} \quad (3)$$

und in dieser erkennt man leicht die Convergenz der eingeklammerten Reihe. Da nämlich Grössen von der Form

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)},\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)},\ \ldots$$

eine bis zur Null hin abnehmende Reihe bilden; sobald nur $\beta > \alpha$ ist, so folgt für $\beta = m+1$, $\alpha = m-\mu$, dass die Glieder der oben in Parenthese stehenden Reihe unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabkommen, wenn man nur weit genug geht. Die Reihe in (3) d. h. die in (2) convergirt demnach für jedes positive μ.

Wäre dagegen μ negativ etwa $\mu=-\nu$, so geht die Reihe (2) in die folgende über:

$$1-\frac{\nu}{1}+\frac{\nu(\nu+1)}{1.2}-\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}+\ldots.$$

und da hier Zeichenwechsel stattfindet, so ist zur Convergenz nur noch unbegränzte Abnahme der Glieder nöthig. Diese ist nach dem so eben angeführten Satze nur für $1>\nu$ möglich, während für $\nu \geqq 1$ eine Divergenz der vorstehenden Reihe eintreten würde. Es muss also $\nu<1$ d. i. $-\mu<1$ oder $\mu>-1$ sein. Die Reihe (2) convergirt demnach unter der Bedingung $\infty>\mu>-1$.

2. Für $x=-1$ bleibt die Funktion $(1+x)^\mu$ nur dann stetig und endlich, wenn μ positiv ist; wir müssen also den Fall negativer μ gleich ausschliessen. Die Reihe geht über in:

$$-\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}+\ldots, \tag{4}$$

und wenn wie früher μ zwischen $m-1$ und m enthalten ist, so kann man dafür schreiben:

$$1-\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+2)}{1.2\ldots(m-1)}$$

$$+(-1)^m\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+1)}{1.2\ldots m}\left\{1+\frac{m-\mu}{m+1}+\frac{(m-\mu)(m-\mu+1)}{(m+1)(m+2)}+\ldots\right\} \tag{5}$$

indem man eine der vorigen ganz analoge Betrachtung anwendet. Die hier eingeklammerte Reihe convergirt aber, denn wenn man sie mit der folgenden

$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\ldots,\ \beta>\alpha+1$$

vergleicht, so findet man, dass die Bedingung $\beta>\alpha+1$ erfüllt ist, mithin convergirt auch die Reihe (5) d. h. die in no. (4). Wollte man dagegen in no. (4) $\mu=-\nu$ setzen, so würde man finden, dass die entstehende Reihe für jedes ν divergirt, was sich auch im Voraus erwarten liess.

Fassen wir nun die unter 1. und 2. gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich Folgendes: die Gleichung

$$(1+x)^\mu$$

$$=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3\ldots.$$

gilt so lange $1 > x > -1$ ist für jedes μ; nimmt man aber $x = +1$, so muss $\infty > \mu > -1$ und für $x = -1$, $\infty > \mu \geqq 0$ sein.

Ganz ebenso kann man mit den allgemeineren Reihen (7) und (8) in §. 42. verfahren, worin $\varrho < 1$ sein muss. Für $\varrho = 1$ gehen die Funktionen auf der linken Seite über in

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^{\mu}\cos(\mu \operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau)),$$

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^{\mu}\sin(\mu \operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau)),$$

welche stetig und endlich bleiben für alle μ, so lange $\tau < \pi$ ist. Denn für $\tau = \pi$ also $\frac{1}{2}\tau = \frac{\pi}{2}$ ändert sich $\tan\frac{1}{2}\tau$ unstetig, indem hier die beiden Werthe $\operatorname{Lim}\tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = +\infty$ und $\operatorname{Lim}\tan(\frac{\pi}{2} + \delta) = -\infty$ eintreten; demnach hat $\operatorname{Arctan}(\tan\frac{\pi}{2})$ die beiden Werthe $\operatorname{Arctan}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$ und $\operatorname{Arctan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, und folglich werden die beiden obigen Funktionen für $\tau = \pi$ unstetig; dagegen bleiben sie für $\pi > \tau > -\pi$ immer stetig und endlich, weil der erste Faktor selbst für negative μ unter der angegebenen Bedingung nicht unendlich wird. Was nun noch die Reihen

$$1 + \frac{\mu}{1}\cos\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos 2\tau + \ldots.$$

und

$$\frac{\mu}{1}\sin\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\sin 2\tau + \ldots.$$

anbetrifft, so ist klar, dass dieselben convergiren müssen, wenn die folgende

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \ldots$$

convergirt, was für $\infty > \mu > -1$ der Fall ist. Berücksichtigt man noch, dass für $\pi > \tau > -\pi$, $\operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau) = \frac{1}{2}\tau$ ist, so ergiebt sich jetzt

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^{\mu}\cos\frac{\mu}{2}\tau$$

$$= 1 + \frac{\mu}{1}\cos\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos 2\tau + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos 3\tau + \ldots$$

$$(2\cos\frac{1}{2}\tau)^\mu \sin\frac{\mu}{2}\tau$$

$$= \frac{\mu}{1}\sin\tau + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\sin 2\tau + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\sin 3\tau + \ldots$$

$$\infty > \mu > -1\,,\ \pi > \tau > -\pi.$$

Was für unrichtige Resultate für $\tau > \pi$ herauskommen, kann man leicht an einzelnen Beispielen sehen. So gäbe die zweite Gleichung für $\tau = 2\pi$,

$$(-2)^\mu \sin\mu\pi = 0,$$

was ganz falsch ist, da μ u. A. einen beliebigen ächten Bruch bedeuten kann.

II. In den Gleichungen (9) und (10) des §. 42., welche für $\varrho < 1$ gelten, stehen für $\varrho = 1$ auf der linken Seite die Funktionen

$$\frac{1}{2}l(2\cos\frac{1}{2}\tau)^2 \text{ und } \operatorname{Arctan}(\tan\frac{1}{2}\tau),$$

die für $\pi > \tau > -\pi$ stetig und endlich bleiben, während für $\tau = \pi$ die erste unendlich und die zweite unstetig wird. Da ferner leicht erhellt, dass die Reihen

$$\frac{1}{1}\cos\tau - \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{3}\cos 3\tau - \ldots$$

und

$$\frac{1}{1}\sin\tau - \frac{1}{2}\sin 2\tau + \frac{1}{3}\sin 3\tau - \ldots$$

immer convergiren, so ergiebt sich jetzt

$$l(2\cos\frac{1}{2}\tau) = \frac{1}{1}\cos\tau - \frac{1}{2}\cos 2\tau + \frac{1}{3}\cos 3\tau - \ldots$$

$$\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{1}\sin\tau - \frac{1}{2}\sin 2\tau + \frac{1}{3}\sin 3\tau - \ldots$$

$$\pi > \tau > -\pi.$$

Für $\tau = \frac{\pi}{2}$ erhält man aus der zweiten Reihe das bemerkenswerthe Resultat

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

auf welches wir gleich nachher zurückkommen werden.

III. Berücksichtigt man, dass die Funktion Arcsin$x$ für $x=1$ noch stetig und endlich, zugleich auch die Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

für den nämlichen Werth von x noch convergent bleibt*), so erkennt man, dass die Gleichung (1) in §. 46. noch für $x=1$ Bestand hat; diess giebt eine Reihe zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl nämlich:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots$$

die aber ihrer schwachen Convergenz wegen nur eine sehr langsame Annäherung darbietet.

IV. Da die Funktion Arctan$x$ für $x=1$ noch stetig und endlich bleibt und die Reihe

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

für $x=1$ noch convergirt, so hat man gemäss der Formel (4) in §. 46.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

oder auch durch Vereinigung zweier Glieder

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots$$

---

*) Es ist nämlich durch Vergleichung mit $u_0+u_1+u_2+$ etc.,

$$u_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1},\quad u_{n+1}=\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\cdot\frac{1}{2n+3}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1=\frac{6n+5}{(2n+1)^2},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{6n+5}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{6+\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}},$$

$$\text{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2}=\frac{3}{2}>1$$

und folglich nach §. 49. die Reihe eine convergente.

Aber auch diese Reihe convergirt für die praktische Berechnung viel zu langsam; denn bezeichnen wir die Glieder der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3 etc., so ist

$$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$$

und wenn man also so weit gehen wollte, dass u_n keinen Einfluss auf die 7te Dezimalstelle haben sollte, so müsste $u^n < \frac{1}{10^7}$ sein oder

$$(4n-3)(4n-1) > 10^7.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Ungleichung findet man $n > 750$, so dass also über 750 Glieder zu addiren wären, wenn man $\frac{\pi}{8}$ nur auf 7 Dezimalen berechnen wollte.

Besser kommt man dagegen mit Hülfe der Formel (6) in §. 46. zum Ziele, wenn man nämlich die beliebigen Brüche α und β so wählt, dass

$$\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = 1 \text{ mithin } \operatorname{Arctan} \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{\pi}{4}$$

ist. Diess kann sehr leicht geschehen, wenn man die erste dieser Gleichungen nach β auflöst, wodurch

$$\beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

wird und folglich β immer ächt gebrochen ausfällt, sobald man $\alpha < 1$ nimmt. So ergiebt sich z. B. für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$ und mithin vermöge der Formel (6)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \dots$$
$$+ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \dots,$$

wonach die Berechnung von π sehr leicht ist.

§. 52.

Das Theorem von Taylor für Funktionen mehrerer Variablen.

So wie am Ende des §. 35. das Taylorsche Theorem aus den Mac Laurinschen abgeleitet wurde, so ist es auch sehr leicht, die Bedingungen, unter welchen jenes besteht, aus denen zu entwickeln, welche für die Gültigkeit dieses letzteren hinreichend und nothwendig sind. Man wird sich nämlich sehr leicht überzeugen, dass wenn r den Modulus von x, ϱ den von h und r_1 den kleinsten der Moduli bezeichnet, für welche irgend eine der Funktionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ etc. unstetig oder unendlich wird, der Modulus von h zwischen denen von r und r_1 liegen muss, wenn die Gleichung

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\dots$$

gelten soll. — Es ist auch nicht schwer, diese Gleichung auf Funktionen mehrerer Variablen auszudehnen. Sehen wir z. B. in der Funktion $F(x,y)$ vorerst y als constant an, so können wir nach dem Obigen

$$F(x+h,y)=F(x,y)+\frac{h}{1}\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\dots$$

setzen, wobei sämmtliche Differenzialquotienten partielle sind. Lassen wir jetzt y um k wachsen, so ist auf jedes Glied der rechten Seite der Taylorsche Satz selbst wieder anwendbar, wodurch man unter der Bemerkung, dass überhaupt

$$\frac{d^m\left\{\frac{d^nF(x,y)}{dx^n}\right\}}{dy^m}=\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dy^m\,dx^n}$$

ist, sehr leicht die folgende Gleichung erhält:

$$\begin{aligned}F(x+h,y+k)=F(x,y)&+\frac{k}{1}\frac{dF(x,y)}{dy}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}+\dots\\&+\frac{h}{1}\left\{\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{k}{1}\frac{d^2F(x,y)}{dy\,dx}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^3F(x,y)}{dy^2\,dx}+\dots\right\}\\&+\frac{h^2}{1.2}\left\{\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\frac{k}{1}\frac{d^3F(x,y)}{dy\,dx^2}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^4F(x,y)}{dy^2\,dx^2}+\dots\right\}\\&+\dots\dots\dots\dots,\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Nimmt man hier die Glieder diagonalweis zusammen, so ergiebt sich auch

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+\frac{h}{1}\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{k}{1}\frac{dF(x,y)}{dy}$$
$$+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\frac{h}{1}\frac{k}{1}\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}+\frac{k^2}{1.2}\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}$$
$$+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3F(x,y)}{dx^3}+\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1}\frac{d^3F(x,y)}{dx^2dy}+\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2}\frac{d^3F(x,y)}{dx\,dy^2}+\frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^3F(x,y)}{dy^3}.$$

Bezeichnet man die einzelnen Horizontalreihen kurz mit u_1, u_2, u_3 etc., setzt also

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+u_1+u_2+u_3+\dots$$

so ist überhaupt für ein ganzes positives n

$$u_n=\frac{h^n}{1.2..n}\frac{d^nF(x,y)}{dx^n}+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}\frac{k}{1}\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy}$$
$$+\frac{h^{n-2}}{1.2..(n-2)}\frac{k^2}{1.2}\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-2}dy^2}+\dots+\frac{k^n}{1.2..n}\frac{d^nF(x,y)}{dy^n}.$$

Denkt man sich auf der rechten Seite als gemeinschaftlichen Faktor die Grösse

$$\frac{1}{1.2.3..(n-1)n}$$

abgesondert, so erhalten die in der so herbeigeführten Parenthese stehenden Differentialquotienten die folgenden Coefficienten

$$1,\ \frac{n}{1}=n_1,\ \frac{n(n-1)}{1.2}=n_2,\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=n_3,\ \text{etc.}$$

und folglich ist

$$u_n=\frac{1}{1.2..n}\left\{\frac{d^nF(x,y)}{dx^n}h^n+n_1\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k+n_2\frac{d^nF(x,y)}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2+\dots\right\}$$

und mithin nach dem früheren

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+\frac{1}{1}\left\{\frac{dF(x,y)}{dx}h+\frac{dF(x,y)}{dy}k\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}h^2+2\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}hk+\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}k^2\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3F(x,y)}{dx^3}h^3+3\frac{d^3F(x,y)}{dx^2dy}h^2k+3\frac{d^3F(x,y)}{dx\,dy^2}hk^2+\frac{d^3F(x,y)}{dy^3}k^3\right\}$$

und hier muss nun die Funktion $F(x,y)$ in Bezug auf x sowohl als auf y die Bedingungen erfüllen, welche früher blos in Beziehung auf x allein nöthig waren.

In ganz ähnlicher Weise liesse sich das Taylorsche Theorem auch auf Funktionen von drei, vier etc. Variabelen ausdehnen, doch sind alle diese Formeln wegen ihrer complizirten Gestalt nur von beschränkter Anwendung.

Cap. IX. Das Theorem von Lagrange.

§. 53.

Kennzeichen für die Entwickelbarkeit impliziter Funktionen.

Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin setzen voraus, dass die Funktion $F(x)$ oder $F(x+h)$, welche in eine Reihe verwandelt werden soll, eine völlig bekannte oder entwickelte (explizite) sei und zeigen in diesem Falle die zur Entwickelung nöthigen Rechnungsoperationen; aber eben diese Operationen würden sich, wenigstens unmittelbar, gar nicht ausführen lassen, wenn die zu entwickelnde Funktion ihrer Form nach unbekannt und nur eine Bedingungsgleichung gegeben wäre, welche dieselbe erfüllen soll. Es entsteht daher die Frage, durch welche Mittel eine solche implizite Funktion einer Variabelen in eine Reihe, welche nach steigenden Potenzen der letzteren fortschreitet, verwandelt werden könnte. Denken wir uns z. B. zwischen den Grössen x und y eine Gleichung wie

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

gegeben, so ist offenbar y eine gewisse erst noch zu entwickelnde Funktion von x etwa $y = \varphi(x)$, die sich vielleicht auch in eine Reihe von der Form

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots$$

verwandeln liesse; es würde nur darauf ankommen, die Grössen A, B, C etc. zu bestimmen. Noch allgemeiner wird die Aufgabe, wenn man nicht y selbst, sondern eine gegebene Funktion $F(y) = F[\varphi(x)]$ verwandelt wissen wollte. Der zunächst liegende Gedanke wäre nun, die Gleichung (1) vorerst aufzulösen und auf die so entwickelte Funktion $y = \varphi(x)$ das Mac Laurinsche Theorem anzuwenden, aber diess ist auch gerade der nur selten verfolgbare Weg, weil die allgemeine Auflösung eben jener Gleichung ganz unmöglich wird, sobald darin x und

y als höhere Potenzen oder in nicht algebraischer Form erscheinen. Man muss sich daher nach einer von dieser Schwierigkeit freien Methode umsehen, und wenn sich eine solche finden lässt, so hat man darin umgekehrt ein Mittel, um dergleichen unauflösbare Gleichungen wie (1) durch Reihen aufzulösen, in so fern man nämlich wenigstens eine ihrer Wurzeln in eine Reihe verwandeln kann. Bevor wir uns aber nach einer solchen Methode umsehen, müssen wir zuerst die Bedingungen aufsuchen, unter welchen das Problem selbst nur überhaupt lösbar ist und hierzu dienen die folgenden Betrachtungen.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, es sei

$$\Phi(x,y) = y - xf(y) = 0 \tag{2}$$

und darin $f(y)$ eine bekannte (explizite) Funktion von y allein, welche für $y=0$ weder Null noch unendlich gross wird und auch immer stetig bleibt. Obgleich man nun nicht weiss, welche Form hier y als Funktion von x gedacht haben wird, so ist es doch nicht schwer, die successiven Differentialquotienten von y in Bezug auf x zu entwickeln; durch Anwendung des Satzes:

$$\text{für } \Phi(x,y) = 0 \text{ ist } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\Phi(x,y)}{dx}}{\frac{d\Phi(x,y)}{dy}}$$

erhält man nämlich in unserem Falle sehr leicht

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f(y)}{1 - xf'(x)}. \tag{3}$$

Differenzirt man diess mehrmals nach x, so findet man für $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. Brüche, deren Zähler theils x, theils $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$ etc. enthalten und deren Nenner aus ganzen Potenzen von $1-xf'(y)$ bestehen. Sind nun $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$ etc. durchweg stetige Funktionen von y (oder x), so ändern sich auch jene Zähler und Nenner stetig; wenn aber die Quotienten keine Unterbrechung der Continuität erleiden oder unendlich werden sollen, so darf keiner der Nenner in Null übergehen, was für

$$1 - xf'(y) = 0 \tag{4}$$

der Fall sein würde. Nennen wir ξ_0, ξ_1, etc. die nach ihrer Grösse aufsteigend geordneten Werthe von x, welche den Bedingungen (2) und

(4) gleichzeitig genügen, so ist klar, dass die Differenz $1 - xf'(y)$ von Null verschieden bleibt, wenn $x < \xi_0$, oder $> \xi_0$ und $< \xi_1$, oder $> \xi_1$ und $< \xi_2$ etc. ist. Aus diesem Allen zusammen folgt nun, dass die Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots.$$

stetig und endlich bleiben, wenn

$$x < \xi_0 \text{ oder } \xi_0 < x < \xi_1 \text{ oder } \xi_1 < x < \xi_2 \text{ etc.}$$

ist. Das Nämliche findet auch mit der Funktion y selbst statt, weil aus der Stetigkeit und Endlichkeit von $\frac{dy}{dx}$ die von y folgt.

Unter den Wurzeln der Gleichung (2) d. h. unter den verschiedenen Funktionen $y = \varphi(x)$, welche derselben genügen können, giebt es nun offenbar eine, welche mit x zugleich verschwindet, und diese möge die kleinste heissen; lassen wir daher x das Intervall $x = 0$ bis $x = \xi_0$ durchlaufen, so bleiben innerhalb desselben die Funktionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. stetig und endlich und folglich lässt sich die kleinste Wurzel y in eine nach steigenden Potenzen von x fortgehende Reihe verwandeln, sobald der Modulus von x weniger als der von ξ_0 beträgt. Die Grösse ξ ist aber nicht schwer zu finden, weil sie den Gleichungen (2) und (4) zugleich genügen muss; man hat nämlich:

$$x = \frac{f(y)}{y} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{f'(y)} \tag{5}$$

folglich durch Elimination von x

$$f(y) = yf'(y). \tag{6}$$

Die letzte Gleichung enthält nur y und ist also eine blos numerische; aus ihr erhält man für y gewisse Werthe (Wurzeln), die wir mit η_0 η_1, η_2, ... bezeichnen. Die Gleichungen (5) geben dann ebensoviel Werthe für x, die ξ_0, ξ_1, etc. heissen mögen, wenn sie so geordnet sind, dass $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$ etc. ist.

Um das Vorhergehende – den Grundpfeiler der ganzen Untersuchung – an einem Beispiele zu erläutern, sei $f(y) = \frac{1}{2}y^2 + y + 1$ also diejenige Funktion y in eine Reihe zu verwandeln, welche der Gleichung

$$y - x\left(\frac{1}{2}y^2 + y + 1\right) = 0 \qquad (7)$$

Genüge leistet. Hier hat man zur Bestimmung der η gemäss Formel (6)

$$\frac{1}{2}y^2 + y + 1 = y(y+1),$$

woraus für y die beiden Werthe

$$\eta_0 = +\sqrt{2}\ ,\ \eta_1 = -\sqrt{2}$$

folgen. Da nun nach no. (5) $x = \frac{1}{y+1}$ sein muss, so erhalten wir für x die Werthe

$$\xi_0 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1\ ,\ \xi_1 = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1).$$

Da nun hier der Modulus (absolute Werth) von ξ_0 weniger als der von ξ_1 beträgt, so ist die kleinste Wurzel der Gleichung (7) für diejenigen x in eine Reihe verwandelbar, deren Modulus $< \sqrt{2}-1$ ist. Diess lässt sich auch leicht direkt nachweisen; aus (7) folgt nämlich

$$y = \frac{1-x \pm \sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

Die kleinere Wurzel ist hier

$$y = \frac{1-x - \sqrt{1-2x-x^2}}{x},$$

von welcher man leicht nachweisen kann, dass sie für $x=0$ sich annullirt. Will man nun auf die Quadratwurzel im Zähler die Formel

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2.4}z^2 - \frac{1.3}{2.4.6}z^3 - \ldots$$
$$1 > z > -1$$

anwenden, so muss der absolute Werth von $2x + x^2$ weniger als 1 betragen, woraus wieder $x < \sqrt{2}-1$ folgt wie oben.

Nennen wir jetzt y' die kleinste Wurzel der Gleichung

$$y - xf(y) = 0,$$

so können wir setzen

$$y - xf(y) = (y-y')\,\psi(y), \qquad (8)$$

wo $\psi(y)$ eine neue Funktion von y bedeutet, von der wir zwar nicht

die Form, aber wenigstens einige Eigenschaften angeben können. Denken wir uns nämlich in der vorstehenden Gleichung y als willkührliche Veränderliche, so erhellt auf der Stelle, dass wegen der Continuität und Endlichkeit von $f(y)$ die Funktion

$$\psi(y) = \frac{y - xf(y)}{y - y'}$$

weder unstetig noch unendlich wird, so lange y von y' verschieden bleibt, und das Nämliche gilt von den Differenzialquotienten derselben; ebenso leicht überzeugt man sich, dass für $y=0$ die fragliche Funktion weder verschwindet noch unendlich wird. Nimmt man ferner die Logarithmen der Gleichung (8), nachdem man sie in folgender Form

$$1 - x\frac{f(y)}{y} = (1 - \frac{y'}{y})\,\psi(y)$$

geschrieben hat, so ergiebt sich leicht

$$-\,l\,[1 - x\frac{f(y)}{y}] = -\,l\,(1 - \frac{y'}{y}) - l\psi(y), \qquad (9)$$

und da $\psi(y)$ für $y = 0$ weder Null noch unendlich wurde, so wird $l\psi(y)$ für $y = 0$ nicht unendlich und bleibt wegen der Stetigkeit von $\psi(y)$, $\psi'(y)$, $\psi''(y)$, etc. ebenfalls sammt seinen Differenzialquotienten stetig. Hieraus folgt, dass $l\psi(y)$ sich in eine Reihe von der Form

$$l\psi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots \qquad (10)$$

verwandeln lassen muss, wenigstens innerhalb eines gewissen Intervalles für y. Da ferner in (9) y' die mit x gleichzeitig verschwindende Wurzel der Gleichung $y - xf(y) = 0$ bedeutet, während die anderen Wurzeln y für $x = 0$ im Allgemeinen nicht verschwinden, so nähert sich der Quotient $\frac{y'}{y}$ für abnehmende x der Gränze Null, woraus folgt, dass wenigstens innerhalb eines kleinen Intervalles (in Bezug auf x) $y > y'$ sein muss, so dass also die Gleichung

$$-\,l\,(1 - \frac{y'}{y}) = \frac{1}{1}\frac{y'}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{y}\right)^3 + \cdots$$

gilt. Es wird also nach no. (10)

$$-\,l\,[1 - x\frac{f(y)}{y}] = \frac{1}{1}\frac{y'}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y'}{y}\right)^3 + \cdots$$
$$+ [b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots] \qquad (11)$$

Auf der rechten Seite lässt sich nun y' (aber nicht y) unter gewissen Bedingungen, die wir vorhin kennen lernten, in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, und das Nämliche gilt auch von y'^2, y'^3 etc., weil diese letzteren Funktionen unter den nämlichen Bedingungen stetig und endlich bleiben wie y'. Denkt man sich diese Verwandlungen ausgeführt und hieraus diejenigen Glieder zusammengenommen, die gleiche Potenzen von x zu Faktoren haben, so folgt, dass die rechte Seite der Gleichung (11) in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt werden kann, wobei die Coeffizienten dieser Potenzen theils positive theils negative Potenzen von y enthalten. Was aber von der einen Seite einer identischen Gleichung gilt, muss auch von der anderen gelten und mithin muss sich auch die linke Seite der Gleichung (11) in eine gleiche Reihe entwickeln lassen, wobei das folgende Resultat zum Vorschein kommt:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{y'}{1}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y'^2}{2}+\frac{1}{y^3}\cdot\frac{y'^3}{3}+\ldots$$
$$-\left[b_0+b_1 y+b_2 y^2+\ldots\right]$$
$$=\frac{x}{1}\frac{f(y)}{y}+\frac{x^2}{2}\left[\frac{f(y)}{y}\right]^2+\frac{x^3}{3}\left[\frac{f(y)}{y}\right]+\ldots, \qquad (12)$$

in welchem nur die Anordnung die umgekehrte ist.

§. 54.

Reihenentwickelung für implizite Funktionen.

Da die Funktion $f(y)$ nebst ihren Differenzialquotienten als stetig und endlich vorausgesetzt wurde, so ist auf dieselbe das Mac Laurin'sche Theorem anwendbar, und das Nämliche gilt vom $[f(y)]^2$, $[f(y)]^3$ etc. Bezeichnen wir zur Abkürzung $f(y)$ mit Y und mit $(D^n Y)_{(0)}$ den Werth, welchen $\frac{d^n f(y)}{dy^n}$ bekommt, sobald man nach geschehener Differenziation $y=0$ setzt, so gelten jetzt die Gleichungen:

$$f(y)=Y_{(0)}+\frac{y}{1}(DY)_{(0)}+\frac{y^2}{1.2}(D^2Y)_{(0)}+\frac{y^3}{1.2.3}(D^3Y)_{(0)}+\ldots,$$
$$[f(y)]^2=Y^2_{(0)}+\frac{y}{1}(DY^2)_{(0)}+\frac{y^2}{1.2}(D^2Y^2)_{(0)}+\frac{y^3}{1.2.3}(D^3Y^2)_{(0)}+\ldots,$$
$$[f(y)]^3=Y^3_{(0)}+\frac{y}{1}(DY^3)_{(0)}+\frac{y^2}{1.2}(D^2Y^3)_{(0)}+\frac{y^3}{1.2.3}(D^3Y^3)_{(0)}+\ldots$$

u. s. f.,

und wenn wir diese Werthe in die Gleichung (12) substituiren und darauf Alles nach Potenzen von y ordnen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y}\cdot\frac{y'}{1}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y'}{2}+\frac{1}{y^3}\cdot\frac{y'^3}{3}+\ldots\\
&-[b_0+b_1y+b_2y^2+\ldots\ldots\\
=&\frac{1}{y}\left\{\frac{x}{1}Y_{(0)}+\frac{x^2}{1.2}(DY^2)_{(0)}+\frac{x^2}{1.2.3}(D^2Y^3)_{(0)}+\ldots\right\}\\
&+\frac{1}{y^2}\left\{\frac{x^2}{2}Y^2{}_{(0)}+\frac{x^3}{1.3}(DY^3)_{(0)}+\ldots\right\}\\
&+\frac{1}{y^3}\left\{\frac{x^3}{3}Y^3{}_{(0)}+\ldots\ldots\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{x}{1^2}(DY)_{(0)}+\frac{x^2}{1.2^2}(D^2Y^2)_{(0)}+\frac{x^3}{1.2.3^2}(D^3Y^3)_{(0)}+\ldots\\
&+y\left\{\frac{x}{1^2.2}(D^2Y)_{(0)}+\frac{x^2}{1.2^2.3}(D^3Y^2)_{(0)}+\ldots\right\}\\
&+y^2\left\{\frac{x}{1^2.2.3}(D^3Y)_{(0)}+\ldots\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aus der Bemerkung nun, dass die Coeffizienten gleicher Potenzen von y einander gleich sein müssen, ergeben sich jetzt eine Menge von Gleichungen, welche theils zur Kenntniss von y', y'^2, y'^3 etc., theils zu der von b_0, b_1, b_2 etc. führen. Das Letztere ist hier weniger wesentlich, dagegen ist die Gleichung, welche sich durch Vergleichung der Coeffizienten von $\frac{1}{y^2}$ ergiebt, nämlich

$$y'=\frac{x}{1}Y_{(0)}+\frac{x^2}{1.2}(DY^2)_{(0)}+\frac{x^3}{1.2.3}(D^2Y^3)_{(0)}+\ldots\quad(1)$$

von hauptsächlichem Werthe, denn sie enthält geradezu die Auflösung unserer Aufgabe, die kleinste Wurzel y' der Gleichung $y-xf(y)=0$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln. Die Bedingungen, unter welchen die obige Formel richtig bleibt, bestehen, wie wir bereits wissen, darin, dass $f(y)=Y$, $f'(y)=DY$, etc. stetige und endliche Funktionen von y sind, deren erste für $y=0$ nicht verschwindet, und dass endlich der Modulus von x kleiner als der Modulus des kleinsten x ist, welches man durch Auflösung der Gleichungen

$$f(y) = yf'(y)\ ,\ x = \frac{1}{f'(y)} = \frac{y}{f(y)} \qquad (2)$$

erhält. — Wir wollen diess zunächst durch einige Beispiele erläutern.

I. Für $Y = f(y) = e^y$ wird

$$D^{n-1} Y^n = D^{n-1} e^{ny} = n^{n-1} e^{ny},$$
$$(D^{n-1} Y^n)_{(0)} = n^{n-1}.$$

Die kleinste Wurzel der Gleichung $y - xe^y = 0$ ist also:

$$y' = \frac{1^0 x}{1} + \frac{2^1 x^2}{1.2} + \frac{3^2 x^3}{1.2.3} + \dots \qquad (3)$$

Die Gleichungen (2) sind hier

$$e^y = ye^y\ ,\ x = \frac{1}{e^y}$$

d. i. $y = 1\ ,\ x = \frac{1}{e}$. Die Formel (3) gilt demnach nur so lange, als der Modulus von x weniger als $\frac{1}{e}$ beträgt. Diess kann man auch leicht auf anderem Wege einsehen. Um nämlich die Convergenz der Reihe zu beurtheilen, hat man

$$u_n = \frac{n^{n-1} x^n}{1.2..n}\ ,\ u_{n+1} = \frac{(n+1)^n\, x^{n+1}}{1.2\dots(n+1)},$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{x}{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^n \frac{n}{n+1}\, x;$$

folglich

$$\text{Lim}\, \frac{u_{n+1}}{u_n} = ex,$$

und wenn diess <1 sein soll, so folgt $x < \frac{1}{e}$ wie vorhin; für $x \geqq \frac{1}{e}$ dagegen divergirt die Reihe und gilt dann der Funktion y' nicht mehr gleich.

II. Für $Y = f(y) = \cos y$ findet sich $D^{n-1} \cos^n y$ auf folgende Weise.

Wegen

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}\ ,\ i = \sqrt{-1}$$

hat man

$$\cos^n y = \frac{1}{2^n} \{ e^{nyi} + n_1 e^{(n-2)yi} + n_2 e^{(n-4)yi} + \dots \}$$

folglich

$$D^{n-1}\cos^n y = \frac{1}{2^n}\{(ni)^{n-1}e^{nyi} + n_1((n-2)i)^{n-1}e^{(n-2)yi}$$
$$+ n_2((n-4)i)^{n-1}e^{(n-4)yi} + \dots\}$$

$$(D^{n-1}\cos^n y)_{(0)} = \frac{i^{n-1}}{2^n}\{n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \dots\}$$

Für gerade n, also ungerade $n-1$, heben sich in der eingeklammerten Reihe die ersten und letzten, zweiten und vorletzten Glieder auf; nämlich:

$$n^{n-1} \text{ gegen } (n-2n)^{n-1} = -n^{n-1},$$
$$n_1(n-2)^{n-1} \quad \text{,,} \quad n_{n-1}(n-2n+2)^{n-1} = -n_1(n-2)^{n-1},$$
u. s. w.,

und folglich ist

$$(D^{n-1}\cos^n y)_{(0)} = 0$$

für gerade n. Dagegen hat man für ungerade n also gerade $(n-1)$

$$(D^{n-1}\cos^n y)_{(0)} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\{n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \dots\} \quad (4)$$

oder

$$(D^{n-1}Y^n)_{(0)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}a_n,$$

wenn zur Abkürzung

$$a_n = \frac{1}{2^n}\{n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \dots\}$$

gesetzt wird. Nach Formel (1) ergiebt sich nun, dass die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y - x\cos y = 0$$

ausgedrückt wird durch

$$y' = \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_3 x^3}{1.2.3} + \frac{a_5 x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \quad (5)$$

Um die Grenzen für die Gültigkeit dieser Reihe zu bestimmen, müssen wir zunächst die Gleichung:

$$\cos y = -y\sin y \quad \text{oder} \quad y + \cot y = 0 \quad (6)$$

auflösen. Man übersieht sogleich, dass die reellen Wurzeln dieser

Gleichung zwischen $y = \frac{\pi}{2}$ und $y = \pi$, $y = \frac{3\pi}{2}$ und $y = 2\pi$ etc. zu suchen sind, weil y und $\cot y$ von entgegengesetztem Zeichen sein müssen. Um auch noch zu erfahren, zwischen welchen Gränzen die Moduli der imaginären Wurzeln liegen, nehmen wir $y = zi$, wodurch

$$\cot y = -i\,\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = -i\,(1 + \frac{2}{e^{2z}-1})$$

wird und die Gleichung $y + \cot y = 0$ in die folgende übergeht:

$$z - 1 - \frac{2}{e^{2z}-1} = 0.$$

Für $z = 1$ wird die linke Seite negativ, dagegen für $z = 2$ positiv und folgl. liegt eine Wurzel dieser Gleichung zwischen 1 und 2. Genauere Rechnung giebt $z = 1{,}199678\ldots$ und folglich ist $y = (1{,}199678\ldots)\sqrt{-1}$ die erste imaginäre Wurzel der Gleichung $y + \cot y = 0$. Diess ist auch die kleinste Wurzel, weil ihr Modulus weniger beträgt als $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ etc. Vermöge der zweiten Formel in no. (2) ist nun in unserem Falle:

$$x = \frac{1}{-\sin y} = \frac{y}{\cos y},$$

woraus man leicht

$$x = \sqrt{1 + y^2}$$

findet. Diess giebt als kleinsten Werth von x:

$$x = \sqrt{1 - (1{,}199678\ldots)^2} = (0{,}662742\ldots)\sqrt{-1},$$

und folglich ist $0{,}622742\ldots$ der kleinste Modulus von x. Die Gleichung (5) besteht demnach nur für

$$\operatorname{mod} x < 0{,}662742\ldots \tag{7}$$

III. Es sei $f(y) = y^m + a$, also die kleinste Wurzel der Gleichung

$$y - x(y^m + a) = 0$$

oder

$$y^m - \frac{1}{x}\,y + a = 0 \tag{8}$$

in eine Reihe zu verwandeln. Hier ist nun wegen $Y = a + y^m$

$$D^{n-1}Y^n = D^{n-1}\{a^n + n_1 a^{n-1} y^m + n_2 a^{n-2} y^{2m} + n_3 a^{n-3} y^{3m} + \ldots\}$$

und da nach geschehener Differenziation $y=0$ zu setzen ist, so erhellt, dass m eine positive ganze Zahl sein muss, wenn nicht von irgend einer Stelle an (sobald nämlich $n-1 > m$ geworden ist) die Differenzialquotienten unendlich gross ausfallen sollen. Unter der gemachten Voraussetzung werden alle diejenigen Differenzialquotienten $=0$, bei denen nicht

$$n-1 = m\ ,\ 2m\ ,\ 3m\ ,\ 4m\ ,\ \text{etc.}$$

ist. Man erhält nun leicht für $n-1 = m$:

$$(D^{n-1}Y^n)_{(0)} = n_1 a^{n-1} 1.2.3\ldots m$$

d. i.

$$(D^m Y^{m+1})_{(0)} = (m+1)_1 a^m 1.2.3..\ m\,;$$

ferner für $n-1 = 2m$:

$$(D^{n-1}Y^n)_{(0)} = n_2 a^{n-2} 1.2.3\ldots(2m)$$

oder

$$(D^{2m}Y^{2m+1})_{(0)} = (2m+1)_2 a^{2m-2} 1.2.3\ldots(2m)\,;$$

dann wieder

$$(D^{3m}Y^{3m+1})_{(0)} = (3m+1)_3 a^{3m-2} 1.2.3.\ .(3m)$$

u. s. w.

und mithin nach Formel (1) für $n=1\ ,\ m+1\ ,\ 2m+1\ ,\ 3m+1$, etc. da für jeden anderen Werth von n die Coeffizienten verschwinden,

$$y' = \frac{ax}{1} + (m+1)_1 \frac{a^m x^{m+1}}{m+1} + (2m+1)_2 \frac{a^{2m-1}x^{2m+1}}{2m+1} + (3m+1)_3 \frac{a^{3m-2}x^{3m+1}}{3m+1} + \ldots,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$y' = ax + \frac{1}{1} m_0 a^m x^{m+1} + \frac{1}{2}(2m)_1 a^{2m-1} x^{2m+1} + \frac{1}{3}(3m)_2 a^{3m-2} x^{3m+1} + \ldots. \quad (9)$$

Um die Gränzen für die Gültigkeit dieser Reihe zu bestimmen, hat man nach der ersten von den Gleichungen (2):

$$y^m + a = ymy^{m-1},$$

woraus sich

$$y = \left(\frac{a}{m-1}\right)^{\frac{1}{m}}$$

findet. Die zweite der genannten Gleichungen giebt jetzt:

$$x = \frac{1}{m\left(\frac{a}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}},$$

und folglich muss in der Formel (9)

$$\operatorname{mod} x < \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}} \tag{10}$$

sein. — Nimmt man spezieller $x = \frac{1}{a}$, so hat man nach no. (9) für die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y^m - ay + a = 0 \tag{11}$$

die Formel:

$$y' = 1 + \frac{1}{1} m_0 \frac{1}{a} + \frac{1}{2}(2m)_1 \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3}(3m)_2 \frac{1}{a^3} + \dots \tag{12}$$

und nach (10)

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

oder

$$\frac{1}{a^m} < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m a^{m-1}},$$

folglich

$$\frac{1}{a} < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}. \tag{13}$$

Setzt man endlich noch $m-1$ für m und $\frac{1}{a} = z$, so wird die kleinste Wurzel y' der Gleichung:

$$y^{m-1} - \frac{1}{z} y + \frac{1}{z} = 0 \tag{14}$$

durch die Reihe:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{1}{1}(m-1)_0 z + \frac{1}{2}(2m-2)_1 z^2 + \frac{1}{3}(3m-3)_2 z^3 + \dots \\ z &< \frac{(m-2)^{m-2}}{(m-1)^{m-1}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ausgedrückt. Es liesse sich übrigens bei diesem Beispiele eine Art von Probe machen, wenn man nämlich die Reihe in (15) rückwärts in die Gleichung (14) substituirte, wodurch man auf eine blose Identität kommen muss, weil y' eine Wurzel jener Gleichung, also eines von den y ist, welches derselben genügt. Bezeichnet man zur Abkürzung wie folgt:

$$\frac{1}{p}(pm-p)_{p-1} = A_p, \qquad (16)$$

also

$$y' = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots \qquad (17)$$

und schreibt die Gleichung (14) in der Form:

$$y^{m-1} = \frac{y-1}{z}$$

so ergiebt sich, wenn für y aus no. (17) y' gesetzt wird,

$$(1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots)^{m-1}$$
$$= A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + A_4 z^3 + \ldots$$

Nimmt man die Logarithmen und differenzirt nachher, so wird:

$$(m-1)\,\frac{A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + 4A_4 z^3 + \ldots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots}$$
$$= \frac{A_2 + 2A_3 z + 3A_4 z^2 + 4A_5 z^3 + \ldots}{A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + A_4 z^3 + \ldots}.$$

Multiplizirt man kreuzweis die Reihen und vergleicht hierauf die Coeffizienten gleicher Potenzen von z, so findet man folgende Gleichungen:

$$A_1 = 1,$$
$$A_2 = \frac{2m-2}{2} A_1 A_1,$$
$$A_3 = \frac{3m-4}{4} (A_1 A_2 + A_2 A_1),$$
$$A_4 = \frac{4m-6}{6} (A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1),$$
$$A_5 = \frac{5m-8}{8} (A_1 A_4 + A_2 A_3 + A_3 A_2 + A_4 A_1),$$

u. s. f.,

oder allgemein:

$$A_p = \frac{pm-(2p-2)}{2p-2} (A_1 A_{p-1} + A_2 A_{p-2} + A_3 A_{p-3} + \ldots + A_{p-1} A_1) \qquad (18)$$

und nun müssen natürlich die nach der Formel (16) berechneten Werthe von A_p, A_{p-1}, ... A_2, A_1 die vorliegende Gleichung erfüllen. Es ist aber die letztere eine Rekursions- und no. (16) eine independente Formel, und daher kann man auch umgekehrt sagen, wenn eine Reihe von Grössen A_1, A_2, ... A_p, die man noch nicht näher kennt, der Rekursionsformel (18) genügen soll, so muss die allgemeine Form derselben durch die independente Formel (16) bestimmt werden. Es ist übrigens nichts weniger als überflüssig, für dieselben Grössen dergleichen doppelte Relationen aufzustellen, weil es häufig vorkommt, dass man für eine Partie von Grössen sehr leicht eine Rekursionsformel finden kann, ohne eine independente Formel angeben zu können. Wollte man in solchen Fällen die letztere aus der ersteren durch successive Substitutionen ableiten, so würde man sich erst in einen ziemlich umständlichen Calcül einlassen, darauf aus den für A_1, A_2, A_3 etc. gefundenen independenten Ausdrücken die allgemeine Form von A_p errathen müssen und hätte sich endlich nach einem Beweise für dieselbe umzusehen, indem man zeigte, dass A_{p+1} unter derselben Form steht wie A_p, was oft wieder sehr umständlich ist. — So hat z. B. die oben behandelte Aufgabe eine geometrische Bedeutung. Stellt man nämlich die Frage, auf wieviel verschiedene Arten sich ein pEck durch Diagonalen im mEcke zerlegen lässt, und bezeichnet die Anzahl dieser Arten mit A_p, so kann man sich durch eine einfache geometrische Betrachtung*) überzeugen, dass zwischen A_p, A_{p-1}, A_{p-2}, etc. die Rekursionsformel (18) statt findet. Nach no. (16) folgt dann sogleich, dass sich ein pEck durch Diagonalen auf $\frac{1}{p}(pm-p)_{p-1}$ verschiedene Weisen in mEcke zerlegen lässt.

---

*) M. s. hierüber Grunerts Archiv der Mathematik. Theil I. S. 193. Setzt man für $(pm-p)_{p-1}$ seinen Werth, so wird:

$$A_p = \frac{(m-1)(pm-p-1)(pm-p-2)\ldots(pm-(2p-2))}{1.2.3\ \ldots\ (p-1)}.$$

Diess stimmt mit der a. a. O. durch Induktion entwickelten aber nicht weiter bewiesenen Formel überein, wenn man statt p den dort gebrauchten Buchstaben i setzt. Das Obige enthält demnach den Beweis für die Richtigkeit jenes induktiven Resultates.

§. 55.

Entwickelung einer expliziten Funktion von einer impliziten Funktion.

Um die Allgemeinheit noch höher zu treiben, wollen wir jetzt die Aufgabe behandeln, nicht schlechtweg die kleinste Wurzel y' der Gleichung $y - xf(y) = 0$, sondern eine gegebene explizite Funktion von ihr, etwa $F(y')$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln. Die Möglichkeit dieser Entwickelung und die Bedingungen ihrer Gültigkeit sind a priori leicht einzusehen. Wäre nämlich $F(y')$ eine stetige und endliche Funktion von y' und wären es auch alle Differenzialquotienten von ihr, wenigstens innerhalb eines Intervalles $y'=0$ bis $y'=\eta$, so würde man für eben dieses Intervall die Gleichung

$$F(y') = F(0) + \frac{y'}{1}F'(0) + \frac{y'^2}{1.2}F''(0) + \ldots.$$

aufstellen können. Da sich nun unter gewissen Bedingungen y' und ebenso y'^2, y'^3 in Reihen verwandeln lassen, die nach Potenzen von x fortgehen, so ist diess auch mit der ganzen rechten Seite der vorstehenden Gleichung und ebenso mit der linken der Fall. Zu den bereits bekannten Bedingungen für die Entwickelbarkeit von y' kommen also noch die hinzu, dass $F(y')$, $F'(y')$, $F''(y')$, etc. stetig und endlich bleiben müssen innerhalb eines gewissen bei $y'=0$ anfangenden Intervalles.

Wollte man nun die Aufgabe selbst dadurch zu lösen versuchen, dass mau in der obigen Gleichung für y', y'^2, y'^3, etc. ihre nach §. 54. angebbaren Werthe setzte, so würde man sich in eine höchst umständliche Transformation verwickeln; viel kürzer dagegen kommt man auf folgende Weise zum Ziele. Wir multipliziren die Gleichung (12) in §. 53. mit $\Phi(y)$, wo $\Phi(y)$ eine nebst ihren Differenzialquotienten endliche und stetige Funktion bedeutet und vergleichen in der so entstehenden neuen Relation die Coeffizienten von $\frac{1}{y}$, welche beiderseits vorkommen. Nun ist die linke Seite:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\Phi(y)}{y}\cdot\frac{y'}{1} + \frac{\Phi(y)}{y^2}\cdot\frac{y'^2}{2} + \frac{\Phi(y)}{y^3}\cdot\frac{y'^3}{3} + \ldots \\ -\,[b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots.]\,\Phi(y), \end{array}\right\} \quad (1)$$

wobei sich wegen der der für $\Phi(y)$ angegebenen Bedingungen

$$\Phi(y) = \Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots$$

setzen lässt. Der subtraktive Theil des in (1) stehenden Ausdruckes erhält bei dieser Substitution offenbar nur ganze positive Potenzen von y und wir brauchen daher keine Rücksicht auf ihn zu nehmen, weil es sich blos um den Coeffizienten von $\frac{1}{y}$ handelt. Der Minuendus in (1) wird jetzt

$$\begin{aligned}
&\frac{y'}{1.y}\{\Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots \\
&+\frac{y'^2}{2.y^2}\{\Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots\} \\
&+\frac{y'^3}{3.y^3}\{\Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0 + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots\} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

und dabei ist der Coeffizient von $\frac{1}{y}$:

$$\frac{y'}{1}\Phi(0) + \frac{y'^2}{1.2}\Phi'(0) + \frac{y'^3}{1.2.3}\Phi''(0) + \frac{y'^4}{1.2.3.4}\Phi'''(0) + \dots \quad (2)$$

Die rechte Seite der Gleichung (12) in §. 53. wird ferner für $f(y) = Y$ und nach Multiplikation mit $\Phi(y)$

$$\frac{x}{1.y}Y\Phi(y) + \frac{x^2}{2.y^2}Y^2\Phi(y) + \frac{x^3}{3.y^3}Y^3\Phi(y) + \dots \quad (3)$$

und wenn wir auf jedes einzelne Glied das Mac Laurin'sche Theorem anwenden, was hier erlaubt ist, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\Phi(y)$, Y, Y^2, Y^3, etc., folglich auch die Produkte $Y\Phi(y)$, $Y^2\Phi(y)$, $Y^3\Phi(y)$, etc. in Reihen von der Form $A + By + Cy^2 +$ etc. verwandelbar sind, so geht die Reihe (3) in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{1.y}\{[Y\Phi(y)]_0 + \frac{y}{1}\{D[Y\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{y^2}{1.2}\{D^2[Y\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots\} \\
&+\frac{x^2}{2.y^2}\{[Y^2\Phi(y)]_{(0)} + \frac{y}{1}\{D[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{y^2}{1.2}\{D^2[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots\} \\
&+\frac{x^3}{3.y^3}\{[Y^3\Phi(y)]_{(0)} + \frac{y}{1}\{D[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{y^2}{1.2}\{D^2[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \dots\} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

und hier ist der Coeffizient von $\frac{1}{y}$:

$$\frac{x}{1}[Y\Phi(y)]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3}\{D^2[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \ldots.$$

Durch Vergleichung dieses Coeffizienten von $\frac{1}{y}$ mit dem schon unter no. (2) gefundenen ist nun:

$$\frac{y'}{1}\Phi(0) + \frac{y'^2}{1.2}\Phi'(0) + \frac{y'^3}{1.2.3}\Phi''(0) + \ldots.$$
$$= \frac{x}{1}[Y\Phi(y)]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[Y^2\Phi(y)]\}_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3}\{D^2[Y^3\Phi(y)]\}_{(0)} + \ldots.$$

Setzt man noch $\Phi(y)=F'(y)$, also $\Phi'(y)=F''(y)$, $\Phi''(y)=F''(y)$, etc. so geht die linke Seite dieser Gleichung über in:

$$\frac{y'}{1}F'(0) + \frac{y'^2}{1.2}F''(0) + \frac{y'^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots$$

und nach dem Mac Laurin'schen Satze ist $F(y')-F(0)$ ihre Summe, weil $F'(y)$, $F''(y)$, etc. den für $\Phi(y)$, $\Phi'(y)$, etc. gemachten Voraussetzungen nach innerhalb eines mit $y=0$ anfangendeen Intervalles stetig und endlich bleiben. Wir haben daher nach dem Obigen:

$$F(y')=F(0) + \frac{x}{1}[YF'(y)]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\{D[Y^2F'(y)]\}_{(0)}$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\{D^2[Y^3F'(y)]\}_{(0)} + \ldots \quad (4)$$

und hierin die Auflösung unserer Aufgabe. Die Gleichung selbst gilt so lange als $f(y)=Y$, $f'(y)=DY$, $f''(y)=D^2Y$, etc., ebenso $F(y)$, $F'(y)$, $F''(y)$, etc. innerhalb eines bei Null beginnenden Intervalles stetig und endlich bleiben, dass ferner $f(0)$ weder Null noch unendlich gross und der Modulus von x kleiner als der Modulus des kleinsten x ist, welches die simultanen Gleichungen $Y=yDY$ und $x=\frac{y}{Y}=\frac{1}{DY}$ erfüllt.

Die gefundene Formel lässt sich übrigens durch einen sehr einfachen Kunstgriff noch verallgemeinern. Man setze nämlich:

$$Y = f(y) = \varphi(y+a), \; F(y) = \Phi(y+a),$$

wo a eine willkührliche Constante ist; es wird dann

$$\Phi(y'+a) = \Phi(a) + \frac{x}{1}\,[\varphi(y+a)\,\Phi'(y+a)]_{(0)}$$
$$+ \frac{x^2}{1.2}\,\{D(\overline{\varphi(y+a)}^2\,\Phi'(y+a)\}_{(0)} + \ldots.$$

und hier bedeutet nun y' die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y - x\varphi(y+a) = 0.$$

Dabei wäre der Coeffizient von $\frac{x^n}{1.2\ldots n}$ in der obigen Reihe

$$\{D^{n-1}[\overline{\varphi(y+a)}^n\,\Phi'(y+a)]\}_{(0)}$$

d. i.

$$\frac{d^{n-1}[\overline{\varphi(y+a)}^n\,\Phi'(y+a)]}{dy^{n-1}} \text{ für } y=0.$$

Setzt man aber zur Abkürzung $y+a=z$, also $dy=dz$, so wird für $y=0$, $z=a$, folglich der vorliegende Ausdruck gleich

$$\frac{d^{n-1}[\overline{\varphi(z)}^n\,\Phi'(z)]}{dz^{n-1}} \text{ für } z=a,$$

oder analog unserer vorigen Bezeichnung:

$$\{D^{n-1}[\varphi(z)\ \ \Phi'(z)]\}_{(a)};$$

und mithin ist nach dem Obigen:

$$\Phi(y'+a) = \Phi(a) + \frac{x}{1}[\varphi(z)\,\Phi'(z)]_{(a)} + \frac{x^2}{1.2}\,\{D[\overline{\varphi(z)}^2\,\Phi'(z)]\}_{(a)}$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\,\{D^2[\overline{\varphi(z)}^3\,\Phi'(z)]\}_{(a)} + \ldots.$$

Schreibt man kürzer $y-a$ für y, also auch, weil y' eine besondere Form von y ist, $y'-a$ für y', so geht die Gleichung (5) über in:

$$y-a-x\varphi(y) = 0 \quad \text{oder} \quad y = x\varphi(y)+a,$$

und die vorige Formel wird

$$\Phi(y') = \Phi(a) + \frac{x}{1}[\varphi(z)\,\Phi'(z)]_{(a)} + \frac{x^2}{1.2}\,\{D[\overline{\varphi(z)}^2\,\Phi'(z)]\}_{(a)} + \ldots.$$

Setzen wir endlich noch $a=z$, so können wir die angehangenen Marken weglassen, weil immer $z=z$ ist, und wenn wir noch f und F für φ und Φ schreiben, so wird, wenn y' die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$y = xf(y) + z \qquad (6)$$

bedeutet, und also eine Funktion zweier Variabelen x und z ist,

$$F(y') = F(z) + \frac{x}{1}[f(z)F'(z)] + \frac{x^2}{1.2}D[f(z)^2 F'(z)] + \frac{x^3}{1.2.3}D^2[f(z)^3 F'(z)] + \dots \quad (7)$$

wo sich die angedeuteten Differenziationen auf z als unabhängige Variabele beziehen und $f(z)^2$, $f(z)^3$, etc. der Bequemlichkeit wegen für $\overline{f(z)}^2$, $\overline{f(z)}^3$, etc. gesetzt sind. Die vorstehende sehr ellgemeine Gleichung heisst das Theorem oder auch **die Umkehrungsformel von Lagrange** und gilt nach den für die Gleichung (4) angegebenen Bedingungen nur so lange als $f(0)$ nicht $= 0$ oder ∞, $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$, etc.; ebenso $F(y)$, $F'(y)$, $F''(y)$, etc. stetig und endlich innerhalb eines bei Null anfangenden Intervalles bleiben und der Modulus von x kleiner als derjenige ist, welcher dem kleinsten, die simultanen Gleichungen

$$f(y) = (y-z)f'(y), \quad x = \frac{y-z}{f(y)} = \frac{1}{f'(y)} \quad (8)$$

erfüllenden x zugehört. — Nimmt man in der Formel (7) nach Ausführung der angedeuteten Operationen $z = 0$, so kommt man auf die Formel (4) zurück.

§. 56.

Die Umkehrung der Reihen.

Um ein etwas allgemeineres Beispiel für die Formeln des vorigen Paragraphen zu haben, wollen wir eine Aufgabe behandeln, welche einige historische Berühmtheit hat, weil man sich zu Zeiten der combinatorischen Schule viel mit ihr beschäftigte.

Wenn zwischen x und y eine Gleichung von der Form

$$x = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + a_3 y^4 + \dots \quad (1)$$

besteht, worin die Reihe auf der rechten Seite als eine convergente vorausgesetzt wird*), so ist umgekehrt auch y und ebenso y^m eine

*) Convergenz ist desshalb nöthig, weil die Formel von Lagrange x als eine bestimmte endliche Grösse voraussetzt, was nicht der Fall sein würde, wenn die Reihe $a_0 y + a_1 y^2 +$ etc. divergirte.

gewisse Funktion von x, welche man auf folgende Weise in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln kann. Man setze zur Abkürzung:

$$\psi(y) = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + a_3 y^4 + \ldots. \tag{2}$$

so ist

$$x = \psi(y) \text{ oder auch } y = x \frac{y}{\psi(y)}. \tag{3}$$

Vergleichen wir diess mit der früher betrachteten Relation:

$$y - xf(y) = 0 \text{ oder } y = xf(y),$$

so ist

$$f(y) = Y = \frac{y}{\psi(y)} = \frac{1}{a_0 + a_1 y + \ldots}, \tag{4}$$

und diese Funktion erfüllt in der That die im vorigen Paragraphen ihr auferlegten Bedingungen. Ausserdem ist noch, da y^m gesucht wird,

$$F(y) = y^m, \; F'(y) = my^{m-1},$$

und folglich der Coeffizient von x^n in der Reihe (4) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{m}{1.2.3\ldots n} D^{n-1} \left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right] \text{ für } y=0. \tag{5}$$

Nach (4) ist nun ferner:

$$\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n = \frac{1}{(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots)^n}$$
$$= (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots.)^{-n}$$

Denkt man sich hierauf das Binomialtheorem angewendet, was man desswegen darf, weil wenigstens innerhalb eines kleinen Intervalles

$$\frac{a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots}{a_0} < 1$$

ist, so kann man

$$\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n = \overset{-n}{P_0} + \overset{-n}{P_1} y + \overset{-n}{P_2} y^2 + \overset{-n}{P_3} y^3 + \ldots \tag{6}$$

setzen, wo durch P gewisse Coeffizienten bezeichnet werden, die nur von n und den Constanten a_0, a_1, a_2, etc. abhängen. Man hat dann:

$$D^{n-1} \left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right]$$
$$= D^{n-1} \{ \overset{-n}{P_0} y^{m-1} + \overset{-n}{P_1} y^m + \overset{-n}{P_2} y^{m+1} + \overset{-n}{P_3} y^{m+2} + \ldots \} \tag{7}$$

und da nach geschehener Differenziation $y=0$ gesetzt wird, so muss m eine positive ganze Zahl sein, wenn nicht der Coeffizient in no. (5) unendlich werden soll. Unter dieser Voraussetzung giebt es in der vorstehenden Reihe ein Glied

$$\overset{-n}{P}_q y^{m+q-1},$$

worin der Exponent von y gleich $n-1$ ist; diess geschieht nämlich für $q=n-m$, so dass man die Gleichung (7) auch in folgender Form darstellen kann:

$$D^{n-1}\left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right]$$

$$= D^{n-1}\{\overset{-n}{P}_0 y^{m-1} + \ldots + \overset{-n}{P}_{n-m-1} y^{n-2} + \overset{-n}{P}_{n-m} y^{n-1} + \overset{-n}{P}_{n-m+1} y^n + \ldots\}$$

woraus sogleich folgt:

$$D^{n-1}\left[\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n y^{m-1}\right] \text{ für } y=0$$

$$= 1.2.3\ldots(n-1)\overset{-n}{P}_{n-m}.$$

Nach no. (5) ist nun

$$\frac{m}{n}\overset{-n}{P}_{n-m} \text{ der Coeffizient von } x^n.$$

Wollte man hier $n=0$, 1, 2, etc. setzen, so würden mehrere der Grössen P negative Indices erhalten; dergleichen P müssen aber Null sein, weil in der Gleichung

$$(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots)^{-n}$$

$$= \overset{-n}{P}_0 + \overset{-n}{P}_1 y + \overset{-n}{P}_2 y^2 + \overset{-n}{P}_3 y^3 + \ldots.$$

keine negativen Potenzen von y vorkommen können. Nehmen wir nun $n=m$, $m+1$, $m+2$, etc., so sind:

$$\frac{m}{m}\overset{-m}{P}_0, \frac{m}{m+1}\overset{-m-1}{P}_1, \frac{m}{m+2}\overset{-m-2}{P}_2, \ldots$$

die Coeffizienten von

$$x^m, x^{m+1}, x^{m+2},$$

und die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen giebt jetzt wegen $F(y)=y^m$,

$$y'^m = \frac{m}{m}\overset{-m}{P}_0 x^m + \frac{m}{m+1}\overset{-m-1}{P}_1 x^{m+1} + \frac{m}{m+2}\overset{-m-2}{P}_2 x^{m+2} + \ldots, \quad (8)$$

wobei y' die kleinste Wurzel der Gleichung

$$x = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + a_3 y^4 + \ldots \quad (9)$$

bedeutet. Für $m=1$ hat man sehr einfach

$$y' = \frac{1}{1}\overset{-1}{P_0}\,x + \frac{1}{2}\overset{-2}{P_1}\,x^2 + \frac{1}{3}\overset{-3}{P_2}\,x^3 + \frac{1}{4}\overset{-4}{P_3}\,x^4 + \dots \qquad (10)$$

Die Gränzen für die Gültigkeit der Formeln (8) und (10) sind leicht zu bestimmen, wenn man bemerkt, dass

$$f(y) = \frac{y}{\psi(y)}\ ,\ \text{also}\ \ f'(y) = \frac{1}{\psi(y)} - y\,\frac{\psi'(y)}{\psi(y)^2}$$

ist, und dass mithin die simultanen Gleichungen:

$$f(y) = yf'(y)\ ,\ x = \frac{y}{f(y)}$$

in die folgenden übergehen:

$$y\,\frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = 0\ ,\ x = \psi(y). \qquad (11)$$

Zur Vollständigkeit der gegebenen Auflösung fehlt nun noch die Bestimmung der Grössen $\overset{-m}{P_0}, \overset{-m-1}{P_1}$, etc., die man leicht aus den folgenden

$$\overset{n}{P_0}\ ,\ \overset{n}{P_1}\ ,\ \overset{n}{P_2}\ ,\ \overset{n}{P_3}\ ,\ \dots$$

ableiten könnte, wenn die letzteren bekannt wären. Für diese lassen sich nun ebensowohl independente als rekurrirende Formeln aufstellen. Das Erste kann mittelst des Mac Laurin'schen Satzes geschehen, wenn menn man berücksichtigt, dass für

$$\begin{aligned}\Phi(y) = \varphi(y)^n &= (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots)^n \\ &= \overset{n}{P_0} + \overset{n}{P_1} y + \overset{n}{P_2} y^2 + \overset{n}{P_3} y^3 + \dots,\end{aligned}$$

auch gleichzeitig

$$\Phi(y) = \Phi(0) + \frac{y}{1}\Phi'(0) + \frac{y^2}{1.2}\Phi''(0) + \dots$$

sein muss, woraus

$$\overset{n}{P_0} = \Phi(0)\ ,\ \overset{n}{P_1} = \frac{1}{1}\Phi'(0)\ ,\ \overset{n}{P_2} = \frac{1}{1.2}\Phi''(0)\ ,\ \text{etc.}$$

folgt. Man hat aber leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\Phi(y) &= \varphi(y)^n,\\
\Phi'(y) &= n\varphi(y)^{n-1}\varphi'(y),\\
\Phi''(y) &= n(n-1)\varphi(y)^{n-2}\varphi'(y)^2 + n\varphi(y)^{n-1}\varphi''(y),\\
\Phi'''(y) &= n(n-1)(n-2)(n-3)\varphi(y)^{n-3}\varphi'(y)^3 + 3n(n-1)\varphi(y)^{n-2}\varphi'(y)\varphi''(y)\\
&\quad + n\varphi(y)^{n-1}\varphi'''(y),
\end{aligned}$$

u. s. f.

Für $y=0$ ergeben sich nun wegen

$$\varphi(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$$

$\varphi(0)=a_0$, $\varphi'(0) = 1.a_1$, $\varphi''(0) = 1.2.a_2$, $\varphi'''(0) = 1.2.3.a_3$, etc.

leicht die Werthe von $\Phi(0)$, $\Phi'(0)$, $\Phi'''(0)$, etc. und hieraus

$$\left.\begin{aligned}
\overset{n}{P}_0 &= a_0{}^n, \\
\overset{n}{P}_1 &= n a_0{}^{n-1} a_1, \\
\overset{n}{P}_2 &= \frac{n(n-1)}{2} a_0{}^{n-2} a_1{}^2 + n a_0{}^{n-1} a_2, \\
\overset{n}{P}_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} a_0{}^{n-3} a_1{}^3 + n(n-1) a_0{}^{n-2} a_1 a_2 + n a_0{}^{n-1} a_3
\end{aligned}\right\} \quad 12)$$

u. s. f.

wo es indessen sehr schwer ist, das allgemeine Gesetz, wonach sich diese Ausdrücke bilden, zu errathen.

Brauchbarere Relationen für die gesuchten Grössen, welche man die **Polynomialkoeffizienten** nennt, giebt folgende Rechnung. Differenzirt man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots)^n \\
&= \overset{n}{P}_0 + \overset{n}{P}_1 y + \overset{n}{P}_2 y^2 + \overset{n}{P}_3 y^3 + \dots
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

so ergiebt sich

$$n(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots)^{n-1}(a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \dots)$$
$$= \overset{n}{P}_1 + 2\overset{n}{P}_2 y + 3\overset{n}{P}_3 y^2 + \dots$$

ferner durch Multiplikation mit $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$, wenn man links die Gleichung (3) berücksichtigt,

$$n(\overset{n}{P}_0 + \overset{n}{P}_1 y + \overset{n}{P}_2 y^2 + \dots)(a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \dots)$$
$$= (\overset{n}{P}_1 + 2\overset{n}{P}_2 y + 3\overset{n}{P}_3 y^2 + \dots)(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots).$$

Führt man die hier angedeuteten Multiplikationen aus, ordnet hierauf Alles nach Potenzen von y und vergleicht dann die Coeffizienten gleicher Potenzen von y, so gelangt man zu folgenden Relationen:

$$a_0 \overset{n}{P}_1 = n a_1 \overset{n}{P}_0,$$
$$2a_0 \overset{n}{P}_2 + a_1 \overset{n}{P}_1 = n a_1 \overset{n}{P}_1 + 2n a_2 \overset{n}{P}_0,$$
$$3a_0 \overset{n}{P}_3 + 2a_1 \overset{n}{P}_2 + a_2 \overset{n}{P}_1 = n a_1 \overset{n}{P}_2 + 2n a_2 \overset{n}{P}_1 + 3n a_3 P_0,$$

u. s. w.,

woraus man auch leicht die folgenden ableiten kann:

$$\overset{n}{P}_1 = \frac{1}{1 . a_0} n a_1 \overset{n}{P}_0 ,$$

$$\overset{n}{P}_2 = \frac{1}{2 . a_0} \{(n-1) a_1 \overset{n}{P}_1 + 2n a_2 \overset{n}{P}_0\},$$

$$\overset{n}{P}_3 = \frac{1}{3 . a_0} \{(n-2) a_1 \overset{n}{P}_2 + (2n-1) a_2 \overset{n}{P}_1 + 3n a_3 \overset{n}{P}_0\},$$

u. s. f.

d. i. überhaupt für ein ganzes positives s:

$$\overset{n}{P}_s = \frac{1}{s . a_0} \{(n-s+1) a_1 \overset{n}{P}_{s-1} + (2n-s+2) a_2 \overset{n}{P}_{s-2} + (3n-s+3) a_3 \overset{n}{P}_{s-3} + \ldots\} \quad (14)$$

und nach dieser Rekursionsformel ist die successive Berechnung der Polynomialkoeffizienten nicht schwer.

Die Formel (10), welche die Auflösung des sogenannten Problemes der Reihenumkehrung enthält, kann dazu dienen, um aus einer Reihe für irgend eine Funktion $\psi(y)$ eine Reihe für die umgekehrte Funktion abzuleiten. Eine Gleichung wie $x = \psi(y)$ lässt sich nämlich in vielen Fällen nach y auflösen, so dass man $y = \varphi(x)$ findet und dann nennt man jede der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ die Umkehrung der anderen. Hat man daher für die eine derselben, etwa $\psi(y)$, eine Reihe

$$\psi(y) = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + \ldots$$

gefunden, so giebt die Formel (10) die Reihenentwickelung der umgekehrten Funktion, nämlich:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1} \overset{-1}{P}_0\, x + \frac{1}{2} \overset{-2}{P}_1\, x^2 + \frac{1}{3} \overset{-3}{P}_2\, x^3 + \ldots, \quad (16)$$

vorausgesetzt nämlich, dass $\varphi(x)$ diejenige Umkehrung von $\psi(y)$ ist, die mit x gleichzeitig verschwindet. Nimmt man z. B. in no. (15) $\psi(y) = \operatorname{Arctan} y$, also $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_4 = +\frac{1}{5}$, etc., so folgt aus $x = \operatorname{Arctan} y$ umgekehrt $y = \tan x$ und folglich ist nach (16):

$$\tan x = \frac{1}{1} \overset{-1}{P}_0\, x + \frac{1}{2} \overset{-2}{P}_1 x^2 + \frac{1}{3} \overset{-3}{P}_2 x^3 + \ldots$$

und nach no. (14)

$$\overset{n}{P}_s = -\frac{1}{s}\left\{\frac{2n-s+2}{3}\overset{n}{P}_{s-2} - \frac{4n-s+4}{5}\overset{n}{P}_{s-} + \frac{6n-s+6}{7}\overset{n}{P}_{s-6} - \dots\right\}$$

woraus man

$$\overset{-2}{P_1} = 0\ ,\ \overset{-4}{P_3} = 0\ ,\ \overset{-6}{P_5} = 0\ ,\ \text{etc.}$$

findet, so dass blos übrig bleibt:

$$\tan x = \frac{1}{1}\overset{-1}{P_0}x + \frac{1}{3}\overset{-}{P_2}x^3 + \frac{1}{5}\overset{-5}{P_4}x^5 + \dots \qquad (17)$$

Die Gleichungen (11) werden jetzt

$$\frac{y}{(1+y^2)\,\text{Arctan}\,y} = 0\ ,\ x = \text{Arctan}\,y.$$

Die einzige Auflösung, welche die erste hat, ist $y=\infty$, woraus $x = \frac{\pi}{2}$ folgt. Die Gleichung (17) gilt demnach nur so lange als der Modulus von x weniger als $\frac{\pi}{2}$ beträgt, was wir schon auf auf anderem Wege gefunden haben.

So elegant übrigens auch die Methode, neue Reihen durch Umkehrung schon bekannter zu entwickeln, scheinen mag, so wenig praktischen Werth hat sie; denn da das independente Gesetz der Polynomialkoeffizienten sehr verwickelt ist, so kann man auch in der umgekehrten Reihe (16) die allgemeine Form der Coefficienten von x, x^2, x^3 etc. nicht independent angeben, was aber gerade ein Haupterforderniss jeder guten Reihenentwickelung ist.

Cap. X. Anwendungen auf Geometrie.

§ 57.

Tangenten und Normalen ebener Curven.

Schon früher einmal in § 12. haben wir die geometrische Bedeutung des Differenzialquotienten einer Funktion $f(x)$ für den Fall erkannt, dass $f(x)$ das Bildungsgesetz der Ordinaten einer ebenen Curve, also

$$y = f(x)$$

die Gleichung der letzteren auf rechtwinkliche Coordinaten bezogen darstellt. An fig. 7. nämlich sahen wir, dass wenn τ der Winkel $UPT = BST$ heisst, welchen die Tangente ST im Punkte P, dessen Coordinaten $OA = x$, $AP = y$ sind, mit der Abscissenachse macht, die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan\tau \tag{1}$$

statt findet. Dort diente dieses Resultat zur Veranschaulichung der Operation des Differenzirens, hier soll es uns auf dem Gebiete der Geometrie weiter führen.

Nennen wir in fig. 7. $OX = \xi$ und $XY = \eta$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente ST, so ist

$$\eta - y = (\xi - x)\tan\tau,$$

wie sich sehr leicht ergiebt, wenn die Differenzen $\eta - y$ und $\xi - x$ mittelst zweier Hülfslinien construirt werden; vermöge des vorhin bestimmten Werthes von $\tan\tau$ haben wir nun auch:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) = f'(x)(\xi - x)$$

und diese Relation, welche zu jedem ξ das zugehörige η finden lehrt, ist nach der Sprache der analytischen Geometrie die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y).

Errichtet man im Punkte P eine Senkrechte PN auf die Tangente, so heisst PN die Normale der Curve im Punkte (x, y); nennt man ferner ξ, η die rechtwinklichen Coordinaten irgend eines Punktes derselben, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung:

$$\xi - x = (y - \eta)\tan\tau$$

oder

$$\eta - y = -(\xi - x)\frac{1}{\tan\tau},$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x) = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x) \tag{3}$$

als Gleichung der Normale im Punkte (x, y).

Will man diejenigen Stücke der Tangente und Normale haben, welche zwischen die Abscissenachse und den Punkt (x, y) fallen, also

die Strecken PS und PN, welche man auch die Längen der Tangente und Normale nennt, so braucht man blos zu berücksichtigen, dass der Figur nach

$$PS = \frac{y}{\sin\tau}, \quad PN = \frac{y}{\cos\tau},$$

andererseits aber

$$\sin\tau = \frac{\tan\tau}{\sqrt{1+\tan^2\tau}}, \quad \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\tau}}$$

ist. Substituirt man daher für $\tan\tau$ seinen Werth, so wird:

$$\text{Tang.} = y\,\frac{dx}{dy}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{f(x)}{f'(x)}\sqrt{1+f'(x)^2} \qquad (4)$$

$$\text{Norm.} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}. \qquad (5)$$

Auch die Strecken AS und AN der Abscissenachse, welchen man die Namen Subtangente und Subnormale gegeben hat, lassen sich leicht angeben, wenn man berücksichtigt, dass sie diejenigen Werthe der Differenzen $\xi - x$ in den Gleichungen der Tangente und Normale sind, welche der Ordinate $\eta = 0$ entsprechen. Nimmt man nämlich in der Gleichung (2) $\eta = 0$, so reduzirt sich ξ auf OS und folglich ist, abgesehen vom Vorzeichen, $AS = OS - OA = \xi - x$; in der Gleichung (3) wird ferner für $\eta = 0$, $\xi = ON$, mithin $AN = ON - OA = \xi - x$, folglich:

$$\text{Subt.} = y\,\frac{dx}{dy} = \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (7)$$

$$\text{Subn.} = y\,\frac{dy}{dx} = f(x)\,f'(x)$$

Es folgt hieraus, dass die Ordinate $y = f(x)$ die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und Subnormale ist, was man auch unmittelbar aus der Betrachtung des bei P rechtwinklichen Dreiecks SPN einsieht.

Die Formeln (4), (5), (6) und (7) dienen hauptsächlich zur Auffindung geometrischer Construktionen, mittelst deren man an einen gegebenen Punkt (x, y) einer Curve eine Tangente legen kann; kennt man nämlich nur eine der Grössen Tang., Norm., Subt., Subn., so ist es sehr leicht die Tangente oder Normale zu ziehen, und wenn sich also nur eine der gefundenen Formeln geometrisch construiren lässt, so hat

man hierin eine rein geometrische Lösung des genannten Problemes. Diess mögen einige Beispiele zeigen.

I. Nimmt man die Achse einer Parabel zur Ordinatenachse und eine durch ihren Scheitel senkrecht auf die Achse gezogene Gerade zur Abscissenachse, so ist die Gleichung der Curve

$$x = \sqrt{py} \text{ oder } y = \frac{x^2}{p},$$

worin p den Parameter der Parabel bezeichnet. Es folgt hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{p}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{p}{2x}$$

und nach den früheren Formeln

$$\text{Tang.} = \frac{x}{2p}\sqrt{p^2+(2x)^2}, \quad \text{Norm.} = \frac{y}{p}\sqrt{p^2+(2x)^2}$$
$$\text{Subt.} = \frac{x}{2}, \quad \text{Subn.} = \frac{2x^3}{p^2}$$

und da sich alle diese Ausdrücke geometrisch construiren lassen, so giebt diess vier verschiedene Regeln zum Tangentenziehen, von denen diejenige die einfachste ist, bei welcher man von der Subtangentenformel ausgeht.

II. Um auch einen Fall zu betrachten, in welchem die Gleichung der Curve nicht nach y auflösbar ist, also y nicht als entwickelte Funktion von x angegeben werden kann, sei

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve, welche man wegen der Schleife, die sie bildet, das Blatt des Cartesius genannt hat (fig. 18). Um hier zunächst den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu finden, wenden wir die Regel an, dass wenn zwischen x und y eine Gleichung von der Form

$$F(x, y) = 0$$

besteht, der Differenzialquotient von y durch die Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dF(x,y)}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dy}}$$

bestimmt wird, worin Zähler und Nenner auf der rechten Seite partielle Differenzialquotienten bedeuten. Diess giebt in unserem Falle:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

Hieraus folgt u. A.

$$\text{Subt.} = y\,\frac{x^2-ay}{y^2-ax}=y\,\frac{\frac{x^2}{a}-y}{\frac{y^2}{a}-x},$$

und diess lässt sich leicht geometrisch construiren, wenn man berücksichtigt, dass $\frac{x^2}{a}$ die vierte Proportionale in $a:x=x:\frac{x^2}{a}$, folglich $\frac{x^2}{a}-y$, ebenso $\frac{y^2}{a}-x$ eine bestimmte Gerade und der ganze Ausdruck für Subt. die vierte Proportionale zu $\frac{y^2}{a}-x, y$ und $\frac{x^2}{a}-y$ ist.

III. Die Gleichung der Cykloide besteht bekanntlich darin, dass die Coordinaten u und v vom Anfange der Bewegung an gerechnet die simultanen Gleichungen *):

$$u=r(\vartheta-\sin\vartheta)\ ,\ v=r(1-\cos\vartheta)$$

---

*) Die Cykloide ist bekanntlich der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises beschreibt, der sich auf einer Geraden fortwälzt, ohne zu gleiten. Sei in fig. 19. O der Mittelpunkt dieses Kreises $OP=r$, AB die gegebene Gerade und A die Stelle, von welcher aus die Bewegung anfing. Der Punkt des Kreises, dessen Bahn wir betrachten, möge P sein, wobei wir voraussetzen, dass im Anfange P mit A zusammenfiel. Setzen wir noch $AM=u$, $MP=v$, $\angle NOP=\vartheta$, so ist klar, dass die Strecke $AN=$ dem Bogen NP ist, weil sich der Kreis auf der Geraden AB abwickelt. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} u &= AN-MN = AN-PQ \\ &= r\vartheta - r\sin\vartheta = r(\vartheta-\sin\vartheta); \\ v &= ON-OQ = r-r\cos\vartheta \\ &= r(1-\cos\vartheta) \end{aligned}$$

und diess sind die oben erwähnten Gleichungen. Für $\vartheta=\pi$, also wenn der Kreis eine halbe Umdrehung gemacht hat, wird $u=AD=r\pi$, $v=CD=2r$ und für $\vartheta=2\pi$, also nach einer ganzen Umdrehung $u=2r\pi$, $v=0$. Die Basis der Cykloide ist also dem Umfange des erzeugenden Kreises und ihre Höhe dem Durchmesser desselben gleich.

erfüllen, worin r den Halbmesser des erzeugenden Kreises und ϑ den Wälzungswinkel bezeichnet. Rechnen wir aber die Coordinaten vom Scheitel der Cykloide aus, und die Höhe der Cykloide zur Achse der x, so ist:

$$x = 2r - v \ , \ y = r\pi - u,$$

oder nach dem Vorigen:

$$x = r(1 + \cos\vartheta) \ , \ y = r(\pi - \vartheta + \sin\vartheta).$$

Um hieraus $\frac{dy}{dx}$ abzuleiten, differenziren wir beide Gleichungen nach ϑ, woraus sich

$$\frac{dx}{d\vartheta} = -r\sin\vartheta \ , \ \frac{dy}{d\vartheta} = -r(1 - \cos\vartheta)$$

und durch Division

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \tan\tfrac{1}{2}\vartheta = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}}$$

ergiebt. Andererseits ist aber unmittelbar

$$1 + \cos\vartheta = \frac{x}{r} \ , \text{ folglich } 1 - \cos\vartheta = \frac{2r - x}{r}$$

und durch Substitution dieser Werthe erhalten wir jetzt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}.$$

Mit Hülfe der Formeln (4), (5), (6) und (7) findet man nun:

$$\text{Tang.} = y\sqrt{\frac{2r}{2r-x}} \ , \ \text{Norm.} = \frac{y}{x}\sqrt{2r(2r-x)},$$

$$\text{Subt.} = y\sqrt{\frac{x}{2r-x}} \ , \ \text{Subn.} = y\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$$

und es würde sehr leicht sein, diese Ausdrücke geometrisch zu construiren.

§. 58.

Die Asymptoten ebener Curven.

Wenn sich eine Curve oder wenigstens einer ihrer Zweige ins Unendliche erstreckt und man successiv an alle Punkte derselben Tangenten legt oder, was auf das Nämliche hinauskommt, wenn man den Punkt, an welchem eine Tangente gezogen ist, auf der Curve ins Unendliche hinausgehen lässt, so sind hinsichtlich der verschiedenen Richtungen, welche diese Tangente nach einander annimmt, zwei Fälle denkbar; nämlich entweder nähern sich dieselben mehr und mehr einer bestimmten Richtung als Gränze oder nicht, denn da τ immer eine gewisse Funktion von x ist, etwa $\tau = \varphi(x)$, so muss für unendlich wachsende x sich $\operatorname{Lim} \varphi(x)$ entweder angeben lassen (überhaupt existiren), oder nicht. Ausserdem sind hinsichtlich der Lage jener successiven Tangenten noch zwei Fälle möglich; ihr Durchschnitt mit der Abscissenachse wird nämlich immer fortrücken, entweder bis zu einer bestimmten Stelle oder nicht. Finden nun die jedesmaligen ersten Fälle in diesen beiden Distinktionen gleichzeitig statt, so existirt eine gewisse Gerade, welcher sich die successiven Tangenten der Curve unbegränzt nähern, eine solche Gerade heisst eine Asymptote der Curve, weil man auch sagen kann, dass die Curve selbst sich dieser Geraden unausgesetzt nähert und ihr so nahe kommen kann als es nur verlangt wird, ohne aber jemals dieselbe zu erreichen.

Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich nun sogleich ein sehr einfaches Mittel zur Entscheidung der Frage, ob eine gegebene Curve Asymptoten habe oder nicht. Erstlich nämlich muss man untersuchen, ob der Winkel τ also auch $\tan\tau$ sich einer bestimmten Gränze nähert oder nicht; heisst τ_1 dieselbe, so ist

$$\tan\tau_1 = \operatorname{Lim} \frac{dy}{dx}. \qquad (1)$$

Ferner muss die Grösse OS in fig. 20. einer angebbaren Gränze zueilen; da aber OS diejenige Abscisse ξ eines Punktes der Tangente ist, für welchen $\eta = 0$ wird, so hat man nach Formel (2) im vorigen Paragraphen

$$\xi = x - y\,\frac{dx}{dy},$$

und wenn ξ_1 der Gränzwerth von ξ für unendlich wachsende x heisst,

$$\xi_1 = \text{Lim}\left(x - y\,\frac{dx}{dy}\right). \qquad (2)$$

Haben nun in (1) und (2) τ_1 und ξ_1 angebbare Werthe, so kann man auch leicht die Gleichung der Asymptote aufstellen; denn wenn x', y' die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Geraden sind, so findet offenbar die Relation:

$$y' = (x' - \xi_1)\tan\tau_1 \qquad (3)$$

statt und diese ist nichts Anderes als die Gleichung der Asymptote selbst.

Um hiernach zu untersuchen, ob z. B. die Parabel Asymptoten habe oder nicht, nehmen wir

$$y = \sqrt{px}\,,\ \text{also}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}},$$

woraus

$$\tau_1 = \text{Lim}\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{p}}{\sqrt{x}} = 0$$

folgt. Die Richtungen der Tangenten nähern sich also immer mehr dem Parallelismus zur Parabelachse. Ferner ist

$$\xi = x - \sqrt{px}\;2\sqrt{\frac{x}{p}} = -x,$$

folglich $\text{Lim}\,\xi = -\infty$ d. h. die Durchschnitte der Tangenten mit der Parabelachse rücken ins Unendliche hinaus; es giebt demnach keine Asymptote.

Für die Hyperbel haben wir, wenn a die grosse und b die kleine Achse bezeichnet,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,,\ \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}},$$

mithin durch Uebergang zur Gränze für unausgesetzt wachsende x

$$\tan\tau_1 = \frac{b}{a}.$$

Ferner wird

$$\xi = x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\cdot\frac{a}{b}\,\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x},$$

folglich

$$\xi_1 = \text{Lim}\,\frac{a^2}{x} = 0,$$

Demnach haben wir nach no. (3) als Gleichung der Asymptote:

$$y' = \frac{b}{a}\,x'$$

und dieselbe geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Ist die Hyperbel gleichseitig d. h. $b = a$, so wird $\tan\tau_1 = 1$, folglich der sogenannte Asymptotenwinkel $\tau_1 = 45^0$.

Man kann übrigens leicht noch eine zweite Regel zur Aufsuchung der Asymptoten geben, die in manchen Fällen von bequemerer Anwendung sein wird. Sie gründet sich auf die einfache Bemerkung, dass wenn eine der Ordinatenachse nicht parallele Asymptote vorhanden ist, die Ordinaten der Curve um so weniger von den zu den nämlichen Abscissen gehörigen Ordinaten der Asymptote differiren, je grösser die Abscissen selbst genommen werden. Ist z. B. in fig. 20. $OA = x$, $AP = y$, $AP' = y'$ und

$$y' = \alpha x + \beta \tag{4}$$

die Gleichung der Asymptote, so hat man offenbar für $PP' = \varepsilon$

$$y = \alpha x + \beta + \varepsilon,$$

wo nun ε eine Grösse ist, die bis zur Gränze Null abnimmt, wenn x wächst. Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\beta + \varepsilon}{x},$$

und folglich, wenn man zur Gränze für unendlich zunehmende x übergeht,

$$\alpha = \text{Lim}\,\frac{y}{x} \qquad (5)^{*)}$$

*) Diess Resultat ist nur formell von dem unter no. (1) stehenden verschieden. Heisst nämlich τ_1 der Winkel, welche irgend eine durch die Gleichung $y' = \alpha x + \beta$ bestimmte Gerade mit der Abscissenachse macht, so ist nach bekannten Lehren der analytischen Geometrie $\alpha = \tan\tau_1$ und folglich geht die obige Gleichung in $\tan\tau_1 = \text{Lim}\,\frac{y}{x}$ über. Wenn nun überhaupt eine Asymptote existirt, so wird sich dieser Gränzwerth unter die vieldeutige Form $\frac{\infty}{\infty}$ stellen und man findet dann $\text{Lim}\,\frac{y}{x} = \text{Lim}\,\frac{dy}{dx}$, wodurch die Formel (5) mit (1) zusammenfällt. Dadurch wird aber no. (5) noch nicht überflüssig, weil man sehr oft die Division mit x ausführen kann.

Hat man auf diese Weise α bestimmt, so ergiebt sich aus der Gleichung $y = \alpha x + \beta + \varepsilon$,

$$\beta = \text{Lim}(y - \alpha x),$$

wodurch nun die beiden Constanten α und β, welche die Lage der Asymptote angeben, bestimmt sind. Diese Regel lässt sich auch auf implizite Funktionen anwenden, wenn man also blos die Gleichung kennt, aus der y noch zu entwickeln wäre. Kann man nämlich die letztere auf folgende Form bringen:

$$F(x,y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

wobei die Zahlen m, n, etc. der Grösse nach absteigend geordnet sind, so ist auch:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Weiss man nun im Voraus, dsss $\text{Lim}\, \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\text{Lim}\, \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, ... nicht unendlich gross werden, so hat man für unendlich wachsende x, wegen $\text{Lim}\, \frac{y}{x} = \alpha$

$$\varphi(\alpha) = 0, \tag{7}$$

woraus man α zu bestimmen hat. Um β zu finden, setzen wir in der vorhergehenden Gleichung

$$y = \alpha x + t, \tag{8}$$

so wird dieselbe:

$$\varphi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} \psi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Man hat aber ferner $\varphi(\alpha + h) = \varphi(\alpha) + h\varphi'(\alpha + \lambda h)$, mithin, weil $\varphi(\alpha) = 0$ für $h = \frac{t}{x}$:

$$\varphi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} \varphi'\left(\alpha + \frac{\lambda t}{x}\right)$$

und hierdurch geht die obige Gleichung über in:

$$t\varphi'\left(\alpha + \frac{\lambda t}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n-1}} \psi\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Ist nun eine Asymptote vorhanden, so ist $\beta = \text{Lim}(y - \alpha x)$, folglich geht dann nach no. (8) t in β über, und die vorige Gleichung giebt:

$$\beta\varphi'(\alpha) + \text{Lim}\,\frac{\psi(\alpha)}{x^{m-n-1}} = 0$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{für}\ n < m-1\ ,\ \beta = 0 \\ 2)\ \ ,,\ \ n = m-1\ ,\ \beta = -\dfrac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \\ 3)\ \ ,,\ \ n > m-1\ ,\ \beta = \pm\infty. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Im ersten Falle geht die Asymptote durch den Anfangspunkt der Coordinaten und ist ganz einfach

$$y' = \alpha x$$

ihre Gleichung; im zweiten Falle wird letztere

$$y' = \alpha x - \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \quad (10)$$

und im dritten Falle existirt gar keine Asymptote, weil der Durchschnitt der Tangente mit der Abscissenachse ins Unendliche wegrückt.

Um diess auf ein Beispiel anzuwenden, sei die gegebene Curve das Cartesianische Blatt, oder

$$F(x, y) = x^3 - 3axy + y^3 = 0.$$

Stellt man sie in der Form

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3a}{x}\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \quad (11)$$

dar, so übersieht man auf der Stelle, dass hier $\text{Lim}\,\frac{y}{x}$ nicht unendlich sein kann;, denn man hat auch

$$\frac{y}{x}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{3a}{x}\right] + 1 = 0$$

und hier ist auf der Stelle klar, dass wenn $\frac{y}{x}$ unendlich würde, die ganze linke Seite unendlich würde und also nicht mehr $=0$ sein könnte. Wir haben daher nach no. (11)

$$\alpha^3 + 1 = 0\ ,\ \alpha = -1;$$

ausserdem ist hier

$$\varphi(\alpha) = \alpha^3\ ,\ \psi(a) = -3a\alpha$$

folglich

$$\frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = \frac{-3a\alpha}{3\alpha^2} = -\frac{a}{\alpha} = a$$

wegen $\alpha = -1$. Mithin ist

$$y' = -x - a$$

die Gleichung der Asymptote des Cartesianischen Blattes. In fig. 18 ist dieselbe mitgezeichnet und dabei $\angle X'BT = 45^0$ und $OB = a$.

Aehnliche Schlüsse sind auf alle algebraischen Curven anwendbar.

§. 59.

Die Tangenten und Normalebenen der Curven von doppelter Krümmung.

Jede doppelt gekrümmte Curve hat bekanntlich zwei Gleichungen, weil man sie als den Durchschnitt zweier Flächen betrachten kann. Bezeichnen nämlich

$$\Phi(x,y,z) = 0\ ,\ \Psi(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichungen der sich schneidenden Flächen, so gehören diejenigen Coordinaten x, y, z, welche beide Gleichungen simultan erfüllen, dem Durchschnitte beider Flächen, also der Curve doppelter Krümmung an. Eliminirt man aus denselben einmal y und einmal x, so erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi(z)\ ,\ y = \psi(z) \qquad (2)$$

und diess sind die Gleichungen der fraglichen Curve. Giebt man nun dem z ein beliebiges Inkrement Δz, so ändern sich auch x und y etwa um Δx und Δy; um aber anzudeuten, dass diese Aenderungen von Δz herrühren, wollen wir statt derselben $\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)\Delta z$ und $\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\Delta z$ schreiben. Sind jetzt in fig. 21. P und Q die beiden Punkte der Curve, welche

$$x\ ,\ y\ ,\ z$$

und

$$x + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)\Delta z\ ,\ y + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\Delta z\ ,\ z + \Delta z$$

zu Coordinaten haben, so lässt sich die Grösse und Richtung der Sehne PQ sehr leicht angeben; die erstere, die etwa ϱ heissen möge, durch die einfache Bemerkung, dass ϱ die Diagonale von einem rechtwinklichen Parallelepipedon ist, welches Δx, Δy, Δz zu Seiten hat. Hieraus folgt:

$$\varrho = \Delta z \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2 + 1}.$$

Nennen wir ferner λ, μ, ν die Winkel, welche PQ mit drei durch P den Coordinatenachsen parallel gelegten Geraden macht, so ist:

$$\cos\lambda = \frac{\Delta x}{\varrho}, \quad \cos\mu = \frac{\Delta y}{\varrho}, \quad \cos\nu = \frac{\Delta z}{\varrho}$$

oder

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta z}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos\mu = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta z}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2 + 1}}.$$

Lassen wir nun den Punkt Q immer näher an P rücken, so ist die Tangente SPT der Gränzfall der Sekante und die Winkel, welche ST mit jenen drei durch P gelegten Geraden (sekundären Coordinatenachsen) macht, sind die Gränzwerthe der Winkel λ, μ, ν. Nennen wir α, β, γ die Winkel, welche die Tangente in P mit den Coordinatenachsen oder den ihnen parallelen Geraden macht, lassen nun das unabhängige Inkrement Δz bis zur Gränze Null abnehmen, und bemerken, dass

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{dx}{dz}, \quad \text{Lim}\,\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{dy}{dz}$$

ist, so erhalten wir zur Bestimmung der Richtung der Tangente die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \\
\cos\beta &= \frac{\frac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \\
\cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wofür man vermöge der Gleichungen (2) auch schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\varphi'(z)}{\sqrt{\varphi'(z)^2+\psi'(z)^2+1}}\\ \cos\beta &= \frac{\psi'(z)}{\sqrt{\varphi'(z)^2+\psi'(z)^2+1}}\\ \cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)^2+\psi'(z)^2+1}}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Gleichungen der Tangente anzugeben. Nennen wir nämlich ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Punktes derselben und r seine Entfernung vom Punkte (x, y, z), so ist

$$\xi - x = r\cos\alpha\ ,\ \eta - y = r\cos\beta\ ,\ \zeta - z = r\cos\gamma;$$

folglich

$$\frac{\xi-x}{\zeta-z} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\ ,\ \frac{\eta-y}{\zeta-z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

oder

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta - z)\ ,\ \eta - y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta - z);$$

und wenn man hier für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die vorherbestimmten Werthe setzt, so wird:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + \frac{dx}{dz}(\zeta - z)\\ \eta &= y + \frac{dy}{dz}(\zeta - z),\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

oder, was das Nämliche ist:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x + \varphi'(z)\,(\zeta - z)\\ \eta &= y + \psi'(z)\,(\zeta - z)\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

und diess sind die Gleichungen der Tangente, weil man mittelst dieser Formeln ξ und η finden kann, sobald ζ willkührlich angenommen worden ist.

Legt man durch den Punkt P eine Ebene MN senkrecht auf der Tangente ST, so nennt man MN die Normalebene der Curve im Punkte (x, y, z). Ihre Gleichung findet sich auf folgende Weise.

Man denke sich von O ein Perpendikel p auf die Ebene MN herabgelassen und ausserdem nach einem beliebigen durch die Coordinaten ξ, η, ζ bestimmten Punkte derselben von O aus eine Gerade q gezogen, welche mit p den Winkel ω einschliessen möge. Es ist dann:

$$p = q \cos \omega,$$

heissen ferner α, β, γ die Winkel, welche p, und u, v, w die, welche q mit den drei Coordinatenachsen macht, so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\cos \omega = \cos u \cos \alpha + \cos v \cos \beta + \cos w \cos \gamma,$$

folglich durch Multiptikation mit q:

$$p = (q \cos u) \cos \alpha + (q \cos v) \cos \beta + (q \cos w) \cos \gamma,$$

oder

$$p = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma. \qquad (7)$$

Diese Gleichung, welche für irgend einen Punkt (ξ, η, ζ) der Normalebene besteht, muss aber auch für den ebenfalls in der Normalebene liegenden Punkt (x, y, z) gelten, so dass

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

ist, woraus man durch Subtraktion von (7)

$$0 = (\xi - x) \cos \alpha + (\eta - y) \cos \beta + (\zeta - z) \cos \gamma$$

oder

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} (\xi - x) + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} (\eta - y) + \zeta - z = 0$$

erhält. Berücksichtigt man, dass die hier betrachteten Winkel α, β, γ mit den in (3) und (4) vorkommenden identisch sind, so wird jetzt:

$$\frac{dx}{dz} (\xi - x) + \frac{dy}{dz} (\eta - y) + \zeta - z = 0 \qquad (8)$$

oder

$$\varphi'(z)(\xi - x) + \psi'(z)(\eta - y) + \zeta - z = 0 \qquad (9)$$

die Gleichung der Normalebene.

Um diess auf ein Beispiel anzuwenden, betrachten wir diejenige krumme Linie, welche den Durchschnitt einer Kugel und eines gleich-

seitigen hyperbolischen Paraboloids bildet. Nennen wir a den Halbmesser der ersteren und b die Seite des zweiten, so haben wir

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0\ ,\ x^2 - y^2 - b^2 z = 0$$

für die Gleichungen der beiden genannten Flächen. Aus ihnen ergiebt sich

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - z^2 + b^2 z}{2}} = \varphi(z)\,,$$
$$y = \sqrt{\frac{a^2 - z^2 - b^2 z}{2}} = \psi(x);$$

und durch Differenziation:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-2z + b^2}{\sqrt{a^2 - z^2 + b^2 z}} = \varphi'(z)\,,$$
$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-2z - b^2}{\sqrt{a^2 - z^2 - \beta^2 z}} = \psi'(z);$$

und nun kann man die Gleichungen der Tangente und Normalebene im Punkte (x, y, z) ohne Weiteres hinschreiben.

§. 60.

Die Tangentialebenen und Normalen der Flächen.

In der Gleichung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ sind bekanntlich zwei Coordinaten, etwa x und y, willkührlich, dagegen die dritte z eine Funktion der beiden anderen, welche man durch Auflösung jener Gleichung nach z erhält, wobei etwa $z = f(x, y)$ zum Vorschein kommen möge Geben wir nun den Coordinaten x und y ein paar willkührliche Inkremente Δx und Δy, so nimmt auch z um eine gewisse Grösse Δz zu, welche von Δx und Δy auf bestimmte Weise abhängt. Um diess zu veranschaulichen, wenden wir uns an fig. 22., worin P ein beliebiger Punkt der gegebenen Fläche, $HA = x$, $KA = y$, $AP = z$ ist. Lassen wir x um die Strecke $AB = \Delta x$ zunehmen und von B eine Senkrechte aufsteigen, so stossen wir auf einen zweiten Punkt Q der Fläche, wobei wir $BQ = z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) \Delta x$ setzen wollen, um anzudeuten, dass die Differenz Δz, welche zwischen AP und BQ statt findet, von dem Zuwachs Δx herrührt. Geben wir ebenso dem y ein Inkrement $AC = \Delta y$ und ziehen wieder $CR \parallel OZ$, so erhalten wir eines dritten Punkt

R der gegebenen Fläche, für welchen $CR = z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y$ sein möge, um anzudeuten, dass sich die jetzige Aenderung des z von Δy herschreibt. Es sind demnach

die Coordinaten von P: x , y , z ,

" " " Q: $x + \Delta x$, y , $z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x$,

" " " R: x , $y + \Delta y$, $z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y$.

Durch die 3 Punkte P, Q, R wollen wir nun eine Ebene legen, deren Gleichung *)

$$A\xi + B\eta + \zeta + C = 0 \qquad (1)$$

heissen möge, worin A , B , C erst noch zu bestimmen sind. Da P, Q , R in dieser Ebene liegen sollen, so müssen ihre Coordinaten die Gleichung derselben befriedigen, es muss also

$$Ax + By + z + C = 0,$$

$$A(x + \Delta x) + By + z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x + C = 0,$$

$$Ax + B(y + \Delta y) + z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y + C = 0$$

sein und aus diesen Gleichungen lassen sich die Unbekannten A, B, C sehr leicht eliminiren. Durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und dritten erhält man nämlich:

$$A\Delta x + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x = 0 \text{ , } B\Delta y + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y = 0;$$

folglich

$$A = -\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right), \; B = -\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right).$$

Man könnte nun auch C mittelst der ersten Gleichung bestimmen und dann Alles in no. (1) substituiren; man gelangt aber rascher zum Ziele,

---

*) Gewöhnlich stellt man die Gleichung der Ebene unter der Form

$$a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$$

dar; dividirt man dieselbe mit c und setzt $\frac{a}{c} = A$, $\frac{b}{c} = B$, $\frac{d}{c} = C$, so erhält man die oben benutzte Form. Auch ist leicht einzusehen, dass a , b , c , d nicht von einander unabhängig sind, während diess mit A , B , C statt findet.

wenn man von no. (1) die darauf folgende Gleichung subtrahirt; diess giebt

$$A(\xi-x) + B(\eta-y) + \zeta-z = 0,$$

fotglich vermöge der Werthe von A und B:

$$\zeta-z = \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)(\xi-x) + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)(\eta-y).$$

Lassen wir jetzt die willkührlichen Aenderungen Δx und Δy bis zur Gränze Null abnehmen, so rücken die drei Punkte P, Q, R immer näher an einander und die Kappe, welche die Ebene durch P, Q und R von der Fläche abschneidet, zieht sich zu einem blosen Punkte P zusammen; die schneidende Ebene wird zur Tangentialebene und die Differenzenquotienten $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$ und $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ werden zu partiellen Differenzialquotienten, weil die Grösse Δz in $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ nur von Δx und in $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ nur von Δy abhängt. Wir erhalten demnach:

$$\zeta-x = \left(\frac{dz}{dx}\right)(\xi-x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(\eta-y), \qquad (2)$$

oder auch in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\zeta-x = f'_x(x,y)(\xi-x) + f'_y(x,y)(\eta-y) \qquad (3)$$

als Gleichung der Tangentialebene.

Es ist nun ebenso leicht, die Gleichungen der Normale im Punkte (x,y,z) aufzustellen. Dieselben seien:

$$\xi = A\zeta + a\ ,\ \eta = B\zeta + b\ ,$$

so müssen die Coordinaten x, y, z dieselben befriedigen, weil der Punkt P in der Normale selbst liegt. Es ist also zugleich

$$x = Az + a\ ,\ y = Bz + b\ ;$$

folglich durch Subtraktion:

$$\xi-x = A(\zeta-z)\ ,\ \eta-y = B(\zeta-z);$$

und wenn wir α, β, γ die Winkel nennen, welche die Normale mit den Coordinatenachsen macht, so muss ganz so wie in §. 59.

$$\xi-x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta-z),\ \eta-y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta-z) \qquad (4)$$

sein. Die Winkel α, β, γ finden sich auf folgende Weise. Heisst p das Perpendikel vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Tangentialebene, so sind die Winkel, welche dasselbe mit den Coordinatenachsen einschliesst, mit den Winkeln α, β, γ offenbar identisch, weil die Normale ebenfalls auf der Tangentialebene senkrecht steht. Demnach ist wie in §. 59.

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = p$$

die Gleichung der auf p senkrechten Ebene d. h. der Tangentialebene. Diese Gleichung muss nun mit der bereits gefundenen in (2) identisch sein, höchstens könnte sie um einen constanten Faktor k davon differiren, so dass

$$k\cos\alpha = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ k\cos\beta = \left(\frac{dz}{dy}\right),\ k\cos\gamma = -1$$

wäre. Hieraus findet man

$$k^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1.$$

Es ist aber überhaupt immer

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

und demnach

$$k = \pm\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} \tag{6}$$

und für den so bestimmten Werth von k ergeben sich aus no. (5) die Formeln:

$$\cos\alpha = \frac{1}{k}\left(\frac{dz}{dx}\right),\ \cos\beta = \frac{1}{k}\left(\frac{dz}{dy}\right),\ \cos\gamma = -\frac{1}{k}; \tag{7}$$

mittelst deren die Gleichungen der Normale in no. (4) die einfachere Form annehmen:

$$\xi = x - \left(\frac{dz}{dx}\right)(\zeta - z),\ \eta = y - \left(\frac{dz}{dy}\right)(\zeta - z). \tag{8}$$

Für das elliptische Paraboloid hat man z. B.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

und hieraus findet man ohne Schwierigkeit

$$\zeta - z = \frac{2x}{a^2}(\xi - x) + \frac{2y}{b^2}(\eta - y)$$

und

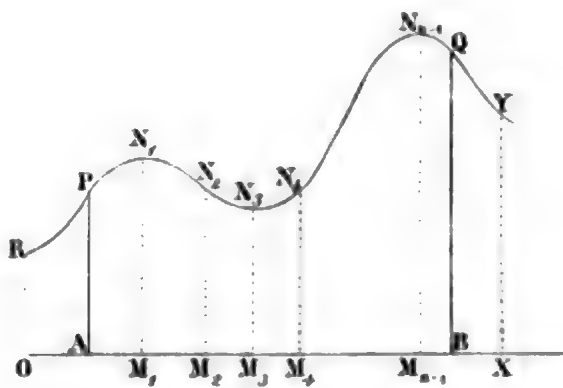
$$\xi = x - \frac{2x}{a^2}(\zeta - z)\ ,\ \eta = y - \frac{2y}{b^2}(\zeta - z)$$

für die Gleichungen der Tangentialebene und Normale.



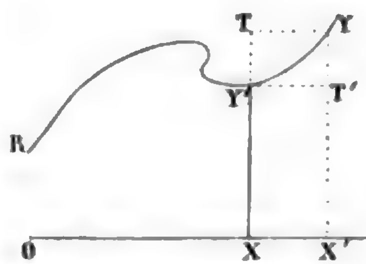
Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

1.



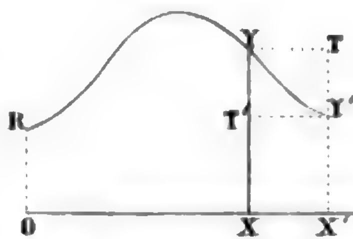
N_{n-1}
Q
Y
N_1
P
N_2
N_3
N_4
R
A
B
O
M_1
M_2
M_3
M_4
M_{n-1}
X

5.



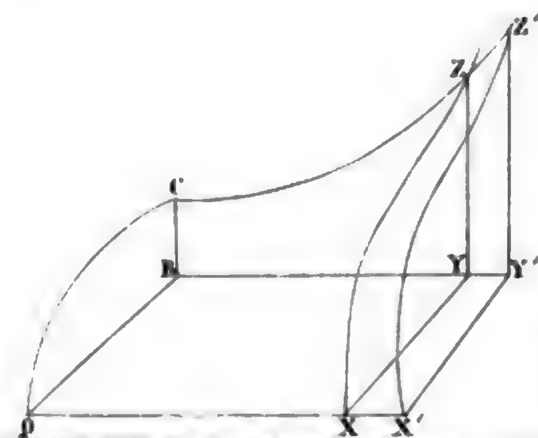
T
Y
Y'
T'
R
O
X
X'

6.



Y
T
R
T'
Y'
O
X
X'

8.



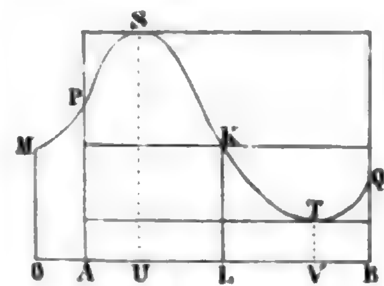
Z'
Z
C
B
Y
Y'
O
X
X'

4.



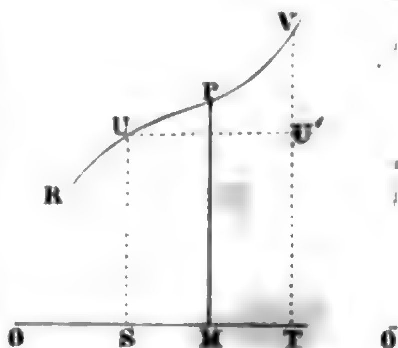
Z
O

10.

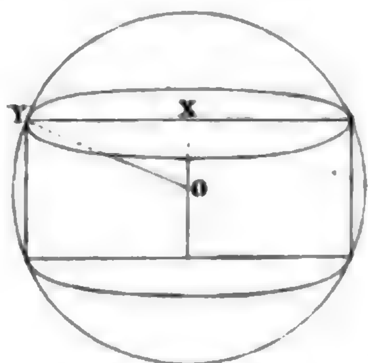


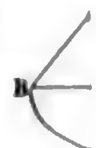
S
P
M
K
Q
T
O
A
U
L
V
B

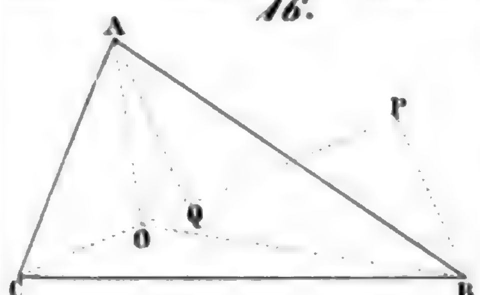
11a.



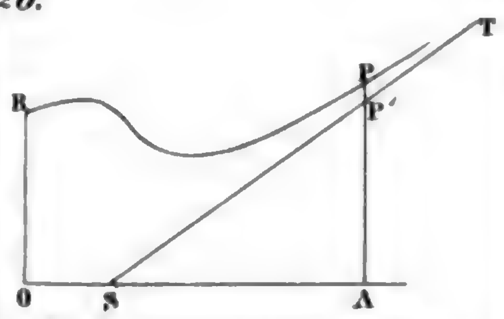
V
P
U
U'
R
O
S
M
T

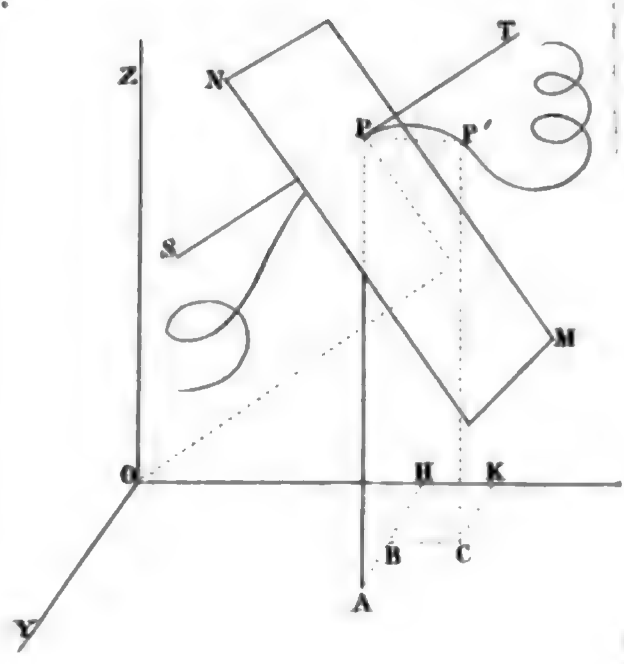

14.
Y
X
O


13.
B

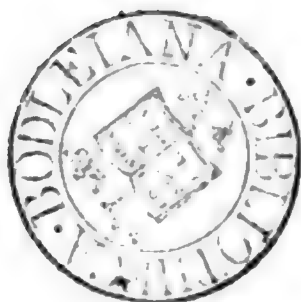

16.
A
P
Q
O
C
B


T
X′
B


20.
T
B
P
P′
O
S
A


21.
T
Z
N
P
P′
S
M
O
H
K
B
C
A
Y





Erste Abtheilung.

Die Integration entwickelter Funktionen.

Cap. I. Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integralrechnung.

§ 1.

Bezeichnungsweise in der Integralrechnung.

Wenn es das Geschäft der Differenzialrechnung war, aus gegebenen Funktionen neue Funktionen mittelst bestimmter Rechnungsoperationen abzuleiten, so ist es umgekehrt die Aufgabe der Integralrechnung, von den derivirten Funktionen zu den ursprünglichen Funktionen, durch deren Differenziation sie entstanden sind, oder wenigstens entstehen könnten, zurückzugehen. In der bisherigen Schreibweise ausgedrückt lautet diess: Die Differenzialrechnung hat aus einem gegebenen $F(x)$ die Funktionen $F'(x), F''(x), \ldots F^{(n)}(x)$ abzuleiten, dagegen liegt es der Integralrechnung ob, aus der gegebenen derivirten Funktion $n$ter Ordnung $F^{(n)}(x)$ die vorhergehenden Funktionen $F^{(n-1)}(x), \ldots F'(x), F(x)$ zu bestimmen. Sowie nun aber ein höherer Differenzialquotient nichts anderes als das Resultat einer mehrmals nach einander ausgeführten einfachen Operation (der Differenziation) ist, so muss auch der Regressus von $F^{(n)}(x)$ bis zu $F(x)$ in der Wiederholung einer und derselben Operation bestehen; denn ist man von dem gegebenen $F^{(n)}(x)$ zunächst auf $F^{(n-1)}(x)$ zurückgegangen, so kann man jetzt $F^{(n-1)}(x)$ als gegeben ansehen und eine ganz ähn-

liche Rechnung wie vorhin führt dann offenbar auf $F^{(n-2)}(x)$, von hier aus weiter auf $F^{(n-3)}(x)$ u. s. w., so dass es also blos darauf ankommt, diejenige Rechnungsoperation kennen zu lernen, mittelst deren man von dem Differenzialquotienten einer Funktion auf diese selbst zurückkommt.

Da es sich bei dieser Aufgabe offenbar um eine Relation zwischen einer gegebenen Funktion und ihrem ersten Differenzialquotienten handelt, so ist es das Natürlichste, sich unter den in Cap. V. der Differenzialrechnung entwickelten Formeln umzusehen, ob sich nicht eine darunter für unseren Zweck brauchen liesse; hierzu empfiehlt sich nun am Besten die unter Nro. 2. verzeichnete, nämlich:

$$F(b)-F(a)$$
$$=\text{Lim.}\,\delta\{F'(a)+F'(a+\delta)+F'(a+2\delta)+\ldots+F'(a+\overline{n-1}\,\delta)\}$$
$$\delta=\frac{b-a}{n}$$

worin sich das Zeichen Lim auf die unbegränzte Zunahme der ganzen positiven Zahl n, oder die unendliche Verringerung von δ bezieht. Bezeichnen wir den gegebenen Differenzialquotienten $F'(x)$ mit $f(x)$ und berücksichtigen, dass die in Parenthese stehende Reihe dadurch aus $f(x)$ entsteht, dass man der Reihe nach $x=a,\ a+\delta, a+2\delta,\ldots a+\overline{n-1}\,\delta$ setzt, so können wir der obigen Formel mit Hülfe eines Summenzeichens Σ eine compendiösere Gestalt geben, nämlich:

$$F(b)-F(a)=\text{Lim}\sum_a^b f(x)\,\delta\,,$$

wobei das Summenzeichen auf ganz dieselbe Weise angewendet ist, als wenn man etwa für $f(a)+f(b)+f(c)+\ldots+f(k)$ kurz $\sum_a^k f(x)$ schriebe. Jede der Grössen $a, a+\delta, a+2\delta,\ldots$ differirt hier von der darauf folgenden um δ, oder aus irgend einem Werthe von x ergiebt sich der nächstfolgende durch Vergrösserung des x um δ und in so fern bildet δ ein Inkrement von x. Deuten wir diess dadurch an, dass wir Δx für δ schreiben, so ist

$$F(b)-F(a)=\text{Lim}\sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Um aber der beständigen Wiederholung von Lim überhoben zu sein, brauchen wir uns nur zu erinnern, dass $\Delta x=\delta$ für unendlich wach-

sende n gegen die Gränze Null convergirt, dass mithin das Inkrement Δx in das Differenzial von x übergeht, wenn man wie immer unter dx einen Zuwachs von x versteht, auf welchem die Bedingung haftet, ihn bis zur Null herabsinken zu lassen. So nimmt denn die vorige Gleichung die kurze Form

$$F(b)-F(a)=\sum_a^b f(x)\,dx$$

an, wobei es zur besseren Unterscheidung üblich geworden ist, statt des griechischen Buchstaben einen etwas gedehnten lateinischen zu brauchen, obgleich diess desswegen nicht nöthig wäre, weil das Σ hier durchaus dieselbe Bedeutung wie in jeder anderen Formel hat und die Operation des Ueberganges zur Gränze schon durch den Gebrauch des dx statt Δx hinlänglich bezeichnet ist. Wenn also $f(x)$ den Differenzialquotienten einer noch unbekannten Funktion $F(x)$ bezeichnet, so hat die letztere die Eigenschaft

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

und dabei nennt man den Ausdruck auf der rechten Seite: Das zwischen den Gränzen a und b genommene Integral von $f(x)dx$ oder auch: Das bestimmte Integral von $f(x)dx$ mit den Integrationsgränzen a und b. Da hier a und b noch ganz beliebig sind, so kann man sich b etwa als willkührlich veränderlich, a constant denken, und demnach b mit x selbst identifiziren; es wäre dann

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(x)\,dx \qquad (2)$$

und hiermit die anfangs gestellte Aufgabe gelöst. Denn durch Differenziation nach x würde sich ergeben

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(x)\,dx\right]$$

oder weil der früheren Voraussetzung nach $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ war

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(x)\,dx\right]=f(x). \qquad (3)$$

Wäre also die unbekannte Funktion y zu bestimmen, welcher die Eigenschaft

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{4}$$

zukäme, so würde durch blosse Vergleichung mit (3) folgen

$$y=\int_a^x f(x)\,dx \tag{5}$$

und da hier alle Rechnungsoperationen vollständig bekannt sind, so wäre dem Prinzipe nach nichts mehr zu leisten übrig. Anders aber sind die Anforderungen der Technik, welche sich mit einer blosen Andeutung von Operationen nicht begnügt; bis jetzt nämlich haben wir weiter nichts als eine Uebersetzung der in der Einleitung zur Differenzialrechnung geführten Betrachtungen in die Sprache der Integralrechnung gegeben, die Schwierigkeiten jedoch, welche der direkten Integration mittelst der Formel (5) entgegen stehen, sind noch ganz die früher auf S. 11 bezeichneten. Dagegen bietet uns die nun vollständig bekannte Differenzialrechnung die Mittel zu der schon dort angedeuteten indirekten Lösung unserer Aufgabe.

Kennt man nämlich eine Funktion $F(x)$, deren Differenzialquotient mit einer gegebenen Funktion $f(x)$ zusammenfällt, so heisst $F(x)$ das **unbestimmte Integral** von $f(x)\,dx$ und man bezeichnet diess durch

$$F(x)=\int f(x)\,dx,$$

so dass also umgekehrt

$$d\int f(x)\,dx=dF(x)=f(x)\,dx \tag{6}$$

ist und sich folglich die Zeichen d und $\int$ gegenseitig aufheben, etwa wie die der Wurzelausziehung und Potenzirung. Hiernach ist es nun leicht, diejenige Funktion y zu bestimmen, welche der Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \text{ oder } dy=f(x)\,dx$$

Genüge leistet; bezeichnen wir nämlich mit C eine ganz willkührliche von x unabhängige Grösse, so ist

$$y=\int f(x)\,dx+C, \tag{7}$$

denn indem man diese Gleichung mit der Rücksicht differenzirt, dass

$\frac{dC}{dx}=0$ ist und die Formel (6) benutzt, kommt man in der That auf die gegebene Gleichung zurück.

Aus dem unbestimmten Integrale lässt sich nun auch wieder das zwischen den Gränzen a und b genommene herleiten, indem man in $F(x)$ einmal $x=a$, dann $x=b$ setzt und den ersten Werth vom zweiten subtrahirt. Diess giebt dann die Gleichung

$$\underset{[\text{für } x=b]}{\int f(x)\,dx} - \underset{[\text{für } x=a]}{\int f(x)\,dx} = \int_a^b f(x)\,dx$$

welche nichts weiter, als die Identität der beiden Resultate ausdrückt, die man durch indirekte und direkte Integration erhält.

§ 2.

Entwickelung der Fundamentalformeln.

Nach den so eben gemachten Bemerkungen ist nichts leichter als die Aufstellung der einfachsten Integralformeln, und in der That besteht dieselbe in fast nichts Anderem als einer Abschrift der gewöhnlichsten Differenzialformeln, mit veränderter Bezeichnung.

1. Die Formel zur Differenziation der Potenz, nämlich

$$\frac{d(x^\lambda)}{dx}=\lambda x^{\lambda-1} \text{ oder } d\left(\frac{x^\lambda}{\lambda}\right)=x^{\lambda-1}dx$$

giebt sogleich

$$\int x^{\lambda-1}dx=\frac{x^\lambda}{\lambda}+C$$

wo C eine willkührliche Constante bezeichnet. Für $\lambda=\mu+1$ wird daraus

$$\int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \tag{1}$$

und diess gilt für jedes μ exclus. $\mu=-1$, denn in diesem Falle würde $\lambda=0$ und dann darf man nicht mehr die vorhergehende Differenzialgleichung gebrauchen wollen. Geht man von der etwas allgemeineren Differenzialformel

$$d\left[\frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b}\right]=(a+bx)^\mu dx$$

aus, so gelangt man zu der ebenfalls für jedes μ exclusive $\mu = -1$ geltenden Integralformel

$$\int (a+bx)^\mu\, dx = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b} + C. \qquad (1)$$

Für den Fall $\mu = -1$ dagegen nimmt das Integral eine andere Form an, wie wir sogleich sehen werden.

2. Differenzirt man $\frac{1}{m} l(x^m)$ so wird

$$d\left[\frac{1}{m} l(x^m)\right] = \frac{1}{m} \frac{mx^{m-1}}{x^m} dx = \frac{dx}{x}$$

und folglich umgekehrt

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} l(x^m) + C.$$

Hier würde es voreilig sein, statt $\frac{1}{m} l(x^m)$ kurzweg lx setzen zu wollen, denn alle die Funktionen, welche aus $\frac{1}{m} l(x^m)$ hervorgehen, wenn man dem m verschiedene Werthe ertheilt, zerfallen in zwei Klassen, deren Prototype lx und $\frac{1}{2} l(x^2)$ sind; die ersteren entsprechen den ungeraden, die zweiten den geraden Werthen von m. Für blos positive x sind beide Funktionen identisch, für negative x dagegen verschieden, denn $l(-x)$ ist unmöglich, weil man e nicht auf eine solche Potenz erheben kann, dass $-x$ herauskommt, $\frac{1}{2} l((\overline{-x})^2)$ ist aber möglich und $= \frac{1}{2} l(x^2)$. Die Frage, ob

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C \text{ oder} = \frac{1}{2} l(x^2) + C$$

zu setzen sei, entscheidet sich jedoch sehr leicht durch die einfache Bemerkung, dass das links stehende Integral dasselbe bleibt, wenn man $-x$ an die Stelle von x setzt, denn es ist

$$\int \frac{d(-x)}{-x} = \int \frac{-dx}{-x} = \int \frac{dx}{x}$$

und dieselbe Eigenschaft muss natürlich auch die auf der rechten Seite stehende Funktion von x haben; nun ist aber nicht $l(-x) = l(x)$, wohl $\frac{1}{2} l((\overline{-x})^2) = \frac{1}{2} l(x^2)$ und daher muss man

$$\int \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\, l(x^2) + C$$

setzen. Weiss man im Voraus, dass x nur positive Werthe erhält, so kann man allerdings kürzer $l(x)$ für $\frac{1}{2}\, l\,(x^2)$ schreiben, man darf diess aber nicht mehr, sobald man im ferneren Verlaufe einer grösseren Rechnung vor negativen Werthen von x nicht sicher ist. Eine etwas allgemeinere Formel folgt noch aus der Gleichung

$$d\left[\frac{l(a+bx)^2}{2b}\right] = \frac{dx}{a+bx}$$

nämlich die sehr häufig vorkommende Integralformel

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{l(a+bx)^2}{2b} + C. \qquad (3)$$

3. Sehen wir uns ferner in der Differenzialrechnung nach solchen Gleichungen um, in welchen die derivirte Funktion eine etwas zusammengesetztere algebraische Form hat, so begegnen wir in § 7 zunächst zwei rationalen Differentialquotienten, nämlich:

$$d\left[\frac{1}{4\sqrt{ab}}\, l\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x}\right)^2\right] = \frac{dx}{a-bx^2} \quad \text{Formel (19)}$$

$$d\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}\, \text{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right] = \frac{dx}{a+bx^2} \quad \text{Formel (23)}$$

und hieraus fliessen die Integralformeln

$$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{4\sqrt{ab}}\, l\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x}\right)^2 + C \qquad (4)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\, \text{Arctan}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x + C. \qquad (5)$$

Ferner finden sich daselbst zwei Gleichungen, worin die derivirte Funktion ein Radikal enthält, nämlich:

$$d\left[\frac{1}{\sqrt{b}}\, \text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right] = \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} \quad \text{Formel (22)}$$

$$d\left[\frac{1}{2\sqrt{b}}\, l\,(\sqrt{b}\,x + \sqrt{a+bx^2})^2\right] = \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad \text{Formel (15)}$$

und diess giebt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, \text{Arcsin}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{b}}\, l(\sqrt{b}\,x + \sqrt{a+bx^2})^2 + C. \qquad (7)$$

4. An diese Integrale algebraischer Differenzialformeln reihen sich diejenigen, worin Exponenzial- oder geometrische Grössen unter dem Integralzeichen $\int$ stehen. So haben wir zunächst

$$d\left(\frac{a^x}{la}\right) = a^x dx$$

folglich

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{la} + C \qquad (8)$$

und noch einfacher wenn $a = e$ ist

$$\int e^x\, dx = e^x + C. \qquad (9)$$

Aus den Gleichungen

$$-d\left(\frac{\cos ax}{a}\right) = \sin ax dx,$$

$$d\left(\frac{\sin ax}{a}\right) = \sin ax\, dx$$

erhält man ferner

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C \qquad (10)$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C. \qquad (11)$$

Ganz ähnlich lassen sich die Gleichungen

$$-d\left(\frac{\cot ax}{a}\right) = \frac{dx}{\sin^2 ax}$$

$$d\left(\frac{\tan ax}{a}\right) = \frac{dx}{\cos^2 ax}$$

benutzen und geben

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\cot ax}{a} + C \qquad (12)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} - \frac{\tan ax}{a} + C. \qquad (13)$$

5. Berücksichtigt man endlich noch die Formeln

$$-d\left[\frac{l(\cos ax)^2}{2a}\right] = \tan ax\, dx,$$

$$d\left[\frac{l\,(\sin ax)^2}{2a}\right] = \cot ax\, dx,$$

so gelangt man zu den Integralen

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{2a}\,l(\cos ax)^2 + C, \qquad (14)$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{2a}\,l(\sin ax)^2 + C \qquad (15)$$

und hiermit haben wir uns in Besitz des wichtigsten Apparates für die ferneren Untersuchungen gesetzt.

§ 3.

Allgemeine Reductionsformeln.

Wenn die Differenzialformeln, deren Integration verlangt wird, nicht so einfach sind, als die 15 Fundamentalgleichungen es voraussetzen, so muss man dadurch zum Ziele zu kommen suchen, dass man sie in einzelne Theile zerlegt, welche für sich integrabel sind; man setzt in diesem Falle das Integral eines complizirteren Ausdruckes aus den Integralen seiner einzelnen Bestandtheile zusammen. Sind diese einzelnen Bestandtheile der gegebenen Differenzialformel durch Addition oder Multiplikation verbunden, so geht die Zusammensetzung des Gesammtintegrales nach den folgenden Regeln vor sich.

1. Es sei zunächst $F(x)$ die Summe zweier anderen Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$, und die Differenzialquotienten der drei Funktionen mögen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ heissen, so hat man zunächst die beiden Gleichungen

$$F(x) = \Phi(x) + \Psi(x), \qquad (1)$$

$$f(x)\,dx = \varphi(x)\,dx + \psi(x)\,dx$$
$$= [\varphi(x) + \psi(x)]\,dx,$$

so folgt aus der zweiten Gleichung durch Integration

$$\int f(x)\,dx = \int [\varphi(x) + \psi(x)]\,dx. \qquad (2)$$

Vermöge des Zusammenhanges zwischen $F(x)$ und $f(x)$, $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ und $\psi(x)$ ist aber auch

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \quad \Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx, \quad \Psi(x) = \int \psi(x)\,dx$$

und daher lässt sich die Gleichung (1) auch in der Gestalt

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx$$

darstellen. Durch Vergleichung mit (2) ergiebt sich hieraus die Formel

$$\int [\varphi(x) + \psi(x)]\, dx = \int \varphi(x)\, dx + \int \psi(x)\, dx, \tag{3}$$

d. h. das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale von den einzelnen Bestandtheilen, wobei man sich leicht überzeugen wird, dass der Satz gültig bleibt, wie gross auch die Anzahl der Summanden sein möge. Hiernach ist es z. B. sehr leicht, das Integral

$$\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$$

zu entwickeln, wenn n eine ganze positive ganze Zahl bedeutet; dasselbe kann nämlich auch unter der Form

$$\int (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . + x^{n-1})\, dx$$

dargestellt werden, und diess giebt nach unserer Regel

$$\int dx + \int x dx + \int x^2 dx + \ldots + \int x^{n-1} dx$$
$$= x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \ldots + \frac{1}{n} x^n + C,$$

wobei C die Summe aller der willkührlichen Constanten bezeichnet, welche man den einzelnen Integralen hinzufügen kann.

2. Wäre $F(x)$ ein Produkt aus einem constanten und variabelen Faktor, also etwa

$$F(x) = k\Phi(x), \tag{4}$$

so giebt die Differenziation unter der Voraussetzung, dass $dF(x) = f(x)dx$, $d\Phi(x) = \varphi(x)\, dx$ ist

$$f(x)\, dx = k\varphi(x)\, dx,$$

und folglich umgekehrt die Integration

$$\int f(x)\, dx = \int k\varphi(x)\, dx. \tag{5}$$

Andererseits ist aber auch $F(x) = \int f(x)dx$, $\Phi(x) = \int \varphi(x)dx$, und mithin lässt sich die Gleichung (4) unter der Gestalt

$$\int f(x)dx = k \int \varphi(x)dx$$

darstellen, was durch Vergleichung mit (5) zu der Formel

$$\int k\varphi(x)dx = k \int \varphi(x)\, dx \tag{6}$$

führt, und in dieser spricht sich die Regel aus, dass constante Faktoren der Differenzialformel vor das Integralzeichen treten. Hiernach ist z. B.

$$\int(Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots\ldots+Mx^m)dx$$
$$=\int Axdx+\int Bx^2dx+\ldots\ldots+\int Mx^m\,dx$$
$$=A\int xdx+B\int x^2dx+\ldots\ldots+M\int x^m\,dx$$
$$=A\frac{x^2}{2}+B\frac{x^3}{3}+C\frac{x^4}{4}+\ldots+M\frac{x^{m+1}}{m+1}+C.$$

3. Auch für die Integration der aus zwei variabelen Faktoren bestehenden Differenzialformeln lässt sich leicht eine Reduktionsformel entdecken. Aus

$$d[\Phi(x)\,\Psi(x)]=\Phi(x).d\Psi(x)+\Psi(x).d\Phi(x)$$

folgt nämlich durch Integration

$$\Phi(x)\,\Psi(x)=\int\Phi(x).d\Psi(x)+\int d\Phi(x).\Psi(x).$$

Setzen wir

$$d\Psi(x)=\psi(x)dx,\quad\text{also}\quad\Psi(x)=\int\psi(x)\,dx,$$

so folgt hieraus

$$\Phi(x)\int\psi(x)dx=\int\Phi(x)\,\psi(x)dx+\int d\Phi(x)\int\psi(x)dx,$$

oder, wenn wir $d\Phi(x)=\Phi'(x)dx$ nehmen und das zweite Glied auf der rechten Seite transponiren,

$$\Phi(x)\int\psi(x)dx-\int\Phi'(x)dx\int\psi(x)dx=\int\Phi(x)\,\psi(x)dx.$$

Schreiben wir der Symmetrie wegen φ für Φ und die Gleichung selbst in umgekehrter Ordnung, so ergiebt sich

$$\int\varphi(x)\,\psi(x)\,dx=\varphi(x)\int\psi(x)\,dx-\int\varphi'(x)dx\int\psi(x)\,dx, \tag{7}$$

und diess ist die Formel für die sogenannte partielle Integration. Für den ersten Augenblick wäre man geneigt, sie für eine solche zu halten, welche die Schwierigkeiten vermehrt, statt sie zu vermindern, weil auf der rechten Seite zwei Integrationen nach einander postulirt werden; man darf aber nicht vergessen, dass in vielen Fällen das Integral $\int\psi(x)\,dx$ sehr leicht zu finden und der Differenzialquotient $\varphi'(x)$ so einfach sein kann, dass sich die Integrationen rechts ohne Mühe bewerkstelligen lassen. So hat man z. B. für $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=e^x$:

$$\int xe^x\,dx=x\int e^x\,dx-\int dx\int e^x\,dx$$
$$=xe^x-\int dx\,e^x=(x-1)\,e^x+C,$$

ferner für $\varphi(x)=lx$, $\psi(x)=1$:

$$\int lx\,dx = lx\int dx - \int \frac{dx}{x}\int dx$$
$$= lx.x - \int \frac{dx}{x}x$$
$$= x(lx-1) + C.$$

Ein etwas complizirteres Beispiel wäre $\varphi(x) = \text{Arctan}\,x$, $\psi(x) = x$; es giebt

$$\int \text{Arctan}\,x.x\,dx = \text{Arctan}\,x\int x\,dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\int x\,dx$$
$$= \text{Arctan}\,x.\tfrac{1}{2}x^2 - \int \frac{dx}{1+x^2}.\tfrac{1}{2}x^2,$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

ist,

$$\int x\,\text{Arctan}\,x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\,\text{Arctan}\,x - \tfrac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\,\text{Arctan}\,x - \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(x^2+1)\,\text{Arctan}\,x - \tfrac{1}{2}x + C.$$

Diese Beispiele zeigen hinreichend die grosse Brauchbarkeit der Formel für die partielle Integration.

4. Handelt es sich um die Integration einer Differenzialformel, worin der Faktor von dx eine Funktion von einer anderweiten Funktion darstellt, also um ein Integral von der Form

$$\int f[\varphi(x)]\,dx,$$

so wird die Reduktion desselben oft dadurch möglich, dass man eine neue Variabele einführt und so das Integral durch S u b s t i t u t i o n in ein anderes transformirt, das vielleicht weniger Schwierigkeiten darbietet. Setzt man nämlich $\varphi(x) = z$, und will jetzt z als die Variabele, in Bezug auf welche integrirt wird, ansehen, so muss man zunächst x als Funktion von z bestimmen, d. h. die Gleichung $\varphi(x) = z$ nach x auflösen, wodurch man ein Resultat von der Form $x = \psi(z)$ erhält. Daraus folgt $dx = \psi'(z)\,dz$ und mithin

$$\int f[\varphi(x)]\,dx = \int f(z)\,\psi'(z)\,dz. \qquad (8)$$

Man übersieht nun gleich, dass die Integration rechts in vielen Fällen ausführbar sein wird, wobei namentlich die partielle Integration sehr gute Dienste leisten kann; hat man nun auf diese Weise etwa

$$\int f(z)\,\psi'(z)\,dz = F(z) + C$$

gefunden, so ergiebt sich jetzt vermöge des Werthes von z

$$\int f[\varphi(x)]\,dx = F[\varphi(x)] + C,$$

und hiermit unmittelbar das gesuchte Integral. So z. B. kann man in dem Integrale

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$e^x = z$ setzen, woraus $x = lz$ und $dx = \frac{dz}{z}$ folgt; es wird dann

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{z + \frac{1}{z}} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$= \int \frac{1}{z^2 + 1}\,dz = \operatorname{Arctan} z + C,$$

und folglich vermöge der Bedeutung von z

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{Arctan}(e^x) + C.$$

Hiermit schliesst sich die Reihe der allgemeinen Formeln, mittelst deren man die Integration zusammengesetzter Ausdrücke auf die einfacherer zu reduziren suchen muss. Ihre Anzahl ist, wie man sieht, sehr gering, um so grösser dagegen ihre Anwendbarkeit und man kann in der That ohne sie kaum einen Schritt in der Integralrechnung thun. Zahlreicher aber sind die speziellen Reduktionsmethoden, welche dann eintreten, wenn die gegebene Differenzialformel dieser oder jener besonderen Klasse von Funktionen angehört, ja die ganze Integralrechnung ist eigentlich nichts Anderes als die Auseinandersetzung aller der einzelnen, aus besonderen Eigenschaften der zu integrirenden Funktionen abgeleiteten Kunstgriffe, wodurch man sich das Geschäft der Integration in den verschiedenen Fällen auf verschiedene Weise erleichtern kann.

Cap. II. Die Integration rationaler algebraischer Differenzialformeln.

§ 4.

Grundzüge des Verfahrens.

Rationale algebraische Funktionen heissen bekanntlich diejenigen, in welchen nur Potenzen der veränderlichen Grösse, mit constanten Grössen durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen oder Divisionen verbunden vorkommen. Das allgemeine Schema derartiger Funktionen ist demnach

$$\varphi(x) = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots. + Mx^m}{A' + B'x + C'x^2 + \ldots. + N'x^n}.$$

Kommen im Zähler höhere Potenzen von x vor als im Nenner, so kann man diese, wie man sagt, unächt gebrochene rationale und algebraische Funktion leicht in eine etwas andere Gestalt bringen. Durch wirkliche Ausführung der Division, so weit diess möglich ist, erhält man nämlich einen Quotienten, welcher eine ganze rationale algebraische Funktion von x ist, und einen Rest, in welchem der Zähler niedrigere Potenzen als der Nenner enthält und daher eine ächt gebrochene rationale algebraische Funktion von x genannt wird; oder schematisch ausgedrückt wäre das Resultat von der Form:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots. + \lambda x^l \\ &+ \frac{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots. + \varkappa' x^k}{A' + B'x + C'x^2 + \ldots. + N'x^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

So z. B. würde man die unächt gebrochene Funktion

$$\left.\begin{aligned} &\frac{5x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} \\ \text{in} \\ &15 + 5x + \frac{-29 + 35x}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

zerlegen. Das Integral $\int \varphi(x) dx$ zerfällt demnach in die zwei Integrale

$$\int (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots. + \lambda x^2)\, dx$$

und

$$\int \frac{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \dots + \varkappa x^k}{A' + B' x + C' x^2 + \dots + N' x^n} dx,$$

von denen das erste sehr leicht durch Integration der einzelnen Bestandtheile zu entwickeln ist und

$$\alpha x + \beta \frac{x^2}{2} + \gamma \frac{x^3}{3} + \dots + \gamma \frac{x^{l+1}}{l+1}$$

giebt. Somit reduzirt sich die Aufgabe von der Integration rationaler algebraischer Funktionen überhaupt auf die der ächt gebrochenen Funktionen dieser Klasse und damit bestimmt sich sogleich das Thema unserer Untersuchung.

Bleiben wir einstweilen bei dem numerischen Beispiele in (2) stehen, worin es sich blos noch um die Integration

$$\int \frac{-29 + 35x}{x^2 - 3x + 2} x$$

handelt. Hier ist die Bemerkung von Gewicht, dass der Nenner der Differenzialformel auch unter der Form eines Produktes nämlich $(x-1)(x-2)$ dargestellt werden kann. So wie nun die Summe zweier Brüche mit verschiedenen Nennern ein Bruch ist, welcher das Produkt aus jenen Nennern zum Nenner hat, so kann man sich auch umgekehrt denken, dass ein Bruch der letzteren Art in die Summe zweier Brüche der ersten Art zerfällbar sein, also eine Gleichung von der Formel

$$\frac{-29 + 35x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-29 + 35x}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

existiren müsse. Um nun die Werthe von A und B zu finden bringe man rechts Alles auf gleichen Nenner, dann wird

$$\frac{-29 + 35x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-(2A + B) + (A + B)x}{(x-1)(x-2)}$$

und da die Nenner identisch sind, so vergleiche man die Zähler, woraus für A und B die beiden Gleichungen

$$2A + B = 29, A + B = 35$$

und durch deren Auflösung die Werthe $A = -6$, $B = 41$ folgen. In der That ist auch identisch

$$\frac{-29+35x}{x^2-3x+2}=-\frac{6}{x-1}+\frac{41}{x-2}.$$

Jetzt hat die Integration keine Schwierigkeit mehr; denn man erhält

$$\int\frac{35x-29}{x^2-3x+2}dx=-6\int\frac{dx}{x-1}+41\int\frac{dx}{x-2}$$
$$=-6.\frac{1}{2}l(x-1)^2+41.\frac{1}{2}l(x-2)^2+C.$$

Hieraus geht hervor, dass es bei der Integration ächt gebrochener rationaler algebraischer Funktionen, d. i. bei Integralen von der Form

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx$$

worin $f(x)$ und $F(x)$ ganze rationale algebraische Funktionen bedeuten, hauptsächlich auf zweierlei ankommt, nämlich erstens auf die Verwandlung von $F(x)$ in ein Produkt von der Form

$$F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k) \qquad (3)$$

und dann auf eine Zerlegung nach dem Schema

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\dots+\frac{K}{x-k} \qquad (4)$$

Von diesen Aufgaben ist die erste dadurch lösbar, dass man die Wurzeln der algebraischen Gleichung $F(x)=0$ aufsucht, denn nach einem bekannten Satze findet die Gleichung (3) unmittelbar statt, wenn a, b, $c\dots k$ die Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ bedeuten. Weniger nahe dagegen liegt die Auflösung des zweiten Problemes, nämlich die Bestimmung der Grössen A, B, $C,\dots$ in der Gleichung (4), und damit müssen wir uns folglich zunächst beschäftigen.

§ 5.

Die Zerlegung ächt gebrochener Funktionen.

Die erste Frage, nämlich die nach der Möglichkeit einer Zerlegung dem aufgestellten Schema (4) gemäss, ist leicht zu beantworten. Dass in der That die fragliche Gleichung keinen Widerspruch enthält, zeigt sogleich der Versuch alle Glieder der rechten Seite auf gleichen Nenner zu bringen; der neue Zähler würde nämlich

$$A(x-b)(x-c)\dots(x-k)$$
$$+B(x-a)(x-c)\dots(x-k)$$
$$+C(x-a)(x-b)\dots(x-k)$$

sein, und da in jeder Horizontalreihe eines der Binome $(x-a)$, $(x-b)$ etc. fehlt, so ist die höchste Potenz von x, welche überhaupt vorkommen kann, um eine Einheit niedriger als die Anzahl der Grössen $a, b, c\dots$ d. h. als der Grad der Funktion $F(x)$. Denkt man sich die Multiplikationen ausgeführt und Alles nach Potenzen von x geordnet, so nimmt das Resultat die Form

$$P+Qx+Rx^2+\dots \qquad (1)$$

an, wobei $P, Q, R,\dots$ aus $A, B, C,\dots$ und $a, b, c,\dots$ zusammengesetzt sind, doch so, dass nur erste Potenzen von $A, B, C,\dots$ und auch keine Produkte aus je zweien oder dreien dieser Unbekannten vorkommen. Der Zähler (1) muss nun mit $f(x)$ oder

$$\alpha'+\beta'x+\gamma'x^2+\dots \qquad (2)$$

identisch sein, und da die Dimension von $f(x)$ niedriger als die von $F(x)$, also wenigstens um eine Einheit geringer ist, so folgt jetzt, dass die Reihen in (1) und (2) entweder gleichviel Glieder besitzen, oder die letztere deren weniger als die erste hat; in diesem zweiten Falle könnte man aber die Reihe (2) ergänzen, indem man die fehlenden Potenzen von x mit dem Coeffizienten Null versehen hinzusetzte und man darf daher immer annehmen, dass beide Reihen gleich viel Glieder besitzen. Ist nun x^n die höchste in $F(x)$ vorkommende Potenz, also n der Grad von $F(x)$, so ist x^{n-1} die höchste in Nro. (1) auftretende Potenz von x und folglich die Gliederanzahl der Reihe $=n$. Durch Vergleichung von (1) und (2) folgt jetzt weiter

$$P=\alpha', Q=\beta', R=\gamma',\dots \qquad (3)$$

und unter diesen Gleichungen könnten nach der vorigen Bemerkung einige vorkommen, deren rechte Seite die Null ist. Vermöge der Bedeutung von $P, Q, R,\dots$ stellt aber Nro. (3) nichts Anderes als n Gleichungen zwischen den n Unbekannten $A, B, C,\dots$ und den gegebenen Grössen $a, b, c, \dots, \alpha', \beta', \gamma',\dots$ dar, und da jene Gleichungen vom ersten Grade sind, so ist ihre Auflösung jederzeit möglich und liefert für jede Unbekannte einen einzigen Werth.

Wollte man diese Bestimmung selbst, die nun noch übrig ist, auf dem gewöhnlichen Wege der Elimination versuchen, so würde man

auf grosse Weitläufigkeiten stossen; kürzer dagegen kommt man auf folgendem Wege zum Ziele. Es sei H irgend eine der Grössen A, B, C,..., so stelle man die Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{H}{x-h}+\ldots+\frac{K}{x-k}$$

unter der kurzen Form

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{H}{x-h}+\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} \tag{4}$$

dar, indem man das Aggregat aller der h nicht enthaltenden Glieder mit $\varphi(x):\Phi(x)$ bezeichnet. Dieses Aggregat selbst ist ein Bruch, dessen Nenner das Produkt aus $x-a$, $x-b$,... $x-k$, mit Ausschluss von $x-h$ darstellt, und daher findet zwischen $F(x)$ und $\Phi(x)$ die einfache Relation

$$F(x)=(x-h)\,\Phi(x) \tag{5}$$

statt. Multiplizirt man damit die Gleichung (4), so wird

$$f(x)=H\Phi(x)+(x-h)\,\varphi(x)$$

und daraus ergiebt sich für $x=h$

$$H=\frac{f(h)}{\Phi(h)} \tag{6}$$

Um hier das unbekannte $\Phi(h)$ los zu werden, differenziren wir die Gleichung (5); diess giebt

$$F'(x)=(x-h)\,\Phi'(x)+\Phi(x)$$

und für $x=h$

$$F'(h)=\Phi(h)$$

nd wenn dieser Werth von $\Phi(h)$ in (6) substituirt wird

$$H=\frac{f(h)}{F'(h)}$$

also der Reihe nach:

$$A=\frac{f(a)}{F'(a)},\ B=\frac{f(b)}{F'(b)},\ C=\frac{f(c)}{F'(c)},\ldots \tag{7}$$

und hiermit haben alle Unbekannte ihre Bestimmung gefunden. Will man $F'(h)=\Phi(h)$ durch a, b, c,... unmittelbar ausgedrückt sehen, so braucht man sich nur zu erinnern, dass

$$\Phi(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-g)(x-i)\ldots(x-k)$$

ist und darin h für x zu setzen.

Die vorige Untersuchung ruht übrigens auf einer Voraussetzung, die sich zwar schon in der Bezeichnung ausspricht, aber doch noch

besonders hervorgehoben werden muss, nämlich auf der der Ungleichheit von $a, b, c, \ldots$ Denn wären auch nur zwei dieser Grössen einander gleich, etwa beispielsweis $c=b$ und einfach $F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $=(x-a)(x-b)^2$, so würde die Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{A}{x-a}+\frac{B+C}{x-b}$$

worin man $B+C$ kurz mit einem Buchstaben D bezeichnen könnte, nicht mehr richtig angenommen sein; denn da $F(x)$ von der dritten Dimension ist, muss $f(x)$ unter der Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ stehen, und sobald man jetzt die Gleichung

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{D}{x-b}$$

mit $(x-a)(x-b)(x-c)$ multiplizirt und beiderseits die Coeffizienten gleicher Potenzen von x vergleicht, so findet man drei Gleichungen zur Bestimmung von nur zwei Unbekannten A und D, woraus die Unmöglichkeit der A und D oder die Unrichtigkeit der obigen Annahme hervorgeht. Diess würde ganz ähnlich und noch stärker der Fall sein, wenn die Gleichung $F(x)$ mehrere gleiche Wurzeln besässe und überhaupt

$$F(x)=(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots \qquad (8)$$

wäre, wo $m, n, p, \ldots$ positive ganze Zahlen bezeichnen. Hier verfährt man nun auf folgende Weise. Es ist zunächst leicht zu sehen, dass

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f_1(x)}{(x-a)^m}+\frac{f_2(x)}{(x-b)^n}+\frac{f_3(x)}{(x-c)^p}+\ldots \qquad (9)$$

gesetzt werden darf, worin $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ gewisse vor der Hand noch unbekannte ganze rationale und algebraische Funktionen bezeichnen, deren Grad jedesmal geringer als der des Nenners ist, über welchem sie stehen. Da nämlich $F(x)$ vom Grade $m+n+p+\ldots$ ist, wobei kurz

$$m+n+p+\ldots=s$$

sein möge, so ist $f(x)$ von der Form

$$f(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots+\sigma x^{s-1}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma\ldots\sigma$ bekannte Grössen, die theilweis $=0$ sein können, bezeichnen. Setzen wir nun

$$f_1(x)=\alpha_1+\beta_1 x+\gamma_1 x^2+\ldots+\mu_1 x^{m-1}$$
$$f_2(x)=\alpha_2+\beta_2 x+\gamma_2 x^2+\ldots+\nu_2 x^{n-1}$$
u. s. w.

und multipliziren darauf die Gleichung (9) mit Nro. (8), so wird

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots+\sigma x^{s-1}\\ &=(\alpha_1+\beta_1 x+\gamma_1 x^2+\ldots+\mu_1 x^{m-1})(x-b)^n(x-c)^p\ldots\\ &+(\alpha_2+\beta_2 x+\gamma_2 x^2+\ldots+\nu_2 x^{n-1})(x-a)^m(x-c)^p\ldots\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und hieraus wären die s unbekannten Constanten $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ zu entwickeln. Denkt man sich die angedeuteten Multiplikationen ausgeführt, so enthält jede Horizontalreihe alle Potenzen von x von der nullten bis zur $(m+n+p+\ldots-1)^{ten}$ d. h. $(s-1)^{ten}$ und das Resultat nimmt die Form

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots+\sigma x^{s-1}\\ &=P+Qx+Rx^2+\ldots+Sx^{s-1}\end{aligned}$$

an; dabei bezeichnen $P, Q, R, \ldots$ Grössen, welche aus $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ zusammengesetzt sind, doch so, dass nur erste Potenzen dieser Unbekannten, aber keine Produkte von je zweien, dreien etc. darin vorkommen. Da nun $P=\alpha$, $Q=\beta, \ldots S=\sigma$ sein muss, so erhält man jetzt s Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der s Unbekannten, und damit rechtfertigt sich die Möglichkeit einer Zerlegung nach dem Schema (9).

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. Sei nämlich $\psi(x)$ irgend eine der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ und

$$\frac{\psi(x)}{(x-h)^r}$$

ein beliebiges Glied der Reihe in (9), so lässt sich durch Anwendung des Taylorschen Theoremes dieses Glied in r andere zerlegen, deren Zähler constant sind. Dem genannten Theoreme zufolge ist nämlich

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\psi(h+\overline{x-h})\\ &=\psi(h)+\frac{\psi'(h)}{1}(x-h)+\frac{\psi''(h)}{1.2}(x-h)^2+\ldots+\frac{\psi^{(r-1)}(h)}{1.2\ldots(r-1)}(x-h)^{r-1}\\ &\quad+\frac{\psi^{(r)}(h+\lambda\overline{x-h})}{1.2\ldots r}(x-h)^r.\end{aligned}$$

Es steht aber $\psi(x)$ unter der Form $\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2+\ldots+\varrho' x^{r-1}$ und

folglich ist $\psi^{(r)}(x)=0$, ebenso $\psi^{(r)}(x+\lambda\overline{x-h})=0$, und damit verschwindet das letzte Glied der vorigen Reihe. Setzen wir noch zur Abkürzung $\psi(h)=H, \psi'(h)=H_1, \ldots \psi^{(r-1)}(h)=H_{r-1}$, so ergiebt sich jetzt durch Division mit $(x-h)^r$

$$\frac{\psi(x)}{(x-h)^r}$$

$$=\frac{H}{(x-h)^r}+\frac{H_1}{1}\frac{1}{(x-h)^{r-1}}+\frac{H_2}{1.2}\frac{1}{(x-h)^{r-2}}+\ldots+\frac{H_{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}\frac{1}{x-h}.$$

Bezeichnen wir endlich $1.2\ldots k$ kurz mit k', und wenden diese Zerlegung auf jedes einzelne Glied der Gleichung (9) an, so wird

$$\frac{f(x)}{F(x)}= \tag{10}$$

$$\frac{A}{(x-a)^m}+\frac{A_1}{1'}\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A_2}{2'}\frac{1}{(x-a)^{m-2}}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{(m-1)'}\frac{1}{x-a}$$
$$+\frac{B}{(x-b)^n}+\frac{B_1}{1'}\frac{1}{(x-b)^{n-1}}+\frac{B_2}{2'}\frac{1}{(x-b)^{n-2}}+\ldots+\frac{B_{n-1}}{(n-1)'}\frac{1}{x-b}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{H}{(x-h)^r}+\frac{H_1}{1'}\frac{1}{(x-h)^{r-1}}+\frac{H_2}{2'}\frac{1}{(x-h)^{r-2}}+\ldots+\frac{H_{r-1}}{(r-1)'}\frac{1}{x-h}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Bestimmung der Coeffizienten kann man nun entweder durch wirkliche Ausführung des bisher blos angedeuteten Calculs ermöglichen, oder auch folgenden kürzeren Weg einschlagen. Sei $\varphi(x):\Phi(x)$ das Aggregat aller der Glieder, welche keine Potenzen von $(x-h)$ enthalten, also

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{H}{(x-h)^r}+\frac{H_1}{1'}\frac{1}{(x-h)^{r-1}}+\frac{H_2}{2'}\frac{1}{(x-h)^{r-2}}+\ldots+\frac{H_{r-1}}{(r-1)'}\frac{1}{x-h}$$
$$+\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} \tag{11}$$

so sind $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ zwei rationale und ganze algebraische Funktionen und zwar die letztere gleich dem Produkte der Nenner $(x-a)^m$, $(x-b)^n$, ... mit Ausschluss von $(x-h)^r$, also

$$\Phi(x)=\frac{F(x)}{(x-h)^r}. \tag{12}$$

Aus der Gleichung (11) folgt dann durch Multiplikation mit, $F(x)=(x-h)^r\Phi(x)$, wenn zur Abkürzung

$$H + \frac{H_1}{1}(x-h) + \frac{H_2}{2}(x-h)^2 + \dots + \frac{H_{r-1}}{(r-1)}(x-h)^{r-1} = X \quad (13)$$

gesetzt wird, die neue Gleichung

$$f(x) = X\Phi(x) + (x-h)^r \varphi(x)$$

oder

$$f(x) - X\Phi(x) = (x-h)^r \varphi(x).$$

Der $q$te Differenzialquotient hiervon ist für $q < r$

$$f^{(q)}(x) - \left[q_0 X \Phi^{(q)}(x) + q_1 \frac{dX}{dx}\Phi^{(q-1)}(x) + q_2 \frac{d^2X}{dx^2}\Phi^{(q-2)}(x) + \dots\right]$$
$$= q_0 (x-h)^r \varphi^{(q)}(x) + q_1 r (x-h)^{r-1} \varphi^{(q-2)}(x) + \dots$$
$$+ q_q r(r-1)\dots(r-q+1)(x-h)^{r-q}\varphi(x),$$

wobei $q_0, q_1, q_2, \dots$ wie gewöhnlich die Binominalkoeffizienten des Exponenten q bedeuten und die bekannte Regel für die Differenziation der Produkte in Anwendung gebracht worden ist. Setzen wir jetzt $x = h$, so annullirt sich wegen $q < r$ die ganze rechte Seite; ferner wird nach Nro. (13) für $x = h$

$$X = H, \frac{dX}{dx} = H_1, \frac{d^2X}{dx^2} = H_2, \dots$$

und folglich bleibt

$$f^{(q)}(h) - [q_0 H \Phi^{(q)}(h) + q_1 H_1 \Phi^{(q-1)}(h) + q_2 H_2 \Phi^{(q-2)}(h) + \dots].$$

Setzt man nun $q = 0, 1, 2, 3, \dots (r-1)$, so erhält man zur Bestimmung der r Unbekannten $H, H_1, H_2, \dots H_{r-1}$ folgende r Gleichungen:

$$f(h) = H\Phi(h)$$
$$f'(h) = 1_0 H\Phi'(h) + 1_1 H_1 \Phi(h)$$
$$f''(h) = 2_0 H\Phi''(h) + 2_1 H_1 \Phi'(h) + 2_2 H_2 \Phi(h)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f^{(r-1)}(h) = (r-1)_0 H\Phi^{(r-1)}(h) + (r-1)_1 H_1 \Phi^{(r-2)}(h) + \dots$$
$$\dots + (r-1)_{r-1} H_{r-1}\Phi(h)$$

also der Reihe nach

$$H = \frac{f(h)}{\Phi(h)}$$

$$H_1 = \frac{f'(h)}{\Phi(h)} - \frac{f(h)\Phi'(h)}{\Phi(h)^2}$$

u. s. f.

Auf gleiche Weise lassen sich alle übrigen Coeffizienten bestimmen, was freilich unter Umständen eine ziemlich lange, wenn auch nicht schwere Rechnung geben kann.

§ 6.

Allgemeine Regel zur Integration ächt gebrochener rationaler algebraischer Differenzialformeln.

Nach den Untersuchungen über die Zerfällung ächt gebrochener rationaler algebraischer Funktionen hat es nicht die mindeste Schwierigkeit mehr, derartige Funktionen zu integriren. Da nämlich der Quotient

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

sich in eine Reihe Brüche zerlegen lässt, welche sämmtlich unter der Form

$$\frac{K}{(x-k)^s}$$

begriffen sind, so reduzirt sich das Integral

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\, dx$$

auf eine Summe einzelner Integrale, deren gemeinschaftlicher Typus durch

$$\int \frac{K}{(x-k)^s}\, dx = K\int (x-k)^{-s}\, dx$$

ausgedrückt wird. Ist nun s von der Einheit verschieden, so wird das Integral

$$= K\frac{(x-k)^{-s+1}}{-s+1} = -\frac{K}{s-1}\,\frac{1}{(x-k)^{s-1}},$$

für $s = -1$ dagegen wird

$$\int \frac{K}{x-k}\, dx = \tfrac{1}{2} K\, l\, (x-k)^2;$$

und so kann man in jedem Falle die einzelnen Bestandtheile des Integrales völlig entwickelt angeben. Um nach dieser Methode z. B. das Integral

$$\int \frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}\, dx$$

zu entwickeln, verfährt man folgendermassen. Zunächst sucht man die Wurzeln der Gleichung

$$x^3-5x^2+3x+9=0$$

auf; eine davon nämlich $x=3$ erräth man leicht, und durch Division mit $x-3$ kommt man auf eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln $x=-1$, $x=3$; demnach sind $x-3$, $x+1$, $x-3$ die Faktoren von x^3-5x^2+3x+9 oder diese Funktion ist $=(x-3)^2(x+1)$. Setzt man ferner

$$\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}=\frac{Ax+B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+1}$$

so findet man leicht $A=17$, $B=-56$, $C=-8$, ferner

$$17x-56=-5+17(x-3)$$

und folglich

$$\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}=-\frac{5}{(x-3)^2}+\frac{17}{x-3}-\frac{8}{x+1}.$$

Die Integration der einzelnen Bestandtheile giebt hier

$$\int\frac{9x^2+9x-128}{x^3-5x^2+3x+9}dx$$
$$=-5\int\frac{dx}{(x-3)^2}+17\int\frac{dx}{x-3}-8\int\frac{dx}{x+1}$$
$$=\frac{5}{x-3}+\frac{17}{2}l(x-3)^2-4l(x+1)^2+C.$$

Diese Integrationsmethode ist immer anwendbar, wenn die Coeffizienten, welche in $F(x)$ vorkommen, in Zahlen gegeben sind, weil man jede numerische algebraische Gleichung wenigstens näherungsweis auflösen kann. Sind dagegen jene Coeffizienten allgemeine Symbole (Buchstaben), so lassen sich auch nur so weit allgemeine Integralformeln aufstellen, als die Auflösung litteraler Gleichungen möglich ist, also nur bis zum vierten Grade, wenn nicht besondere Formen von $F(x)$ in dieser Hinsicht Vortheile darbieten.

Besondere Erwähnung verdient noch ein Fall, der für einen Augenblick Bedenken erregen könnte, nämlich das Vorkommen imaginärer Wurzeln in der Gleichung $F(x)=0$. Diess ändert jedoch in dem ganzen Verfahren nichts, weil die Gleichungen

$$\int(x+k)^s dx=\frac{(x+k)^{s+1}}{s+1}+C \qquad (1)$$

$$\int\frac{dx}{x+k}=\frac{1}{2}l(x+k)^2+C \qquad (2)$$

welche allein in Anwendung gebracht werden, für imaginäre k ebenso

wie für reelle k bestehen, was man auf folgende Weise einsieht. Sie $k = \varkappa + \lambda\sqrt{-1}$, so ist bekanntlich, wenn

$$\varrho^2 = (x+\varkappa)^2 + \lambda^2, \tan\omega = \frac{\lambda}{x+\varkappa} \qquad (3)$$

gesetzt wird,

$$x + k = \varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$$

folglich

$$\frac{(x+k)^{s+1}}{s+1} = \frac{\varrho^{s+1}\cos(s+1)\omega + \sqrt{-1}\,\varrho^{s+1}\sin(s+1)\omega}{s+1}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Differenziation nach x sehr leicht

$$\left.\begin{array}{l} d\left[\dfrac{(x+k)^{s+1}}{s+1}\right] \\ = \varrho^s\left\{\cos(s+1)\omega\,\dfrac{d\varrho}{dx} - \varrho\sin(s+1)\omega\,\dfrac{d\omega}{dx}\right\}dx \\ + \sqrt{-1}\,\varrho^s\left\{\sin(s+1)\omega\,\dfrac{d\varrho}{dx} - \varrho\cos(s+1)\omega\,\dfrac{d\omega}{dx}\right\}dx \end{array}\right\} \quad (4)$$

Nun findet man aber aus den Gleichungen (3) ohne Schwierigkeit

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{x+\varkappa}{\sqrt{(x+\varkappa)^2+\lambda^2}}, \quad \frac{d\omega}{dx} = -\frac{\lambda}{(x+\varkappa)^2+\lambda^2}$$

zugleich aber auch

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\omega}} = \frac{x+\varkappa}{\sqrt{(x+\varkappa)^2+\lambda^2}}$$

$$\sin\omega = \frac{\tan\omega}{\sqrt{1+\tan^2\omega}} = \frac{\lambda}{\sqrt{(x+\varkappa)^2+\lambda^2}}$$

und folglich

$$\frac{d\varrho}{dx} = \cos\omega, \quad \frac{d\omega}{dx} = -\frac{\sin\omega}{\varrho}.$$

Mittelst dieser Werthe nimmt die Gleichung (4) die Gestalt

$$\begin{array}{l} d\left[\dfrac{(x+k)^{s+1}}{s+1}\right] \\ = \varrho^s\{\cos(s+1)\omega\cos\omega + \sin(s+1)\omega\sin\omega\}dx \\ + \sqrt{-1}\,\varrho^s\{\sin(s+1)\omega\cos\omega - \cos(s+1)\omega\sin\omega\}dx \\ = \varrho^s\{\cos s\omega + \sqrt{-1}\sin s\omega\}dx = [\varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)]^s dx \end{array}$$

d. i.

$$d\left[\frac{(x+k)^{s+1}}{s+1}\right] = (x+k)^s dx$$

an, für den Fall des imaginären $k=\varkappa+\lambda\sqrt{-1}$. Nach dem Begriffe des Integrales folgt hieraus sogleich die Richtigkeit der Gleichung (1) für imaginäre k. Eben so leicht ergiebt sich die der zweiten. Es ist nämlich für $k=\varkappa+\lambda\sqrt{-1}$

$$\tfrac{1}{2}l(x+k)^2=l(x+\varkappa+\lambda\sqrt{-1})$$
$$=\tfrac{1}{2}l[(x+\varkappa)^2+\lambda^2]+\sqrt{-1}\,\mathrm{Arctan}\frac{\lambda}{x+\varkappa},$$

folglich durch Differenziation

$$d[\tfrac{1}{2}l(x+k)^2]=\left[\frac{x+\varkappa}{(x+\varkappa)^2+\lambda^2}-\sqrt{-1}\,\frac{\lambda}{(x+\varkappa)^2+\lambda^2}\right]dx$$
$$=\frac{x+\varkappa-\lambda\sqrt{-1}}{(x+\varkappa)^2+\lambda^2}\,dx=\frac{dx}{x+\varkappa+\lambda\sqrt{-1}},$$

d. i.

$$d\left[\tfrac{1}{2}l(x+k)^2\right]=\frac{dx}{x+k},$$

woraus durch Umkehrung nach dem Begriffe der Integration der Beweis resultirt, dass die Gleichung (2) auch für imaginäre k Bestand hat.

Sind nun einige der Wurzeln $a, b, c, \ldots$ der Gleichung $F(x)=0$ imaginär, so stellt sich das Integral

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx$$

unter eine theilweis imaginäre Form, da aber das Integral selbst jedenfalls reell sein muss, wegen der Realität von $\frac{f(x)}{F(x)}$, so folgt a priori, dass das Imaginäre in jener Form nur scheinbar sein kann. Diess bestätigt sich in der That durch die Bemerkung, dass die imaginären Wurzeln jederzeit paarweis vorkommen und dass wenn $k=\varkappa+\lambda\sqrt{-1}$ eine derartige Wurzel ist, irgend eine andere von den Grössen $a, b, c, \ldots$ etwa h von der Form $\varkappa-\lambda\sqrt{-1}$ sein muss. Diesen zwei conjugirten Wurzeln entsprechen dann die Integrale

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x-k)^s}&=-\frac{1}{s-1}(x-\varkappa-\lambda\sqrt{-1})^{1-s}+C\\ \int\frac{dx}{(x-h)^s}&=-\frac{1}{s-1}(x-\varkappa+\lambda\sqrt{-1})^{1-s}+C\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

oder wenn $s=1$ wäre

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dx}{x-k}&=\tfrac{1}{2}\,l(x-\varkappa-\lambda\sqrt{-1})^2+C\\ \int\frac{dx}{x-h}&=\tfrac{1}{2}\,l(x-\varkappa+\lambda\sqrt{-1})^2+C\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

und das Aggregat der zwei Integrale in (5) und (6) ist jederzeit reell, nämlich im ersten Falle

$$-\frac{1}{s-1}\,2\,\varrho^{1-s}\cos(1-s)\,\omega$$

wenn $x-\varkappa+\lambda\sqrt{-1}=\varrho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$ gesetzt wird, und im zweiten Falle

$$=2\,l[(x+\varkappa)^2+\lambda^2].$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir zu den Fällen über, in welchen die Gleichung $F(x)=0$ eine Auflösung in Buchstaben zulässt; es sind deren nur vier, nämlich $F(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $F(x)=(x^2+\alpha x+\beta)^n$, $F(x)=x^n\pm 1$ und $F(x)=x^{2n}-2x^n\cos\gamma+1$; denn obschon man die Gleichung $F(x)=0$ auch für den Fall, dass $F(x)$ vom 3ten oder 4ten Grade ist, allgemein auflösen kann, so sind doch die Ausdrücke für die Wurzeln zu complizirt, als dass man für unseren Zweck davon Gebrauch machen könnte.

§ 7.

Entwickelung für den Fall $F(x)=x^2+\alpha x+\beta$.

Da die Dimension von $f(x)$ immer niedriger als die von $F(x)$ vorausgesetzt wird, so kann $f(x)$ nur von der Form $\alpha' x+\beta'$ sein. Nennen wir a und b die Wurzeln der Gleichung

$$x^2+\alpha x+\beta=0 \quad (1)$$

und setzen

$$\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$A=\frac{a\alpha'+\beta'}{a-b},\; B=-\frac{b\alpha'+\beta'}{a-b} \quad (2)$$

und für die so bestimmten Werthe von A und B ist nach dem Vorigen

$$\int \frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx=\int\frac{A\,dx}{x-a}+\int\frac{B\,dx}{x-b}$$
$$=\tfrac{1}{2}A\,l(x-a)^2+\tfrac{1}{2}B\,l(x-b)^2+C. \quad (3)$$

Hier kann man sich denken, dass die willkührliche Constante von der Form

$$C=\tfrac{1}{2}A\,l(2^2)+\tfrac{1}{2}B\,l(2^2)+C'$$

sei, wo C' wieder eine willkührliche Constante bezeichnet, und dann wird

$$\int\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx=\tfrac{1}{2}A\,l(2x-2a)^2+\tfrac{1}{2}B\,l(2x-2b)^2+C' \quad (4)$$

was wegen der Werthe von a und b bequemer ist, wie man sogleich sehen wird. Substituirt man nämlich für die Wurzeln a und b ihre Werthe:

$$\left.\begin{aligned} a&=-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}\\ b&=-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

erst in A und B und darauf in die Gleichung (4), so ergiebt sich sogleich:

$$\int\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx=\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})\,\alpha'-2\beta'}{4\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\,l\,(2x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})^2$$
$$-\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta})\,\alpha'-2\beta'}{4\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\,l(2x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta})^2+C'. \quad (5)$$

Will man in dieser Formel die Symmetrie aufgeben, so kann man sie leicht vereinfachen, indem man diejenigen Grössen zusammennimmt, welche gleiche Coeffizienten besitzen; diess giebt

$$\int\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx=\frac{\alpha\alpha'-2\beta'}{4\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\,l\left[\frac{2x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\right]^2$$
$$+\frac{\alpha'}{4}\,l[(2x+\alpha)^2-(\alpha^2-4\beta)]^2+C'.$$

Setzt man $C'=C-\frac{1}{2}\alpha'\,l[4^2]$, so folgt noch

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx&=\frac{\alpha'}{4}\,l(x^2+\alpha x+\beta)^2\\ &+\frac{\alpha\alpha'-2\beta'}{4\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\,l\left[\frac{2x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\right]^2+C.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese Formel gestattet unmittelbare Anwendung sobald $\sqrt{\alpha^2-4\beta}$ reel, also $\alpha^2>4\beta$ ist; für $\alpha^2<4\beta$ dagegen bedarf sie einer Umwandlung, indem man

$$\sqrt{4\beta-\alpha^2}\sqrt{-1} \text{ statt } \sqrt{\alpha^2-4\beta}$$

setzt. Bringt man jetzt auf der rechten Seite von (6) die bekannte Formel

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{p+q\sqrt{-1}}{p-q\sqrt{-1}}\right)=\text{Arctan}\frac{q}{p}=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\frac{p}{q}$$

für $p=2x+\alpha$, $q=\sqrt{4\beta-\alpha^2}$ in Anwendung, so geht das zweite Glied auf der rechten Seite von (6) in

$$\frac{\alpha\alpha'-2\beta'}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\left[\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right]$$

über, wobei man das erste durch Auflösung der Klammer zum Vorschein kommende Produkt auf die Weise in die Constante C einrechnen kann, dass man

$$C+\frac{\alpha\alpha'-2\beta'}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}=C'$$

setzt; es ergiebt sich dann zufolge der bisher gemachten Bemerkungen für $\alpha^2<4\beta$:

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}dx&=\frac{\alpha'}{4}\,l(x^2+\alpha x+\beta)^2\\&\quad-\frac{\alpha\alpha'-2\beta'}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\text{Arctan}\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}+C'.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Wären endlich die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2+\alpha x+\beta=0$ einander gleich, also $4\beta=\alpha^2$ und $x^2+\alpha x+\beta=(x+\frac{1}{2}\alpha)^2$, so kann man keine der Formeln (6) und (7) benutzen, weil ihre Herleitung auf einer dann nicht mehr gültigen Zerfällung beruht. Man setzt in diesem Falle

$$\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}=\frac{A}{(x+\frac{1}{2}\alpha)^2}+\frac{B}{x+\frac{1}{2}\alpha}$$

findet für A und B die Werthe $A=\beta'-\frac{1}{2}\alpha\alpha'$, $B=\alpha'$, und hat durch Integration

$$\begin{aligned}\int\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}dx&=A\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2}\alpha)^2}+B\int\frac{dx}{x+\frac{1}{2}\alpha}\\&=(\beta'-\tfrac{1}{2}\alpha\alpha')\frac{-1}{x+\frac{1}{2}\alpha}+\alpha'\,\tfrac{1}{2}\,l(x+\tfrac{1}{2}\alpha)^2+C,\end{aligned}$$

wofür man wegen $(x+\frac{1}{2}\alpha)^2=x^2+\alpha x+\beta$ auch

$$\int \frac{\alpha' x + \beta'}{x^2 + \alpha x + \beta} dx = \frac{\alpha\alpha' - 2\beta}{2\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}} + \frac{\alpha'}{2} l(x^2 + \alpha x + \beta) + C \quad (8)$$

schreiben kann.

Die Formeln (6), (7) und (8) lassen sich übrigens auch auf einem anderen, mehr vom Besondern zum Allgemeineren gehenden Wege auffinden, was wir noch mit wenigen Worten andeuten wollen. Zerlegt man nämlich

$$\frac{\alpha' x + \beta'}{x^2 + \alpha x + \beta} \text{ in } \alpha' \frac{x}{x^2 + \alpha x + \beta} + \beta' \frac{1}{x^2 + \alpha x + \beta}$$

so erhellt, dass es zunächst nur darauf ankommt, die Integrale

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + \alpha x + \beta} \text{ und } \int \frac{dx}{x^2 + \alpha x + \beta}$$

zu entwickeln, und da hier das zweite Integral etwas einfacher als das erste ist, so fangen wir bei ihm die Untersuchung an. Setzen wir zur Abkürzung

$$p = \tfrac{1}{2}\alpha, \; q = \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$$

so ist, wie auf der Stelle erhellt,

$$\int \frac{dx}{x^2 + \alpha x + \beta} = \int \frac{x}{(x + p)^2 - q^2}$$

und dieses Integral geht durch die Substitution $x + p = z$ in

$$\int \frac{dz}{z^2 - q^2} = -\int \frac{dz}{q^2 - z^2}$$

über, dessen Werth sich unmittelbar aus der Formel (4) in §. 2 findet; er ist

$$-\frac{1}{4q} l\left(\frac{q + z}{q - z}\right)^2 = -\frac{1}{4q} l\left(\frac{z + q}{z - q}\right)^2 + C. \quad (9)$$

Substituiren wir rückwärts zuerst den Werth von z und darauf die Werthe von p und q, so wird

$$\int \frac{dx}{x^2 + \alpha x + \beta} = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} l\left(\frac{2x + \beta + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2x + \beta - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\right)^2 + C. \quad (9)$$

Wäre dagegen $\alpha^2 < 4\beta$, so setze man

$$p = \tfrac{1}{2}\alpha, \; q = \tfrac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}$$

und dann hat man

$$\int \frac{dx}{x^2 + \alpha x + \beta} = \int \frac{dx}{(x + p)^2 + q^2}$$

und mit Hülfe der Substitution $x+p=z$ wird hieraus

$$\int\frac{dz}{q^2+z^2}=\frac{1}{q}\operatorname{Arctan}\frac{z}{q}+C,$$

wenn man sogleich die Formel (5) in §. 2 benutzt. Vermöge der Werthe von z, p und q ergiebt sich nun

$$\int\frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}=\frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}+C \qquad (10)$$

Für $4\beta=\alpha^2$ endlich hat man unmittelbar

$$\int\frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2}\alpha)^2}=-\frac{1}{x+\frac{1}{2}\alpha}+C.$$

Es hat nun auch keine Schwierigkeit mehr, das zweite der gesuchten Integrale zu entwickeln; für $X=x^2+\alpha x+\beta$ ist nämlich

$$dX=2x\,dx+\alpha\,dx$$

oder

$$x\,dx=\tfrac{1}{2}dX-\frac{\alpha}{2}dx$$

folglich durch beiderseitige Division mit X und nachherige Integration

$$\int\frac{x\,dx}{X}=\frac{1}{2}\int\frac{dX}{X}-\frac{\alpha}{2}\int\frac{dx}{X}$$
$$=\frac{1}{4}l(X^2)-\frac{\alpha}{2}\int\frac{dx}{X}$$

d. i. nach der Bedeutung von X

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+\alpha x+\beta}=\frac{1}{4}l(x^2+\alpha x+\beta)^2$$
$$-\frac{\alpha}{2}\int\frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}+C.$$

Da man nun in jedem Falle den Werth des Integrales rechts aufstellen kann, so ergiebt sich von selbst der Werth des Integrales links; geht man nach vollständiger Entwickelung für die drei Fälle wieder auf das Integral

$$\int\frac{\alpha' x+\beta'}{x^2+\alpha x+\beta}dx$$

zurück, so findet man dafür ganz dieselben Formeln wie vorhin unter

(6), (7) und (8). Man kann diese letzteren noch etwas verallgemeinern, wenn man

$$\alpha=\frac{b}{c}\,,\ \beta=\frac{a}{c}\,,\ \alpha'=B\,,\ \beta'=A$$

setzt und darauf beiderseits mit C dividirt. Es ergiebt sich so ohne Schwierigkeit

1. aus Nro. (8) für $b^2=4ac$

$$\int\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}dx=-\frac{2Ac-Bb}{c(b+2cx)}+\frac{B}{2c}l(b+2cx)^2+C' \qquad (11)$$

2. für $b^2>4ac$ nach Nro. (6)

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}dx=-\frac{2Ac-Bb}{4c\sqrt{b^2-4ac}}\,l\left[\frac{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}\right]^2\\ \displaystyle\qquad\qquad+\frac{B}{4c}l(a+bx+cx^2)^2+C'\end{array}\right\}(12)$$

3. für $b^2<4ac$ nach Nro. (7)

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}dx=\frac{2Ac-Bb}{c\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{Arctan}\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}\\ \displaystyle\qquad\qquad+\frac{B}{4c}l(a+bx+cx^2)+C'\end{array}\right\}(13)$$

und dabei sind immer die Logarithmen constanter Grössen mit in die früheren Integrationsconstanten eingerechnet.

§ 8.

Entwickelungen für den Fall $F(x)=(a+bx+cx^2)^n$.

Aus dem Bisherigen geht hervor, dass sich auch Integrale von der Form

$$\int\frac{A+Bx+Cx^2+\ldots+Mx^m}{(a\,x\,bx+cx^2)^n}dx \qquad (1)$$

vollständig entwickeln lassen müssen; setzen wir nämlich $m<2n$ voraus und nennen h, k die Wurzeln der Gleichung $a+bx+cx^2=0$, so nimmt das Integral die Form

$$\int\frac{f(x)}{(x-h)^n(x-k)^n}dx$$

an und reduzirt sich auf die Reihe Integrale

$$\int \frac{H dx}{(x-h)^n} + \int \frac{H_1 dx}{(x-h)^{n-1}} + \dots + \int \frac{H_{n-1} dx}{x-h}$$
$$+ \int \frac{K dx}{(x-k)^n} + \int \frac{K_1 dx}{(x-k)^{n-1}} + \dots + \int \frac{K_{n-1} dx}{x-k},$$

welche sämmtlich vermöge der bekannten Werthe von h, k, H, $H_1, \dots$ $\dots$, K, K_1, .. entwickelbar sind; die wirkliche Ausführung dieses Gedankens ist jedoch so weitläufig, dass wir einen anderen Weg einzuschlagen genöthigt sind.

Bezeichnen wir zur Abkürzung $a+bx+cx^2$ mit X, so findet man durch Integration der einzelnen Summanden in (1), dass sich das fragliche Integral auf die folgenden reduzirt

$$A\int \frac{dx}{X^n} + B\int \frac{x dx}{X^n} + C\int \frac{x^2 dx}{X^n} + \dots \tag{2}$$

so dass es also blos darauf ankommen würde, das Integral

$$\int \frac{x^m dx}{X^n}, \; m < 2n \tag{3}$$

zu entwickeln, weil sich daraus alle einzelnen in (2) vorkommenden Integrale für $m=0,1,2,3,\dots$ von selbst ergeben würden. Gesetzt nun, es gäbe eine Regel, nach welcher man aus dem Integrale $\int \frac{dx}{X}$ der Reihe nach die Integrale

$$\int \frac{dx}{X^2}, \int \frac{dx}{X^3}, \dots \int \frac{dx}{X^n} \tag{4}$$

und dann eine zweite, wonach man aus $\int \frac{dx}{X^n}$ die Integrale

$$\int \frac{x dx}{X^n}, \int \frac{x^2 dx}{X^n}, \dots \int \frac{x^m dx}{X^n} \tag{5}$$

ableiten könnte, so wäre offenbar die Aufgabe als damit gelöst zu betrachten, in so fern man so die Ausführung der in (3) postulirten Integration auf einen blosen Mechanismus gebracht hätte; um aber eine solche Regel zu finden bedarf es der Aufsuchung von Gleichungen zwischen

$$\int \frac{x^m dx}{X^n}, \int \frac{x^{m-1} dx}{X^n}, \int \frac{x^{m-2} dx}{X^n}, \dots$$

einerseits, und dann wieder zwischen

$$\int \frac{dx}{X^n}, \int \frac{dx}{X^{n-1}}, \int \frac{dx}{X^{n-2}}, \dots$$

indem man nach diesem Schema das Integral in (3) auf immer einfachere Integrale zurückführt, bis man auf eines von den im vorigen Paragraphen entwickelten Integralen stösst.

Dieser Gedanke lässt sich nun auf folgende Weise ausführen.

I. Differenzirt man $\frac{x^{m-1}}{X^{n-1}}$ mit der Bemerkung, dass $dX=(b+2cx)dx$ ist, so ergiebt sich

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{X^{n-1}}\right)=(m-1)\frac{x^{m-2}}{X^{n-1}}dx-(n-1)\frac{x^{m-1}}{X^n}(b+2cx)\,dx.$$

Multiplizirt man Nenner und Zähler des ersten Bruches mit $X=a+bx+cx^2$ und ordnet darauf Alles nach Potenzen von x, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{X^{n-1}}\right)=-(2n-m-1)\,c\,.\frac{x^m dx}{X^n}$$
$$-(n-m)\,b\,.\frac{x^{m-1}dx}{X^n}+(m-1)\,a\,.\frac{x^{m-2}dx}{X^n},$$

und hieraus ergiebt sich durch Integration

$$\frac{x^{m-1}}{X^{n-1}}=-(2n-m-1)c\int\frac{x^m\,dx}{X^n}$$
$$-(n-m)\,b\int\frac{x^{m-1}dx}{X^n}+(m-1)\,a\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^n}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{x^m dx}{X^n}=&-\frac{1}{(2n-m-1)c}\,\frac{x^{m-1}}{X^{n-1}}\\&-\frac{(n-m)\,b}{(2n-m-1)c}\int\frac{x^{m-1}dx}{X^n}+\frac{(m-1)\,a}{(2n-m-1)c}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^n}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Hiermit ist eine Reduktionsformel gefunden, welche das Integral zunächst auf zwei andere zurückbringt, worin x^{m-1} und x^{m-2} statt x^m im Zähler stehen; wendet man auf diese letzteren die Formel selbst wieder an, indem man $m-1$ für m schreibt, so kommt man auf zwei andere Integrale, welche x^{m-2} und x^{m-3} im Zähler haben, und wenn man diese Reduktion so fortsetzt, so gelangt man in letzter Instanz zu den beiden Integralen

$$\int\frac{xdx}{X^n}\text{ und}\int\frac{dx}{X^n}\qquad(7)$$

für welche sich ebenfalls wieder Reduktionsformeln aufstellen lassen, wie man sogleich sehen wird.

II. Aus der Gleichung $(b+2cx)\,dx=dX$ folgt zunächst

$$xdx=\frac{1}{2c}\,dX-\frac{b}{2c}\,dx$$

ferner durch Division mit X^n und nachherige Integration

$$\int\frac{xdx}{X^n}=\frac{1}{2c}\int\frac{dX}{X^n}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^n}$$

d. i.

$$\int\frac{xdx}{X^n}=-\frac{1}{2(n-1)\,c}\,\frac{1}{X^{n-1}}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^n} \qquad (8)$$

und hieraus erkennt man auf der Stelle, dass es blos noch auf das Integral rechts, das zweite in Nro. (7), ankommt.

III. Dividirt man die Gleichung $(b+2cx)\,dx=X$ durch $(b+2cx)X^n$, so ist

$$\frac{dx}{X^n}=\frac{dX}{(b+2cx)\,X^n};$$

multiplizirt man ferner diese Gleichung mit der folgenden, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt,

$$4cX-(4ac-b^2)=(b+2cx)^2$$

so wird

$$4c\,\frac{dx}{X^{n-1}}-(4ac-b^2)\,\frac{dx}{X^n}=\frac{(b+2cx)\,dX}{X^n},$$

und durch Integration, wenn zur Abkürzung $4ac-b^2$ mit k bezeichnet wird:

$$4c\int\frac{dx}{X^{n-1}}-k\int\frac{dx}{X^n}=\int\frac{(b+2cx)dX}{X^n}. \qquad (9)$$

Auf das Integral rechter Hand kann man die bekannte Regel partieller Integration auf folgende Weise anwenden:

$$\int\frac{(b+2cx)dX}{X^n}=(b+2cx)\int\frac{dX}{X^n}-\int d(b+2cx)\int\frac{dX}{X^n}$$

$$=-\frac{b+2cx}{(n-1)\,X^{n-1}}+\frac{2c}{n-1}\int\frac{dx}{X^{n-1}}$$

und wenn man diess in die Gleichung (9) substituirt, nimmt letztere die Form an:

$$4c\int\frac{dx}{X^{n-1}}-k\int\frac{dx}{X^n}=-\frac{b+2cx}{(n-1)\,X^{n-1}}+\frac{2c}{n-1}\int\frac{dx}{X^{n-1}}$$

woraus man durch Vereinigung des Gleichartigen auf beiden Seiten und nachherige Division mit k die Formel

$$\int \frac{dx}{X^n} = \frac{b+2cx}{(n-1)\,k\,X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2c}{(n-1)\,k} \int \frac{dx}{X^{n-1}} \qquad (10)$$

findet, welche zur Reduktion von dem Integrale mit X^n auf das einfachere mit X^{n-1} dient; durch mehrfache Anwendung der Formel selbst kommt man zuletzt auf $\int \frac{dx}{X}$, wovon man in jedem Falle den Werth angeben kann.

Um den Gang dieser Rechnungen an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir die Entwickelung des Integrales

$$\int \frac{x^3 dx}{X^3}$$

andeuten. Aus Nro. (10) wird für $n=2$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{b+2cx}{kX} + \frac{2c}{k} \int \frac{dx}{X}$$

und für $n=3$

$$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{b+2cx}{2kX^2} + \frac{3c}{k} \int \frac{dx}{X^2}\text{.}$$

und wenn man die erste Gleichung in die zweite substituirt, so erhält man

$$\int \frac{dx}{X^3} \text{ ausgedrückt durch } \int \frac{dx}{X}\text{,}$$

wobei das letztere Integral als bekannt angesehen wird. Die Formel (8) giebt ferner:

$$\int \frac{xdx}{X^3} = -\frac{1}{4c\,X^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^3}.$$

Setzen wir weiter $n=3, m=2$ in Nro. (6), so wird

$$\int \frac{x^2 dx}{X^3} = -\frac{1}{3c}\,\frac{x}{X^2} - b \int \frac{xdx}{X^3} + a \int \frac{dx}{X^3}$$

wo nach dem Vorigen alle auf der rechten Seite stehenden Integrale bekannt sind. Für $m=3$ ergiebt sich ferner aus Nro. (6):

$$\int \frac{x^3 dx}{X^3} = -\frac{1}{2c}\,\frac{x^2}{X^2} + \frac{a}{c} \int \frac{xdx}{X^3}$$

wo rechts wieder Alles bekannt und somit das fragliche Integral entwickelt ist.

§ 9.

Entwickelungen für den Fall $F(x) = x^n - 1$.

Wenn es sich um die Ausführung einer Integration von der Form

$$\int \frac{f(x)\,dx}{x^n - 1}, \; n \text{ ganz und positiv}$$

handelt, so braucht man hierzu nur die Kenntniss des Integrales

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n - 1} \tag{1}$$

worin m eine ganze positive Zahl bezeichnet, und man wird sich von der Richtigkeit dieser Behauptung gleich durch die Bemerkung überzeugen, dass $f(x)$ von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots + Lx^l$ ist und folglich das obengenannte Integral in eine Summe von Integralen zerfällt, welche sämmtlich unter der Form von (1) stehen.

Um nun den Bruch

$$\frac{x^m}{x^n - 1}$$

in eine Reihe Partialbrüche zerlegen zu können, müssen wir zunächst die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ oder $x^n = +1$ aufsuchen. Diess hat nicht die mindeste Schwierigkeit, wenn man sich erinnert, dass dem Moivre'schen Theoreme zufolge

$$\left(\cos\frac{h\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{h\pi}{n}\right)^n = \cos h\pi \pm \sqrt{-1}\sin h\pi$$

mithin für ein gerades h

$$\left(\cos\frac{h\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{h\pi}{n}\right)^n = +1$$

ist und folglich die Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ unter der Form

$$x = \cos\frac{h\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{h\pi}{n}$$

enthalten sind, wo man für h jede gerade Zahl setzen darf. Gleichwohl hat hier x nicht unendlich viel verschiedene Werthe, wie man wegen der Willkührlichkeit von h glauben könnte, und man überzeugt sich hiervon auf folgende Weise.

Ist n eine gerade Zahl, so kann man die unendliche Reihe der geraden Zahlen, welche für h gesetzt werden dürfen, folgendermassen gruppiren:

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \dots\ n-2,\ n$$
$$2n-(n-2),\ 2n-(n-4),\ \dots 2n-2,\ 2n$$
$$2n+2,\ 2n+4,\ \dots\ 2n+(n-2),\ 3n$$
$$4n-(n-2),\ 4n-(n-4),\ \dots\ 4n-2,\ 4n$$

u. s. f.

Die Zahlen der ersten Horizontalreihe geben nun nach Nro. (2) für x folgende Werthe

$$\left.\begin{array}{l} +1, \cos\frac{2\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{4\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, -1\dots \end{array}\right\} (3)$$

Nimmt man jetzt für h die Zahlen der zweiten Horizontalreihe, so erhält man die vorstehenden Werthe noch einmal aber in umgekehrter Ordnung; die Zahlen der dritten Reihe liefern wieder die Grössen unter Nro. (3) in derselben Folge, die Zahlen der vierten Horizontalreihe wieder das Nämliche in umgekehrter Ordnung u. s. f. Als wirklich verschiedene Werthe von x bleiben daher nur die schon angegebenen übrig, und wenn wir noch zur Abkürzung

$$\sqrt{-1}=i, \frac{\pi}{n}=\vartheta \qquad (4)$$

setzen, so sind jetzt für ein gerades n die Wurzeln der Gleichung $x^n-1=0$ folgende:

$$\left.\begin{array}{ll} +1, & \\ \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta, & \cos 2\vartheta - i\sin 2\vartheta, \\ \cos 4\vartheta + i\sin 4\vartheta, & \cos 4\vartheta - i\sin 4\vartheta, \\ \cos 6\vartheta + i\sin 6\vartheta. & \cos 6\vartheta - i\sin 6\vartheta, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \cos(n-2)\vartheta + i\sin(n-2)\vartheta, & \cos(n-2)\vartheta - i\sin(n-2)\vartheta, \\ & -1. \end{array}\right\} (5)$$

Für ein ungerades n dagegen kann man die Werthe von h folgendermassen gruppiren:

$$\begin{array}{c} 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ n-3,\ n-1 \\ 2n-(n-1),\ 2n-(n-3),\ \ldots\ 2n-4,\ 2n-2 \\ 2n,\ 2n+2,\ \ldots\ 2n+(n-3),\ 2n+(n-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

und auch hier giebt die erste Horizontalreihe allein verschiedene Werthe für x, die anderen Horizontalreihen dagegen bringen immer nur dieselben Werthe wie jene erste hervor. Bei derselben Bezeichnung wie vorhin sind demnach für ein ungerades n die Wurzeln der Gleichung $x^n-1=0$ folgende:

$$\left.\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{+1,} \\ \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta, & \cos 2\vartheta - i\sin 2\vartheta, \\ \cos 4\vartheta + i\sin 4\vartheta, & \cos 4\vartheta - i\sin 4\vartheta, \\ \cos 6\vartheta + i\sin 6\vartheta, & \cos 6\vartheta - i\sin 6\vartheta, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \cos(n-1)\vartheta + i\sin(n-1)\vartheta, & \cos(n-1)\vartheta - i\sin(n-1)\vartheta. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Nach der Regel für die Zerlegung der gebrochenen Funktion

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

erzeugt jede Wurzel r der Gleichung $F(x)=0$ einen Partialbruch von der Form

$$\frac{R}{x-r},\ \text{wo}\ R=\frac{f(r)}{F'(r)}$$

ist. Diess giebt nun in unserem Falle wo alle Wurzeln r unter der Form $r=\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta$ stehen, und $f(x)=x^{m-1}$, $F(x)=x^n-1$ ist,

$$R=\frac{(\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta)^{m-1}}{n(\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta)^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{n}\{\cos h(m-n)\vartheta+i\sin h(m-n)\vartheta\}.$$

d. i. wenn man die Gleichung $n\vartheta=\pi$ und ferner beachtet, dass h jederzeit eine gerade Zahl ist,

$$R=\frac{1}{n}\{\cos hm\vartheta+i\sin hm\vartheta\}.$$

Der Wurzel $x=\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta$ entspricht also der Partialbruch

$$\frac{1}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta+i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta)} \quad (7)$$

Ebenso giebt die conjugirte Wurzel $x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta$ den analogen Partialbruch

$$\frac{1}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta - i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta - i\sin h\vartheta)}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man nun, dass die in (5) verzeichneten Wurzeln aus der Form $\cos h\vartheta \pm i \sin h\vartheta$ dadurch hervorgehen, dass man $h=0,2,4,\ldots n$ nimmt, so erhellt, dass man nur in (7) und (8) dieselben Werthe für h zu setzen und alle so entstehenden Glieder zu addiren hat, um sogleich für ein gerades n die Zerlegung des fraglichen Bruches vor sich zu sehen, und dass für ein ungerades n entsprechend Nro. (6) $n=0,2,4,\ldots n-1$ zu substituiren ist. Um jedoch gleich von vornherein imaginäre Grössenzu vermeiden, addiren wir die conjugirten Partialbrüche (7) und (8), wodurch

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{\cos hm\vartheta(x-\cos h\vartheta)-\sin hm\vartheta\sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1} \tag{9}$$

zum Vorschein kommt, und dieser Ausdruck bildet in der Zerlegung von $x^{m-1}:(x^n-1)$ denjenigen Bestandtheil, welcher zwei gegenüberstehenden Wurzeln in (5) und (6) entspricht. Rechnen wir noch ferner hinzu, dass die Wurzel $x=+1$ den Partialbruch

$$\frac{1}{n}\,\frac{1}{x-1}$$

und ebenso $x=-1$ den entsprechenden Bruch

$$\frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{m-1}}{(-1)^{n-1}}\,\frac{1}{x+1}$$

liefert, so folgt jetzt ohne Schwierigkeit:

a) für gerade n

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$$
$$=\frac{1}{n}\,\frac{1}{x-1}+\frac{2}{n}\,\Sigma\,\frac{\cos hm\vartheta(x-\cos h\vartheta)-\sin hm\vartheta\sin\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}$$
$$+\frac{(-1)^m}{n}\,\frac{1}{x+1};$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Werthe $h=2,4,6,\ldots(n-2)$ bezieht;

b) für ungerade n

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$$
$$=\frac{1}{n}\frac{1}{x-1}+\frac{2}{n}\Sigma\frac{\cos hm\vartheta(x-\cos h\vartheta)-\sin hm\vartheta\sin\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}$$

wobei $h=2,4,6,\ldots(n-1)$ zu setzen ist.

Hieraus findet sich nun das fragliche Integral sehr leicht, indem man Alles mit dx multiplizirt und darauf integrirt; berücksichtigt man hierbei die Gleichung

$$\int\frac{\cos hm\vartheta\,(x-\cos h\vartheta)-\sin hm\vartheta\sin\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\cos hm\vartheta\, l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)$$
$$\pm\sin hm\vartheta\operatorname{Arctan}\frac{x\sin h\vartheta}{x\cos h\vartheta-1}$$

so resultiren auf der Stelle die nachstehenden Integralformeln:

a) für ein gerades n und $h=2,4,6,\ldots(n-2)$:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{x^{m-1}dx}{x^n-1}\\&=\frac{1}{2n}\,l(x-1)^2+\frac{(-1)^m}{2n}\,l(x+1)^2\\&+\frac{1}{n}\,\Sigma\cos hm\vartheta\,.\,l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)\\&+\frac{2}{n}\,\Sigma\sin hm\vartheta\,.\,\operatorname{Arctan}\frac{x\sin h\vartheta}{x\cos h\vartheta-1};\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

b) für ein ungerades n und $h=2,4,6,\ldots(n-1)$:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{x^{m-1}dx}{x^n-1}\\&=\frac{1}{2n}\,l(x-1)^2\\&+\frac{1}{n}\,\Sigma\cos hm\vartheta\,.\,l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)\\&+\frac{2}{n}\,\Sigma\sin hm\vartheta\,.\,\operatorname{Arctan}\frac{x\sin h\vartheta}{x\cos h\vartheta-1}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

wobei stets $\vartheta=\frac{\pi}{n}$ ist.

Setzt man in diesen Formeln $x=\frac{z}{a}$, so geht das auf der linken Seite befindliche Integral in

$$a^{n-m}\int\frac{z^{m-1}\,dz}{z^n-a^n}$$

über, und wenn man darauf beiderseits mit a^{n-m} dividirt, so erhält man die vollständige Entwickelung eines etwas allgemeineren Integrales.

§ 10.

Entwickelungen für den Fall $F(x)=x^n+1$.

Dem Calcul des vorigen Paragraphen völlig parallel läuft derjenige, welcher zur Kenntniss des Integrales

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n+1}$$

führt. Der erste Schritt besteht nämlich in der Auflösung der Gleichung $x^n+1=0$ oder $x^n=-1$, und diese ist sehr leicht, wenn man berücksichtigt, dass für jede ungerade Zahl h

$$\left(\cos\frac{h\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{h\pi}{n}\right)^n=-1$$

ist und folglich die Wurzeln der fraglichen Gleichung unter der gemeinschaftlichen Form

$$x=\cos\frac{h\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{h\pi}{n}$$

enthalten sein müssen, wobei man für h jede ungerade Zahl substituiren darf. Ordnet man aber für ein gerades n die Werthe von h folgendermassen

$$1,\ 3,\ 5,\ldots n-3, n-1,$$
$$2n-(n-1), 2n-(n-3),\ldots 2n-3, 2n-1,$$
$$2n+1, 2n+3,\ldots 2n+(n-3), 2n+(n-1),$$
u. s. f.

so erkennt man leicht, dass die in der zweiten, dritten etc. Horizontalreihe enthaltenen Werthe von h nur zur Wiederholung derjenigen Wurzeln dienen, welche schon die erste Reihe geliefert hat und dass folglich für ein gerades n die Gleichung $x^n+1=0$ folgende Wurzeln hat:

$$\left.\begin{array}{ll}\cos\vartheta+i\sin\vartheta, & \cos\vartheta-i\sin\vartheta,\\ \cos3\vartheta+i\sin3\vartheta, & \cos3\vartheta-i\sin3\vartheta,\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \cos(n-1)\vartheta+i\sin(n-1)\vartheta, & \cos(n-1)\vartheta-i\sin(n-1)\vartheta,\end{array}\right\}\ (2)$$

wobei wieder i und ϑ zur Abkürzung für $\sqrt{-1}$ und $\frac{\pi}{n}$ gebraucht worden sind.

Für ein ungerades n dagegen lässt sich die Reihe der ungeraden Zahlen folgendermassen gruppiren:

$$1, 3, 5, \ldots n-2, n$$
$$2n-(n-2), 2n-(n-4), \ldots 2n-3, 2n-1,$$
$$2n+1, 2n+3, \ldots 2n+(n-2), 3n,$$
u. s. w.

und auch hier liefern die zweite, dritte etc. Horizontalreihe keine neuen Wurzeln. Daher sind für ein ungerades n die Wurzeln der Gleichung $x^n+1=0$:

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta, \qquad \cos\vartheta - i\sin\vartheta,$$
$$\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta, \qquad \cos 3\vartheta - i\sin 3\vartheta,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cos(n-2)\vartheta + i\sin(n-2)\vartheta, \cos(n-2)\vartheta - i\sin(n-2)\vartheta,$$
$$-1.$$

Ganz wie im vorigen Paragraphen bleibt nun hier die Bestimmung der Partialbrüche und zwar desshalb weil $f(x)=x^{m-1}$ und $F'(x)=nx^{n-1}$ in beiden Untersuchungen vollkommen identisch sind, und daher wird hier wie dort derjenige Partialbruch, welcher zwei conjugirten Wurzeln unserer Gleichung entspricht, durch

$$\frac{2}{n}\frac{\cos hm\vartheta(x-\cos h\vartheta)-\sin hm\vartheta \sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}$$

ausgedrückt. Daraus folgt denn sehr leicht

a) für gerade n

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$$
$$=\frac{2}{n}\,\Sigma\frac{\cos hm\vartheta(x-\cos h\vartheta)-\sin hm\vartheta\sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Werthe $h=1, 3, 5, \ldots (n-1)$ bezieht; ferner

b) für ungerade n

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$$

$$= \frac{2}{n} \Sigma \frac{\cos hm\vartheta (x-\cos h\vartheta) - \sin hm\vartheta \sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1} + \frac{(-1)^{m-1}}{x+1}$$

worin $h=1,3,5,\ldots n$ zu nehmen ist.

Multiplizirt man die gefundenen Gleichungen mit dx und integrirt darauf, indem man rechts von der schon im vorigen Paragraphen an derselben Stelle benutzten Formel Gebrauch macht, so ergeben sich die Integrale:

a) für gerade n und $h=1,3,5,\ldots(n-1)$:

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n+1}\\ &= \frac{1}{n}\Sigma \cos hm\vartheta . l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)\\ &+\frac{2}{n}\Sigma \sin hm\vartheta . \operatorname{Arctan}\frac{x\sin h\vartheta}{x\cos h\vartheta-1}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

b) für ungerade n und $h=1,3,5,\ldots n$:

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{x^{m-1}dx}{x^n+1}\\ &= \frac{1}{n}\Sigma h\cos m\vartheta . l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)\\ &+\frac{2}{n}\Sigma \sin hm\vartheta . \operatorname{Arctan}\frac{x\sin h\vartheta}{x\cos h\vartheta-1}+\frac{(-1)^{m-1}}{2}l(x+1)^2\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Setzt man in diesen Formeln $x=\frac{z}{a}$ und dividirt nachher beiderseits mit a^{n-m}, so erhält man ebenso leicht die Entwickelung des Integrales

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{z^n+a^n}$$

welches um eine Constante reicher als das oben behandelte ist.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dass $(m-1)$ eine positive Grösse sei, und wir konnten uns hierauf beschränken, weil im entgegengesetzten Falle, also wenn das zu entwickelnde Integral unter der Form

$$\int \frac{x^{-m}dx}{x^n\pm1} = \int \frac{1}{x^m(x^n\pm1)}dx \qquad (7)$$

steht, eine Zerfällung desselben in Partialbrüche nach dem Schema

$$A\int\frac{dx}{x^m}+B\int\frac{dx}{x^{m-1}}+C\int\frac{dx}{x^{m-2}}+\ldots+M\int\frac{dx}{x}$$
$$+\int\frac{\varphi(x)\,dx}{x^n\pm 1}$$

worin φ eine ganze rationale algebraische Funktion bezeichnet, vorgenommen werden kann. Kürzer indessen findet man den Werth des Integrales (7) mittelst der Substitution $x=\frac{1}{y}$; durch sie verwandelt sich nämlich das fragliche Integral wie folgt

$$\int\frac{dx}{x^m(x^n\pm 1)}=-\int\frac{y^m dy}{y^2(\frac{1}{y^n}\pm 1)}=\mp\int\frac{y^{m+n-2}dy}{y^n\pm 1}$$

und hier kann die Integration auf der rechten Seite leicht dadurch bewerkstelligt werden, dass man in den bisher entwickelten Formeln $m+n-1$ und y für m und x schreibt; substituirt man nachher rückwärts $y=\frac{1}{x}$, so erhält man das gesuchte Integral.

Wir wollen endlich noch mit wenigen Worten die Entwickelung des Integrales

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{x^{2n}-2x^n\cos\gamma+1} \tag{8}$$

andeuten, welche nach der bisher angewendeten Zerfällungsmethode ebenfalls sehr leicht ist. Um zunächst die Wurzeln der Gleichung

$$x^{2n}-2x^n\cos\gamma+1=0 \text{ oder } x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos\gamma \tag{9}$$

zu finden, setzen wir $x=\varrho(\cos\omega\pm i\sin\omega)$ und erhalten so

$$\varrho^n(\cos n\omega\pm i\sin n\omega)+\frac{\cos n\omega\mp i\sin n\omega}{\varrho^n}=2\cos\gamma$$

oder

$$\left(\varrho^n+\frac{1}{\varrho^n}\right)\cos n\omega\pm i\left(\varrho^n-\frac{1}{\varrho^n}\right)\sin n\omega=\cos\gamma.$$

Da rechts keine mit i verbundene Grösse vorkommt, so muss links der Faktor von i der Null gleich sein, was für jedes ω der Fall ist, wenn $\varrho=1$ genommen wird. Es bleibt dann $2\cos n\omega=2\cos\gamma$ übrig, woraus für eine beliebige gerade Zahl h,

$$n\omega = h\pi + \gamma \text{ oder } \omega = \frac{h\pi + \gamma}{n}$$

folgt. Die Wurzeln der Gleichung (9) sind demnach in der Form

$$x = \cos\frac{h\pi + \gamma}{n} \pm i\sin\frac{h\pi + \gamma}{n}$$

enthalten und man erhält sie vollständig, indem man $h = 0, 2, 4, \ldots (2n-2)$ setzt, denn die weiteren Werthe von h geben nur Wiederholungen schon vorher da gewesener Wurzeln. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{\pi}{n} = \vartheta, \frac{\gamma}{n} = \gamma'$$

so sind die $2n$ Wurzeln der Gleichung (9):

$$\cos\gamma' + i\sin\gamma', \cos\gamma' - i\sin\gamma'$$
$$\cos(2\vartheta + \gamma') + i\sin(2\vartheta + \gamma'), \cos(2\vartheta + \gamma') - i\sin(2\vartheta + \gamma')$$
$$\cos(4\vartheta + \gamma') + i\sin(4\vartheta + \gamma'), \cos(4\vartheta + \gamma') - i\sin(4\vartheta + \gamma')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos(\overline{2n-2}\vartheta + \gamma') + i\sin(\overline{2n-2}\vartheta + \gamma'), \cos(\overline{2n-2}\vartheta + \gamma') - i\sin(\overline{2n-2}\vartheta + \gamma').$$

Nennen wir r irgend eine dieser Wurzeln, so entspricht ihr der Partialbruch

$$\frac{f(r)}{F'(r)}\frac{1}{x-r} = \frac{r^{m-1}}{2nr^{n-1}(r^n - \cos\gamma)}\frac{1}{x-r}$$

und indem man für r alle oben angegebenen Werthe setzt, so erhält man durch Addition derselben die Zerlegung von

$$\frac{x^{m-1}}{x^{2n} - 2x^n\cos\gamma + 1};$$

nachherige Multiplikation mit dx und Integration der einzelnen Glieder führt dann zur Entwickelung des Integrales (8), wobei man das Imaginäre wieder dadurch wegschafft, dass man die von conjugirten Wurzeln herrührenden Bestandtheile vereinigt. Im speziellen Falle $\gamma = \pi$ kommt man auf eine Gleichung zurück, welche mit der Formel (3) zusammenfällt, sobald man in dieser $2n$ an die Stelle von n setzt.

Aus dem Integral (8) kann man endlich noch das etwas allgemeinere

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{z^{2n} - 2a^n z^n \cos\gamma + a^{2n}}$$

dadurch ableiten, dass man $x = \frac{z}{a}$ substituirt und mit a^{2n-m} die entstehende Gleichung theilt.

Cap. III. Die Integration irrationaler algebraischer Differenzialformeln.

§ 11.

Begränzung der Aufgabe.

So leicht verhältnissmässig die Integration rationaler algebraischer Differenzialformeln war, so schwer ist die der irrationalen Differenziale, sobald man nicht bei den einfachsten Fällen stehen bleiben will. Bevor wir jedoch auf die hieher gehörenden Entwickelungen eingehen, müssen wir erst die Form der zu behandelnden Differenziale näher betrachten. Bezeichnen wir mit $\Phi(x), \varphi(x), \psi(x), \chi(x), \ldots$ rationale ganze algebraische Funktionen und mit $m, p, q, \ldots$ ganze positive Zahlen, so würde der Ausdruck

$$\int \frac{A\sqrt[p]{\varphi(x)} + B\sqrt[q]{\psi(x)} + \cdots}{\sqrt[m]{\Phi(x)}}\, dx$$

ein sehr allgemeines Schema von einem Integrale mit irrationaler algebraischer Differenzialformel darstellen und zugleich übersieht man, dass die hier postulirte Integration sich auf eine Reihe einzelner Integrale reduzirt, von denen das erste

$$\int \frac{\sqrt[p]{\varphi(x)}}{\sqrt[m]{\Phi(x)}}\, dx \qquad (1)$$

als Schema für alle gelten kann. In zwei sehr häufig vorkommenden Fällen lässt sich hier die Irrationalität des Zählers wegschaffen, nämlich wenn entweder $p = m$ oder $\varphi(x) = \alpha + \beta x$ ist. Im ersten Falle ist durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit $\sqrt[m]{\varphi(x)}$

$$\frac{\sqrt[m]{\varphi(x)}}{\sqrt[m]{\Phi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt[m]{\Phi(x)\varphi(x)}},$$

dabei ist das Produkt zweier ganzen rationalen Funktionen offenbar

wieder eine ganze rationale Funktion, die etwa $F(x)$ heissen möge, und da $\varphi(x)$ von der Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots$, so kommt in diesem Falle die verlangte Integration auf eine Reihe Integrale von der Form

$$\int\frac{x^l\,dx}{\sqrt[m]{F(x)}} \qquad (2)$$

zurück, worin l eine positive ganze Zahl bezeichnet. Im zweiten Falle $\varphi(x)=\alpha+\beta x$ setze man $\alpha+\beta x=z^p$, folglich

$$x=\frac{z^p-\alpha}{\beta},\ dx=\frac{p}{\beta}z^{p-1}dz$$

so geht das Integral (1) in das folgende

$$\frac{1}{\beta}\int\frac{z\,.\,pz^{p-1}dz}{\sqrt[m]{\Phi\left[\frac{1}{\beta}(z^p-\alpha)\right]}}$$

über, wo offenbar die im Nenner unter dem Wurzelzeichen vorkommende Funktion eine ganze und rationale ist und mit $F(z)$ bezeichnet werden könnte. In beiden Fällen also lässt sich das Integral eines irrationalen algebraischen Differenziales in letzter Instanz auf die Form

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[q]{F(x)}}=\int x^{m-1}[F(x)]^{-\frac{1}{q}}dx \qquad (3)$$

bringen, wo m und q ganze positive Zahlen sind und $F(x)$ eine ganze rationale algebraische Funktion bezeichnet Hiermit sind freilich nicht alle möglichen Fälle erschöpft, indem es Differenzialformeln giebt, bei welchen man den Zähler nicht durch blose algebraische Transformation rational machen kann, aber es bestimmt uns die Form (3) wenigstens unsere Aufgabe, weil nur sie einige unmittelbare Integrationen gestattet und man in allen übrigen Fällen zu dem allgemeinen, später erörterten, Mittel der Integration durch Näherung seine Zuflucht nehmen muss.

Das Technische der vorhin erwähnten Transformationen wird man leicht aus den folgenden Beispielen ersehen.

1. $$\int\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx=\int\frac{1+x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)(1+x^2)}}dx$$
$$=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$$

2. Vermöge der Substitution $1-x=z^3$ wird

$$\int \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[5]{1+x+x^2}}dx=\int \frac{-z.3z^2dz}{\sqrt[5]{1+(1-z^3)+(1-z^3)^2}}$$

$$=-3\int\frac{z^3dz}{\sqrt[5]{3-3z^3+z^6}}$$

wo man nach geschehener Integration für z seinen Werth $\sqrt[3]{1-x}$ zu setzen hätte.

§ 12.

Reduktionsformeln für die einfachsten Fälle.

Seine einfachste Gestalt erhält das Integral (3), wenn $F(x)$ unter der Form $a+bx^n$ steht, wo n eine positive ganze Zahl sein muss, und es ist in diesem Falle nicht schwer für das Integral

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx \qquad (1)$$

eine Reihe von Reduktionsformeln zu entwickeln, wodurch es in jedem Falle auf ein wesentlich einfacheres Integral zurückgeführt werden kann. Dabei möge zur Abkürzung immer $a+bx^n$ mit X bezeichnet werden.

Wendet man zuerst das Prinzip der partiellen Integration auf das in (1) aufgestellte Integral an, so wird

$$\int x^{m-1}X^p dx=X^p\int x^{m-1}dx-\int pX^{p-1}dX\int x^{m-1}dx$$
$$=X^p\,\frac{1}{m}\,x^m-\frac{p}{m}\int X^{p-1}dX.x^m.$$

Vermöge der Bedeutuug von X ist aber $dX=nbx^{n-1}dx$ und folglich

$$\int^{m-1}X^p dx=\frac{1}{m}x^m X^p-\frac{npb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}dx \qquad (1)$$

und durch Transposition, wenn man das Integral rechts als Unbekannte ansieht und durch die übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen ausdrückt

$$\int x^{m+n-1}X^{p-1}dx=\frac{x^mX^p}{npb}-\frac{m}{npb}\int x^{m-1}X^p dx$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man $m-n$ für m und zugleich $p+1$ für p setzt:

$$\int x^{m-1} X^p\, dx = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{n(p+1)b} - \frac{m-n}{n(p+1)b} \int x^{m-n-1} X^{p+1} dx \quad (2)$$

und diese Formel wird man da benutzen, wo man das gegebene Integral auf ein anderes von derselben Form zurückführen will, worin gleichzeitig m vermindert und p vermehrt worden ist; so z. B. erhält man für $m=3, n=2, p=-\frac{3}{2}$ die Reduktion

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}} = -\frac{x}{b\sqrt{a+bx^2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

wo sich der Werth des Integrales rechts unmittelbar unter den Fundamentalformeln findet.

Es ist ferner völlig identisch

$$\int x^{m-1} X^p dx = \int x^{m-1} X^{p-1}(a+bx^n)\, dx$$
$$= a\int x^{m-1} X^{p-1} dx + b\int x^{m+n-1} X^{p-1} dx$$

und durch Vergleichung mit Nro. (1) wegen der Identität der linken Seiten

$$\frac{x^m X^p}{m} - \frac{npb}{m}\int x^{m+n-1} X^{p-1} dx$$
$$= a\int x^{m-1} X^{p-1} dx + b\int x^{m+n-1} X^{p-1} dx.$$

Hieraus folgt, indem man das erste Integral der rechten Seite als Unbekannte ansieht,

$$\int x^{m-1} X^{p-1} dx = \frac{x^m X^p}{ma} - \frac{(m+np)b}{ma}\int x^{m+n-1} X^{p-1} dx$$

oder $p+1$ für p gesetzt

$$\int x^{m-1} X^p dx = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+np+p)b}{ma}\int x^{m+n-1} X^p dx. \quad (3)$$

Schreibt man $m-n$ für m, sieht das Integral rechts nunmehr als unbekannt an und drückt es durch das auf der linken Seite stehende aus, so findet man analog

$$\int x^{m-1} X^p\, dx = \frac{x^{m-n} X^{p+1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b}\int x^{m-n-1} X^p dx \quad (4)$$

und diess ist eine sehr brauchbare Formel, wie sich bald nachher zeigen wird.

Wenden wir ferner auf das zweite in der Gleichung

$$\int x^{m-1} X^p dx = a\int x^{m-1} X^{p-1} dx + b\int x^{m+n-1} X^{p-1} dx$$

rechts vorkommende Integral die Reduktionsformel (2) an, so ergiebt sich leicht

$$\int x^{m-1}X^p\,dx$$
$$=a\int x^{m-1}X^{p-1}dx+b\left[\frac{x^mX^p}{npb}-\frac{m}{npb}\int x^{m-1}X^p dx\right]$$

und daraus

$$\int x^{m-1}X^p\,dx=\frac{x^mX^p}{m+np}+\frac{npa}{m+np}\int x^{m-1}X^{p-1}dx. \qquad (5)$$

Schreibt man endlich $p+1$ für p und drückt das Integral auf der rechten Seite durch das auf der linken Seite aus, so wird noch

$$\int x^{m-1}X^p\,dx=-\frac{x^mX^{p+1}}{n(p+1)a}+\frac{m+np+n}{n(p+1)a}\int x^{m-1}X^{p+1}dx. \qquad (6)$$

Von diesen sechs Reduktionsformeln sind die letzten drei am häufigsten anwendbar, weil es bei einem ganzen positiven m fast immer darauf ankommt, m ohne Aenderung des p zu verringern und weil es, sobald man $\int x^{m-1}X^p dx$ auf diese Weise bestimmt hat, mittelst der Formeln (5) und (6) sehr leicht ist, hieraus neue Integrale abzuleiten, worin p grösser oder kleiner als vorhin ist. Wir wollen diess an einem Beispiele zeigen. Sei zunächst $n=2, p=-\frac{1}{2}$, also das zu entwickelnde Integral:

$$y=\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx^2}} \qquad (7)$$

so erhält man zunächst aus Nro. (4)

$$y=\frac{x^{m-2}\sqrt{a+bx^2}}{(m-1)b}-\frac{(m-2)a}{(m-1)b}\int\frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{a+bx^2}};$$

wendet man die Reduktionsformel auf das Integral selbst wieder an, indem man in ihr $m-2$ für m schreibt, so reduzirt sich y auf ein Integral von der Form

$$\int\frac{x^{m-5}dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich diese Reduktionen fortführen lassen, und dass man in letzter Instanz auf eines der beiden Integrale

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx^2}} \text{ oder } \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \qquad (8)$$

kommen muss, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Beide Inte-

grale sind aber leicht zu entwickeln; setzt man nämlich im ersten $x^2 = z$, so folgt $2x dx = dz$ oder $x dx = \frac{1}{2} dz$ und folglich ist dasselbe

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{1}{2} \int (a+bz)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{(a+bz)^{\frac{1}{2}}}{b} + C$$

wie man nach der Fundamentalformel (1) in §. 2 gleich erhält. Daher ist wegen des Werthes von $z = x^2$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx^2}}{b} + C.$$

Das zweite der in Nro. (8) verzeichneten Integrale ist unmittelbar mittelst der Fundamentalformeln (6) und (7) in §. 2 zu entwickeln, wobei man jedoch unterscheiden muss, ob b positiv oder negativ ist, indem für diese beiden Fälle die Gestalt des Integrales verschieden ausfällt.

Hat man so das unter Nro. (7) aufgeführte Integral gefunden, so können nun die Formeln (5) und (6) zur Entwickelung der Integrale

$$\int x^{m-1}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}k} dx \text{ und } \int x^{m-1}(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}k} dx \qquad (9)$$

dienen, worin k eine ungerade positive Zahl bezeichnet. Setzt man nämlich in der Gleichung (5) $n=2, p=\frac{1}{2}$, so wird

$$\int x^{m-1}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^m(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}{m+1} + \frac{a}{m+1} \int x^{m-1}(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

und da das Integral rechts bekannt ist, so findet man hiermit den Werth des ersten in (9) verzeichneten Integrales für $k=1$. Für $p=\frac{3}{2}$ ergiebt sich ferner aus der Formel (5) eine Relation zwischen

$$\int x^{m-1}(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} dx \text{ und } \int x^{m-1}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

wo nun das Integral rechts nach dem Vorigen bekannt ist. Geht man auf diese Weise weiter, indem man $p = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots \frac{k}{2}$ setzt, so erhellt augenblicklich, dass man mittelst dieser fortwährenden Reduktion den Werth des ersten in Nro. (9) aufgeführten Integrales vollständig entwickeln kann.

Setzt man ferner in Nro. (6) $p = -\frac{1}{2}$, so wird

$$\int x^{m-1}(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx=\frac{x^m(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}}{a}$$
$$-\frac{m-1}{a}\int x^{m-1}(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

und dabei ist das Integral rechts, folglich nun auch das auf der linken Seite bekannt. Weiter giebt dann $p=-\frac{5}{2}$ nach Formel (6) eine Relation zwischen den beiden Integralen

$$\int x^{m-1}(a+bx^2)^{-\frac{5}{2}}\,dx \text{ und} \int x^{m-1}(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

von denen das zweite nach dem Vorigen entwickelbar, also auch das erste als bekannt anzusehen ist. Indem man sofort $p=-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, \ldots \ldots \frac{-k}{2}$ setzt, gelangt man successiv zur vollständigen Entwickelung des zweiten in Nro. (9) angegebenen Integrales.

Die Reduktionsformeln (1) bis (6) dürfen übrigens auch für jedes andere als positive m und n in Anspruch genommen werden und zwar aus dem einfachen Grunde, weil ihre Herleitung nur auf identischen Gleichungen und den beiden Formeln für $d(x^\mu)$ und $\int x^\mu dx$ beruht, welche überhaupt für jedes μ gelten mit Ausnahme von $\mu=0$ in der ersten und $\mu=-1$ in der zweiten. Man kann daher ganz analoge Betrachtungen, wie sie für das Integral in (7) geführt wurden, auch auf das folgende

$$\int \frac{dx}{x^{m+1}\sqrt{a+bx^2}}$$

anwenden und durch Benutzung der Formel (3), worin $-m$ an die Stelle von m zu setzen wäre, würde man das fragliche Integral jederzeit auf eines der beiden folgenden

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

zurückbringen. Den Werth des zweiten Integrales kennen wir bereits; um noch den des ersten zu finden substituiren wir $x=\frac{1}{z}$ in dasselbe, wodurch es in

$$-\int \frac{dz}{z\sqrt{a+\frac{b}{z^2}}}=-\int \frac{dz}{\sqrt{b+az^2}}$$

übergeht und nun leicht entwickelbar ist. Mit Hülfe der Formeln (5) und (6) würde man daraus auch die Werthe der allgemeineren Integrale

$$\int \frac{dx}{x^{m+1}(a+bx^2)^{\frac{1}{2}k}} \text{ und } \int \frac{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}k}}{x^{m+1}} dx$$

für jedes positive ungerade k leicht ableiten können.

§ 13.

Integration von $dx : \sqrt{a+bx+cx^2}$.

Wir wenden uns nun zur Entwickelung des sehr häufig vorkommenden Integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

welches aus dem früher unter Nro. (3) in §. 11. angeführten Schema dadurch hervorgeht, dass man für $F(x)$ eine Funktion zweiten Grades, $q=2$ und $m=1$ nimmt. Vergleichen wir das fragliche Integral mit den Fundamentalformeln (7) u. (6) in §. 2., so erhellt auf der Stelle, dass man den Werth desselben leicht finden würde, wenn man es in ein anderes von derselben Form transformiren könnte, worin jedoch das mit der ersten Potenz der Variabelen behaftete Glied unter dem Radikale nicht vorkommen dürfte. Setzen wir noch

$$\frac{a}{c} = \beta, \frac{b}{c} = \alpha$$

so ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx\pm cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{\beta+\alpha x \pm x^2}} \tag{2}$$

und hier macht sich die Unterscheidung eines positiven oder negativen c nothwendig, was auch den citirten Fundamentalformeln nach zu erwarten stand.

1. Für ein positives c, wo also in (2) die oberen Zeichen gelten, hat man identisch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta+\alpha x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 + (x+\frac{1}{2}\alpha)^2}}$$

indem hier ganz dieselbe Zerfällung wie in §. 7. mit $x^2+\alpha x+\beta$ vorgenommen worden ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$\beta - \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \varepsilon \text{ und } x + \tfrac{1}{2}\alpha = z \qquad (3)$$

wo z die neue Variabele ist, so geht das obige Integral in

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon + z^2}}$$

über, dessen Werth der Fundamentalformel (7) zufolge

$$\tfrac{1}{2} l(z + \sqrt{\varepsilon + z^2}) + C$$

ist. Setzt man hier für z und ε ihre Werthe, so folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta + \alpha x + x^2}} = \tfrac{1}{2} l(x + \tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{\beta + \alpha x + x^2})^2 + C$$

und wenn man noch für α, β ihre Werthe einführt und beiderseits mit $\sqrt{c}$ dividirt, nach Formel (2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} l(x + \frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2})^2 + C$$

und wenn man die Constante sich $= C' + \frac{1}{2\sqrt{c}} l(2c)^2$ denkt, so ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} (b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2})^2 + C'. \qquad (4)$$

2. Für ein negatives c, wo also in Nro. (2) das untere Zeichen genommen werden muss, ist ähnlich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta + \alpha x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\beta + \frac{1}{4}\alpha^2 - (x - \frac{1}{2}\alpha)^2}}$$

d. i. für $\beta + \frac{1}{4}\alpha^2 = \vartheta$ und $x - \frac{1}{2}\alpha = z$, wo z die neue Variabele bedeutet

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\vartheta - z^2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{z}{\sqrt{\vartheta}} + C,$$

wobei die Fundamentalformel (6) in §. 2. benutzt worden ist. Vermöge der Werthe von ϑ und z hat man nun weiter

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta + \alpha x - x^2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{x - \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{\beta + \frac{1}{4}\alpha^2}} + C$$

$$= \operatorname{Arcsin} \frac{2x - \alpha}{\sqrt{4\beta + \alpha^2}} + C$$

und wenn man für α und β ihre Werthe setzt und darauf beiderseits mit $\sqrt{c}$ dividirt, so kommt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arcsin} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} + C. \qquad (5)$$

Will man statt des Arcsin lieber Arctan sehen, so braucht man nur die bekannte Formel

$$\operatorname{Arcsin} u = \operatorname{Arctan} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

in Anwendung zu bringen; man erhält so

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arctan} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c(a+bx-cx^2)}} \qquad (6)$$

doch ist diese Form weniger elegant als die vorhergehende.

§ 14.

Integration allgemeiner Irrationalformeln.

Es hat nun auch keine Schwierigkeit, Formeln aufzustellen, mittelst welcher man die allgemeineren Integrale

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx\pm cx^2}} \text{ und } \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a+bx\pm cx^2}}$$

unter Voraussetzung eines ganzen positiven m entwickeln kann. Bezeichnen wir kurz $a+bx\pm cx^2$ mit X, so hat man zunächst durch Differenziation des Produktes $x^{m-1}\sqrt{X}$,

$$d[x^{m-1}\sqrt{X}]$$
$$= (m-1)\frac{x^{m-2}X}{\sqrt{X}}dx + \frac{(b+2cx)x^{m-1}}{2\sqrt{X}}dx$$

wie man sogleich unter Berücksichtigung des Satzes $\sqrt{X} = \frac{X}{\sqrt{X}}$ einsehen wird. Setzt man ferner statt des im Zähler des ersten Bruches auf der rechten Seite vorkommenden X seinen Werth, und ordnet hierauf Alles nach Potenzen von x, so ergiebt sich mit Leichtigkeit:

$$d[x^{m-1}\sqrt{X}]$$
$$= (m-1)a\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{X}} + \frac{(2m-1)b}{2}\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{X}} + mc\frac{x^m dx}{\sqrt{X}}.$$

Integrirt man und drückt darauf das letzte Integral auf der rechten Seite durch die übrigen aus, so gelangt man zu der Formel

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{x^m dx}{\sqrt{X}}\\ \displaystyle=\frac{x^{m-1}\sqrt{X}}{mc}-\frac{(2m-1)\,b}{2mc}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{X}}-\frac{(m-1)a}{mc}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{X}}\end{array}\right\}\cdot(7)$$

Ist nun m eine positive ganze Zahl, so führt man hiermit das gesuchte Integral auf zwei andere von derselben Form zurück, in denen aber der Zähler von niedriger Dimension ist; für $m=1, m=2$, etc. erhält man nacheinander

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\frac{\sqrt{X}}{c}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}}=\frac{x\sqrt{X}}{2c}-\frac{3b}{4c}\int\frac{xdx}{\sqrt{X}}-\frac{a}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

u. s. f.

wo jede Gleichung in die nächstfolgende zu substituiren ist.

Lässt man in der Formel (7) $-m+2$ an die Stelle von m treten, so wird

$$\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{X}}$$

$$=-\frac{\sqrt{X}}{(m-2)cx^{m-1}}-\frac{(2m-3)\,b}{(2m-4)\,c}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{X}}-\frac{(m-1)a}{(m-2)c}\int\frac{dx}{x^m\sqrt{X}}$$

und wenn man das letzte Integral rechter Hand durch alle übrigen ausdrückt, so gelangt man zu einer zweiten Reduktionsformel, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{dx}{x^m\sqrt{X}}\\ \displaystyle=-\frac{\sqrt{X}}{(m-1)ax^{m-1}}-\frac{(2m-3)\,b}{(2m-2)\,a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{X}}-\frac{(m-2)c}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{X}}\end{array}\right\}\cdot(8)$$

Man kann übrigens auch noch einen anderen Weg zur Entwickelung des Integrales links d. h.

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

einschlagen. Die Substitution $x=\frac{1}{z}$ giebt nämlich

$$-\int \frac{z^m dz}{z^2\sqrt{a+\frac{b}{z}\pm\frac{c}{z^2}}} = -\int \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{az^2+bz\pm c}} \tag{9}$$

und hier kann man das Integral auf der rechten Seite nach Formel (7) entwickeln, indem man $m-1$ für m, z für x schreibt und a und c gegen einander vertauscht. Diese zweite Methode hat übrigens den Vortheil für den Fall $m=1$ anwendbar zu sein, auf welchen die Formel (8) nicht passt. Man hat dann

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\pm a+bx+cx^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{c+bz\pm az^2}}$$

wo man die rechte Seite unmittelbar entwickeln kann, und darauf $z=\frac{1}{x}$ zu substituiren hat.

Integrale endlich von den Formen

$$\int x^m dx\sqrt{X} \text{ und } \int \frac{dx}{x^m}\sqrt{X} \tag{10}$$

lassen sich leicht auf die bisher betrachteten zurückführen, indem man

$$\sqrt{X} = \frac{X}{\sqrt{X}} = \frac{a+bx\pm cx^2}{\sqrt{X}}$$

setzt und jedes einzelne Glied integrirt; man hat dann

$$\int x^m dx\sqrt{X} = a\int\frac{x^m dx}{\sqrt{X}} + b\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{X}} \pm c\int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{X}}$$

wo die einzelnen Integrale nach dem Früheren entwickelbar sind. Derselbe Kunstgriff passt auf das zweite in Nro. (10) aufgeführte Integral.

Hiermit haben wir bereits die Gränzen erreicht, bis zu welchen die Integration irrationaler algebraischer Differenziale ausführbar ist; sobald nämlich in dem Ausdrucke

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{F(x)}}$$

$F(x)$ von höherem als dem zweiten Grade ist, so bildet das Integral eine Funktion von x, welche im Allgemeinen nicht durch Logarithmen oder Kreisbögen dargestellt werden kann. In diesem Falle muss man zur näherungsweisen Berechnung seine Zuflucht nehmen, und diese beruht auf dem höchst einfachen Prinzipe, die unter dem Integralzeichen

mit dx multiplizirte Funktion in eine Reihe zu verwandeln und jedes einzelne Glied derselben zu integriren. So z. B. würde es unmöglich sein, den Werth des Integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(1+\varepsilon^2)x^2+\varepsilon^2 x^4}}$$

durch unmittelbare Integration zu entwickeln; dagegen ist aber das obige Integral auch

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}}$$

und hier lässt sich die Integration durch Reihen auf verschiedene Weise ausführen. Verwandelt man z. B. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in eine Reihe, was für $x<1$ möglich ist, so geht unser Integral in

$$\int \left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\right]\frac{dx}{\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}}$$
$$=\int \frac{dx}{\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}}+\tfrac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}}+\frac{1.3}{2.4}\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}}+\ldots$$

über und hier lassen sich die einzelnen Integrationen ohne Mühe bewerkstelligen. Ebenso könnte man den zweiten Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}}$ für $\varepsilon<1$ und $x<1$ in eine Reihe umsetzen und erhielte dann nicht minder leicht

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^4\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}+\ldots$$

Wollte man endlich gleich Alles nach Potenzen von x geordnet haben, so multiplizire man die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}}=1+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2x^2+\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^4x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^6x^6+\ldots$$

miteinander und gebe dem Produkte die Form

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\varepsilon^2+x^2}}$$
$$1+E_2x^2+E_4x^4+E_6x^6+\ldots$$

wo $E_2, E_4, E_6, \ldots$ Coeffizienten sind, die blos von ε abhängen; man hat dann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varepsilon^2 x^2)}}$$
$$= x + \tfrac{1}{3} E_2 x^3 + \tfrac{1}{5} E_4 x^5 + \tfrac{1}{7} E_6 x^7 + \ldots + C.$$

Diese letzte Methode ist ganz allgemein auf Integrale von der Form

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt[q]{F(x)}} = \int x^m [F(x)]^p \, dx$$

anwendbar, wenn p eine beliebige Grösse und $F(x)$ eine ganze rationale und algebraische Funktion bezeichnet. Da sich nämlich jede derartige Funktion in Faktoren des zweiten Grades zerlegen lässt, also immer

$$F(x) = (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2) \ldots$$

gesetzt werden darf, so ist das obige Integral auch

$$= \int x^m (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)^p (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2)^p \ldots dx$$

statt dessen wir noch das allgemeinere

$$\int x^m (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)^p (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2)^q \ldots dx \qquad (11)$$

betrachten wollen. Nun kann man aber jeden der Faktoren

$$(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)^p, (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2)^q, (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2)^r, \ldots$$

in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

umsetzen und zwar entweder mit Hülfe des Mac Laurinschen oder des Theoremes von Lagrange. Multiplizirt man alle diese Reihen mit einander, so nimmt das Produkt die Form

$$P + Qx + Rx^2 + \ldots$$

an, wo P, Q, R, etc. constante aus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ etc. zusammengesetzte Grössen sind; hierdurch verwandelt sich das Integral (11) in das folgende

$$\int x^m (P + Qx + Rx^2 + \ldots) dx$$
$$= P \frac{x^{m+1}}{m+1} + Q \frac{x^{m+2}}{m+2} + R \frac{x^{m+3}}{m+3} + \ldots + C$$

und ist demnach immer entwickelbar. Dabei sind natürlich die Bedingungen nicht ausser Acht zu lassen, an welche, den Theoremen von Mac Laurin und Lagrange zufolge, jene Reihenverwandelungen geknüpft sein können, denn es versteht sich von selbst, dass man das gesuchte

Integral nicht finden würde, wenn nicht die Funktion und die Reihe einander gleich sind, diese Gleichheit besteht aber nur so lange, als die entwickelte Reihe eine convergente bleibt.

Cap. IV. Die Integration der Differenziale, welche Exponenzialgrössen oder Logarithmen enthalten.

§ 15.

Reduktionsformeln für Differenziale mit Exponenzialgrössen.

Unter unseren Grundformeln kommt nur eine einzige vor, bei welcher eine Exponenzialgrösse unter dem Integralzeichen erscheint, nämlich:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C$$

wofür man auch wegen $a^x = e^{la \cdot x}$ die folgende schreiben kann:

$$\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + C \qquad (1)$$

indem man sich la mit k bezeichnet denkt. Um nun das allgemeinere Integral

$$\int f(x)\,e^{kx}\,dx \qquad (2)$$

in welchem $f(x)$ eine beliebige Funktion bezeichnet, auf das obige zurückzuführen, kann man folgende zwei Wege einschlagen.

I. Unter Anwendung der Reduktionsformel

$$\int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(x)\int \psi(x)\,dx - \int \varphi'(x)\,dx \int \psi(x)\,dx \qquad (3)$$

ergiebt sich, wenn man zuerst $\varphi(x) = f(x), \psi(x) = e^{kx}$ setzt:

$$\int f(x)\,e^{kx}\,dx = f(x)\frac{e^{kx}}{k} - \frac{1}{k}\int f'(x)\,e^{kx}dx \qquad (4)$$

dann für $\varphi(x) = f'(x), \psi(x) = e^{kx}$, dann etc.

$$\int f'(x)\,e^{kx}\,dx = f'(x)\frac{e^{kx}}{k} - \frac{1}{k}\int f''(x)\,e^{kx}\,dx$$

ferner für $\varphi(x) = f''(x), \psi(x) = e^{kx}$

$$\int f''(x)\, e^{kx}\, dx = f''(x) \frac{e^{kx}}{k} - \frac{1}{k} \int f'''(x)\, e^{kx}\, dx.$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren beliebig weit fortführen liesse, und dass man nach $n$maliger Anwendung auf die Gleichung

$$\int f^{(n-1)}(x)\, e^{kx}\, dx = f^{(n-1)}(x) \frac{e^{kx}}{k} - \frac{1}{k} \int f^{(n)}(x)\, e^{kx}\, dx$$

kommen würde. Durch Substitution jeder solchen Gleichung in die ihr vorhergehende erhält man nun, wenn man bis zur Gleichung (4) zurücksteigt

$$\left.\begin{aligned} \int f(x)\, e^{kx}\, dx = \Big[\frac{f(x)}{k} - \frac{f'(x)}{k^2} + \frac{f''(x)}{k^3} + \dots \\ + \frac{(-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{k^n} \Big] e^{kx} + \frac{(-1)^n}{k^n} \int f^{(n)}(x)\, e^{kx} dx \end{aligned}\right\} (5)$$

Wird nun der $n$te Differenzialquotient von $f(x)$ zu einer constanten Grösse, was dann der Fall ist, wenn $f(x)$ eine ganze und algebraische rationale Funktion des Grades n bildet, so reduzirt die Formel (5) das complizirtere Integral auf das in (1) entwickelte Der einfachste Fall der Art wäre $f(x) = x^n$ und dann ergiebt sich

$$\int x^n e^{kx} dx$$

$$= \left[\frac{x^n}{k} - \frac{n x^{n-1}}{k^2} + \frac{n(n-1)\, x^{n-2}}{k^3} - \dots + \frac{(-1)^n n(n-1) \dots 2.1}{k^{n+1}} \right] e^{kx} \quad (6).$$

II. Die zweite Methode besteht darin, dass man wieder die Reduktionsformel (3) aber mit entgegengesetzten Substitutionen, nämlich $\varphi(x) = e^{kx}$, $\psi(x) = f(x)$ in Anwendung bringt. Setzt man dabei zur Abkürzung

$$\int f(x)\, dx = f_1(x), \int f_1(x)\, dx = f_2(x), \dots \int f_{n-1}(x)\, dx = f_n(x)$$

so erhält man leicht folgende Reihe von Gleichungen:

$$\int e^{kx} f(x)\, dx = e^{kx} f_1(x) - k \int e^{kx} f_1(x)\, dx$$

$$\int e^{kx} f_1(x)\, dx = e^{kx} f_2(x) - k \int e^{kx} f_2(x) dx$$

$$\int e^{kx} f_2(x)\, dx = e^{kx} f_3(x) - k \int e^{kx} f_3(x)\, dx$$

. . . .

$$\int e^{kx} f_{n-1}(x)\, dx = e^{kx} f_n(x) - k \int e^{kx} f_n(x)\, dx.$$

Substitution jeder Gleichung in ihre Vorgängerin giebt hier

$$\left.\begin{array}{c}\int e^{kx}f(x)\,dx \\ =[f_1(x)-k f_2(x)+k^2 f_3(x)-\ldots+(-1)^{n-1}k^{n-1}f_n(x)]e^{kx} \\ +(-1)^n k^n \int e^{kx} f_n(x)\,dx\end{array}\right\} \quad (7)$$

und diese Gleichung kann als Reduktionsformel dienen, sobald sich die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ leicht aus $f(x)$ ableiten lassen. So z. B. ist für $f(x)=\frac{1}{x^m}$,

$$f_1(x)=-\frac{1}{m-1}\frac{1}{x^{m-1}},\ f_2(x)=+\frac{1}{(m-1)(m-2)}\frac{1}{x^{m-2}},\ldots$$

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}\frac{1}{x^{m-n}}$$

folglich

$$\begin{array}{c}\int\frac{dx}{x^m}e^{kx} \\ =-\frac{e^{kx}}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{ke^{kx}}{(m-1)(m-2)x^{m-2}}-\frac{k^2e^{kx}}{(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-3}}-\ldots \\ -\frac{k^{n-1}e^{kx}}{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}+\frac{k^n}{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}\int\frac{dx}{x^{m-n}}e^{kx}\end{array}$$

und wenn m eine ganze positive Zahl ist, so kann man $n=m-1$ setzen und erhält so:

(8)

$$\left.\begin{array}{c}\int\frac{dx}{x^m}e^{kx} \\ =-\frac{e^{kx}}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{ke^{kx}}{(m-1)(m-2)x^{m-2}}-\frac{k^2e^{kx}}{(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-3}}-\ldots \\ -\frac{k^{m-2}e^{kx}}{(m-1)(m-2)\ldots 2.1}+\frac{k^{m-1}}{(m-1)(m-2)\ldots 2.1}\int\frac{dx}{x}e^{kx}\end{array}\right\}$$

Das auf der rechten Seite noch vorkommende Integral gehört unter die Zahl derer, welche sich durch die gewöhnlichen Funktionen nicht ausdrücken, sondern nur durch Reihen näherungsweis berechnen lassen. Diess hat gerade hier keine besonderen Schwierigkeiten, denn es ist vermöge der bekannten Reihe für die Exponenzialgrösse

$$\begin{array}{c}\int\frac{dx}{x}e^{kx} \\ =\int\left[\frac{1}{x}+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}x+\frac{k^3}{1.2.3}x^2+\ldots\right]dx \\ =\frac{1}{2}l(x^2)+\frac{1}{1}\frac{kx}{1}+\frac{1}{2}\frac{(kx)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(kx)^3}{1.2.3}+\ldots+C\end{array} \quad (9)$$

und da die für e^{kx} in Anwendung gebrachte Reihe für alle x convergirt, so besteht auch die daraus abgeleitete Gleichung für jedes x.

Will sich keine der beiden Reduktionen (5) und (7) auf das gegebene Integral mit Vortheil anwenden lassen, so bleibt nichts übrig, als entweder $f(x)$ oder e^{kx} in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe zu verwandeln und jedes einzelne Glied zu integriren. Lassen sich beide Funktionen in solche Reihen umsetzen, so giebt ihr Produkt eine neue Reihe derselben Art und dann erhält man den Werth des Integrales ebenfalls in einer nach steigenden Potenzen von x geordneten Reihe ausgedrückt. So z. B. würde diess bei den Integralen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)x}}\, e^x$$

geschehen können, sobald man eine neue Variabele z mittelst der Substitution $x=z^2$ eingeführt hat, wodurch das Integral in

$$2\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\, e^{z^2}$$

übergeht. Multiplizirt man jetzt die Reihen für $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ und e^{z^2} mit einander und setzt zur Abkürzung $1.2.3\ldots m = m'$, ferner

$$\frac{1}{n'} + \frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)'} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{(n-2)'} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{(n-3)'} + \ldots = \frac{1}{2}A_{2n}$$

so ist das in Bezug auf z genommene Integral für $z<1$

$$= \int [1 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + A_6 z^6 + \ldots]\, dz$$
$$= z + \tfrac{1}{3}A_2 z^3 + \tfrac{1}{5}A_4 z^5 + \tfrac{1}{7}A_6 z^7 + \ldots + C$$

und folglich hat das ursprüngliche Integral für $x<1$ den Werth

$$\sqrt{x}\,[1 + \tfrac{1}{3}A_2 x + \tfrac{1}{5}A_4 x^2 + \tfrac{1}{7}A_6 x^3 + \ldots] + C.$$

Aehnlich würde man in ähnlichen Fällen verfahren.

§ 16.

Reduktionsformeln für Differenziale mit Logarithmen.

Um gleich eine etwas allgemeine Form zu betrachten, wollen wir das Integral

$$\int f(x)\,(lx)^p\, dx \qquad (1)$$

zu reduziren versuchen. Wenden wir zu diesem Zwecke die Formel für die partielle Integration in der Weise an, dass wir

$$\int f(x)\,dx = f_1(x), \int \frac{dx}{x} f_1(x) = f_2(x), \int \frac{dx}{x} f_2(x) = f_3(x), \ldots$$
$$\ldots \int \frac{dx}{x} f_{n-1}(x) = f_n(x) \qquad (2)$$

setzen, so ist es sehr leicht zu der folgenden Reihe von Gleichungen zu gelangen:

$$\int f(x)(lx)^p dx = f_1(x)(lx)^p - p\int \frac{dx}{x} f_1(x)(lx)^{p-1}$$

$$\int \frac{dx}{x} f_1(x)(lx)^{p-1} = f_2(x)(lx)^{p-1} - (p-1)\int \frac{dx}{x} f_2(x)(lx)^{p-2}$$

$$\int \frac{dx}{x} f_2(x)(lx)^{p-2} = f_3(x)(lx)^{p-2} - (p-2)\int \frac{dx}{x} f_3(x)(lx)^{p-3}$$

. . . .

$$\int \frac{dx}{x} f_{n-1}(x)(lx)^{p-n+1} = f_n(x)(lx)^{p-n+1} - (p-n+1)\int \frac{dx}{x} f_n(x)(lx)^{p-n}.$$

Durch Substitution jeder Gleichung in die ihr vorhergehende findet man hieraus:

$$\int f(x)(lx)^p dx$$
$$= f_1(x)(lx)^p - p f_2(x)(lx)^{p-1} + p(p-1) f_3(x)(lx)^{p-2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} p(p-1)\ldots(p-n+2) f_n(x)(lx)^{p-n+1}$$
$$+ (-1)^n p(p-1)\ldots(p-n+1)\int \frac{dx}{x} f_n(x)(lx)^{p-n}$$

Ist nun p eine positive ganze Zahl, so kann man $p=n$ setzen und hat so vermöge der Bedeutung von $f_{n+1}(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \int f(x)(lx)^n dx \\ = f_1(x)(lx)^n - n f_2(x)(lx)^{n-1} + n(n-1) f_3(x)(lx)^{n-2} - \ldots \\ \ldots + (-1)^n n(n-1)\ldots 2.1.f_{n+1}(x). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Diese Reduktionsformel ist z. B. mit Leichtigkeit auf den Fall $f(x)=x^m$, wo m jede beliebige von -1 verschiedene Grösse bedeuten darf, anwendbar. Es ist nämlich

$$f_1(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}, f_2(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}, f_3(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}, \text{ etc.}$$

folglich für jedes m exclus. $m=-1$ und positive ganze n

$$\left.\begin{array}{l}\int x^m (lx)^n dx \\ +\left[\frac{(lx)^n}{m+1} - \frac{n(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(m+1)^{n+1}}\right] x^{m+1}\end{array}\right\} \quad (4)$$

Der Fall $m = -1$ bedarf noch einer besonderen Betrachtung. Nun ist aber für $lx = z$, $\frac{dx}{x} = dz$, folglich

$$\int (lx)^n \frac{dx}{x} = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C$$

und damit auch dieser Fall erledigt.

Ist in dem Integrale (1) p keine positive ganze Zahl, so vermehrt die vorige Reduktionsmethode die Schwierigkeiten, statt sie zu vermindern, und man muss dann einen anderen Weg einschlagen, der wenigstens in dem Falle zum Ziele führt, wo p eine negative ganze Zahl, also das Integral von der Form

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(lx)^p} \quad (5)$$

ist. Mittelst partieller Integration ist nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\int \frac{f(x)\,dx}{(lx)^p} = \int x f(x) \frac{dx}{x(lx)^p} \\ = x f(x) \int \frac{dx}{x(lx)^p} - \int d[x f(x)] \int \frac{dx}{x(lx)^p}\end{array}\right\} \quad (6)$$

Hier lässt sich eine Integration ausführen; man hat nämlich

$$\int \frac{dx}{x(lx)^p} = \int (lx)^{-p} d(lx) = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{(lx)^{p-1}}$$

wobei natürlich der Fall $p = 1$ ausgeschlossen ist. Demnach wird jetzt aus (6)

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(lx)^p} = -\frac{1}{p-1} \frac{x f(x)}{(lx)^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \int \frac{d[x f(x)]}{(lx)^{p-1}}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l}d[x f(x)] = f_1(x)\,dx,\ d[x f_1(x)] = f_2(x)\,dx, \dots \\ d[x f_{n-1}(x)] = f_n(x)\,dx\end{array}\right\} \quad (7)$$

so kann man durch successive Anwendung desselben Kunstgriffes leicht olgende Reihe von Gleichungen erhalten:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(lx)^p} = -\frac{xf(x)}{(p-1)(lx)^{p-1}} + \int \frac{f_1(x)\,dx}{(lx)^{p-1}}$$

$$\int \frac{f_1(x)\,dx}{(lx)^{p-1}} = -\frac{xf_1(x)}{(p-2)(lx)^{p-2}} + \int \frac{f_2(x)\,dx}{(lx)^{p-2}}$$

$$\int \frac{f_2(x)\,dx}{(lx)^{p-2}} = -\frac{xf_2(x)}{(p-3)(lx)^{p-3}} + \int \frac{f_3(x)\,dx}{(lx)^{p-3}}$$

. . . .

$$\int \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{(lx)^{p-n+1}} = \frac{xf_{n-1}(x)}{(p-n)(lx)^{p-n}} + \frac{1}{p-n}\int \frac{f_n(x)\,dx}{(lx)^{p-n}}$$

aus deren Substitution in einander sich die Formel

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(lx)^p}$$

$$= -\frac{xf(x)}{(p-1)(lx)^{p-1}} - \frac{xf_1(x)}{(p-1)(p-2)(lx)^{p-2}} - \dots$$

$$\dots - \frac{xf_{n-1}(x)}{(p-1)(p-2)\dots(p-n)(lx)^{p-n}} + \frac{1}{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}\int \frac{f_n(x)\,dx}{(lx)^{p-n}}$$

ergiebt; und hieraus folgt für ein ganzes positives $p=n+1$, wenn man nachher $n-1$ für n schreibt

(8)

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{f(x)\,dx}{(lx)^n} \\ &= -\frac{xf(x)}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{xf_1(x)}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \dots - \frac{xf_{n-2}(x)}{(n-1)(n-2)\dots 2.1.\,lx} \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots 2.1}\int \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{lx} \end{aligned}\right\}$$

Diess giebt z. B. für $f(x)=x^m$, wo m eine beliebige von Null verschiedene Grösse bezeichnet,

(9)

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{x^m dx}{(lx)^n} \\ &= -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \dots - \frac{(m+1)^{n-2}x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\dots 2.1\,lx} \\ &\quad + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots 2.1}\int \frac{x^m dx}{lx} \end{aligned}\right\}$$

und hierbei lässt auch das letzte Integral noch eine Reduktion zu, indem man $x^{m+1}=z$ setzt, woraus $(m+1)\,lx=lz$ und $(m+1)\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{z}$ oder, durch Multiplikation mit $x^{m+1}=z$,

$$(m+1)x^m dx = dz$$

folgt. Man erhält dann sogleich durch Division mit der Gleichung $(m+1)lx = lz$ und Integration

$$\int \frac{x^m dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz} \qquad (10)$$

so dass es also blos noch auf die letztere Integration ankommen würde. Diese Transformationen würden jedoch in dem Falle $m = -1$ nicht anwendbar sein, aber dann ist unmittelbar

$$\int \frac{dx}{xlx} = \int \frac{d(lx)}{lx} = \tfrac{1}{2} l[(lx)^2] + C$$

$$\int \frac{dx}{x(lx)^n} = \int \frac{d(lx)}{(lx)^n} = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}} + C.$$

Was nun das Integral (10) anbelangt, so ist dasselbe nicht weiter reduzirbar und gehört mit dem in Nro. (9) des vorigen Paragraphen in eine Categorie; denn setzt man in (10) $lz = u$ oder $z = e^u$, so wird

$$\int \frac{dz}{lz} = \int \frac{du}{u} e^u$$

und diess ist das Nämliche, wie Nro. (9) in §. 15. für $k=1, x=u$. Substituirt man die Werthe $k=1, x=u=lz$ in die dort gefundene Reihe, so bekommt man noch

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{dz}{lz} \\ &= \tfrac{1}{2} l[(lz)^2] + \tfrac{1}{1}\frac{lz}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \ldots + C. \end{aligned}\right\} (11)$$

Da dieses Integral häufig vorkommt, so hat man ihm einen besonderen Namen gegeben, sobald die Constante C so bestimmt ist, dass das Integral für $z=0$ verschwindet. Das bestimmte Integral

$$\int_0^z \frac{dz}{lz}$$

nennt man in diesem Falle den Integrallogarithmus von z und bezeichnet es mit $li(z)$. Dabei wäre

$$\left.\begin{aligned} li(z) = &\tfrac{1}{2} l[(lz)^2] + \tfrac{1}{1}\frac{lz}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \ldots \\ &- \left[\tfrac{1}{2} l[(l0)^2] + \tfrac{1}{1}\frac{l0}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{(l0)^2}{1.2} + \ldots\right] \end{aligned}\right\} (12)$$

Hierbei stellt sich aber die zweite Reihe auf der rechten Seite unter die unbestimmte Form $\infty - \infty + \infty - \infty$ etc., d. h. mit anderen Worten, wenn man mit $\varphi(z)$ die Summe der Reihe

$$\tfrac{1}{2}l[(lz)^2] + \tfrac{1}{1}\frac{lz}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \ldots$$

bezeichnet, so lässt sich aus dieser Relation unmittelbar die Gränze nicht ableiten, gegen welche $\varphi(\frac{1}{m})$ conergirt, sobald m ins Unendliche wächst. Man kann aber zu diesem Gränzwerthe, welcher K heissen möge, leicht auf andere Weise gelangen, indem man diejenigen Werthe von $\int \frac{dz}{lz}$ mit einander vergleicht, welche durch direkte und durch indirekte Integration zum Vorschein kommen. Einerseits ist nämlich dem Begriffe des bestimmten Integrales gemäss

$$li(z) = \int_0^z \frac{dz}{lz}$$

$$= \text{Lim}\left[\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{l0} + \frac{1}{l\frac{z}{n}} + \frac{1}{l\frac{2z}{n}} + \ldots + \frac{1}{l\frac{\overline{n-1}z}{n}}\right\}\right]$$

wenn man n ins Unendliche wachsen lässt, andererseits nach Nro. (12)

$$li(z) = -K + \tfrac{1}{2}l[(lz)^2] + \tfrac{1}{1}\frac{z}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{1.2} + \ldots \qquad (13)$$

folglich durch Vergleichung beider Werthe von $li(z)$

$$-K = \text{Lim}\left[\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{lz - ln} + \frac{1}{l(2z) - ln} + \ldots + \frac{1}{l(\overline{n-1}z) - n}\right\}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}l[(lz)^2] - \tfrac{1}{1}\frac{z}{1} - \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{1.2.3} - \ldots$$

Um nun K näherungsweis zu berechnen, braucht man nur für z einen kleinen Bruch und für n eine einigermassen grosse Zahl zu setzen. Auf diese Weise findet man

$$-K = 0{,}5772156901\ldots$$

und wenn man diesen numerischen Werth in die Gleichung (13) einführt, so dient dieselbe wegen der beständigen Convergenz der Reihe rechts zur Berechnung von $li(z)$ für jedes beliebige z.

Cap. V. Die Integration der Differenziale, welche goniometrische und cyklometrische Funktionen enthalten.

§ 17.

Reduktionsformeln für die einfachsten Fälle.

Im allgemeinen ist es sehr leicht, jedes Integral, dessen Differenzial nur aus goniometrischen Funktionen zusammengesetzt ist, auf eine algebraische Form zu bringen, und in der That bedarf es hierzu in dem Integrale

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx$$

nur der einfachen Substitution $\sin x = z$, woraus $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, ferner $\cos x\, dx = dz$ oder $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ folgt; diess giebt dann

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = \int f(z, \sqrt{1-z^2}) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \qquad (1)$$

und somit wäre die ganze Aufgabe auf eine früher bereits behandelte zurückgeführt. Um aber nicht in jedem einzelnen vorkommenden Falle diese Substitution nebst den sich daran knüpfenden Reduktionen vornehmen zu müssen, ist es bequemer die hauptsächlichsten Formeln der Art ein für allemal zu betrachten und die Reduktionen selbst in solcher Gestalt zu geben, dass die goniometrischen Funktionen dabei nicht herausfallen. Der einfachste Fall für $f(\sin x, \cos x)$ ist nun derjenige, in welchem $\sin^p x \cos^q x$ dafür genommen wird, wobei p und q ganz beliebige Grössen sein mögen. Die Reduktionsformel (1) giebt dann für $\sin x = z$

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \int z^p (1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)} dz \qquad (2)$$

und wenn wir statt des Integrales rechts das folgende betrachten

$$\int z^{m-1} (1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)} dz \qquad (3)$$

so erhellt sogleich, dass hier die sechs Reduktionsformeln des §. 12 für $a = 1, b = -1, n = 2, p = \frac{1}{2}(q-1) x = z$ in Anwendung gebracht werden können. Diess giebt sogleich folgende sechs Relationen:

$$\int z^{m-1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}dz$$

$$=\frac{z^m(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{m}+\frac{q-1}{m}\int z^{m+1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}dz$$

$$=-\frac{z^{m-2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{q+1}+\frac{m-2}{q+1}\int z^{m-3}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}dz$$

$$=\frac{z^m(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{m}+\frac{m+q+1}{m}\int z^{m+1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}dz$$

$$=-\frac{z^{m-2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{m+q-1}+\frac{m-2}{m+q-1}\int z^{m-3}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}dz$$

$$=\frac{z^m(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{m+q-1}+\frac{q-1}{m+q-1}\int z^{m-1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}dz$$

$$=-\frac{z^m(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}}{q+1}+\frac{m+q+1}{q+1}\int z^{m-1}(1-z^2)^{\frac{1}{2}(q+1)}dz.$$

Setzt man in diesen Formeln gleichzeitig $m=p+1$ und $z=\sin x$, so ergeben sich die folgenden sechs Reduktionsformeln:

$$\left.\begin{aligned}&\int \sin^p x\cos^q x\,dx\\ &=\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x}{p+1}+\frac{q-1}{p+1}\int \sin^{p+2}x\cos^{q-2}x\,dx\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int \sin^p x\cos^q x\,dx\\ &=-\frac{\sin^{p-1}x\cos^{q+1}x}{q+1}+\frac{p-1}{q+1}\int \sin^{p-2}x\cos^{q+2}x\,dx\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int \sin^p x\cos^q x\,dx\\ &=\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q+1}x}{p+1}+\frac{p+q+2}{p+1}\int \sin^{p+2}x\cos^q x\,dx\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int \sin^p x\cos^q x\,dx\\ &=-\frac{\sin^{p-1}x\cos^{p+1}x}{p+q}+\frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2}x\cos^q x\,dx\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int \sin^p x\cos^q x\,dx\\ &=\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x}{p+q}+\frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x\cos^{q-2}x\,dx\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int \sin^p x\cos^q x\,dx\\ &=-\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q+1}x}{q+1}+\frac{p+q+2}{q+1}\int \sin^p x\cos^{q+2}x\,dx\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Den Gebrauch dieser Formeln werden die folgenden Betrachtungen erläutern. Sei zunächst $q=0$ und p eine positive oder negative ganze Zahl $=\pm m$, so hat man im ersten Falle nach Nro. (7)

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x dx$$

und damit ist das Integral auf ein anderes derselben Form zurückgeführt, worin der Exponent von $\sin x$ um zwei niedriger ist. Wendet man diese Formel mehrmals hintereinander an, so bringt man das fragliche Integral entweder auf $\int dx = x$, wenn m gerade, oder auf $\int \sin x dx = -\cos x$ zurück, wenn m ungerade ist. Man hat daher

a) für gerade m

$$(10)$$

$$\int \sin^m x dx$$

$$= -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5}x + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3}{(m-2)(m-4)\dots 2}\sin x\right] + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3.1}{m(m-2)(m-4)\dots 4.2}x + C;$$

b) für ungerade m

$$(11)$$

$$\int \sin^m x dx$$

$$= -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5}x + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{(m-1)(m-3)\dots 4.2}{(m-2)(m-4)\dots 3.1}\right] + C.$$

Wäre dagegen m eine negative ganze Zahl $p=-m$, so erhält man aus der Formel (6)

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x}$$

und für gerade m kann man hier die Integration durch successive Anwendung dieser Formel vollständig ausführen, bei ungeradem m dagegen kommt man zuletzt auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

dessen Werth sich leicht durch die Substitution $\cos x = z$ findet. Es geht nämlich in diesem Falle das Integral in

$$-\int\frac{dz}{1-z^2}=-\tfrac{1}{4}\,l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2=\tfrac{1}{4}\,l\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2+C$$

über, woraus rückwärts für $z=\cos x$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\tfrac{1}{2}\,l(\tan\tfrac{1}{2}x)^2+C \tag{12}$$

folgt. Nach diesen Bemerkungen findet man ohne Schwierigkeit:

a) für gerade m

$$\left.\begin{aligned}&\int \operatorname{cosec}^m x\,dx\\ &=-\frac{\cos x}{m-1}\Big[\operatorname{cosec}^{m-1}x+\frac{m-2}{m-3}\operatorname{cosec}^{m-3}x+\dots\\ &\qquad\dots+\frac{(m-2)\dots4.2}{(m-3)\dots3.1}\operatorname{cosec}x\Big]+C\end{aligned}\right\}(13).$$

b) für ungerade m

(14)

$$\int \operatorname{cosec}^m x\,dx$$

$$=-\frac{\cos x}{m-1}\Big[\operatorname{cosec}^{m-1}x+\frac{m-2}{m-3}\operatorname{cosec}^{m-3}x+\dots+\frac{(m-2)\dots5.3}{(m-3)\dots4.2}\operatorname{cosec}^2 x\Big]$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)\dots3.1}{(m-1)(m-3)\dots4.2}\tfrac{1}{2}\,l\tan^2\tfrac{1}{2}x+C$$

Ebenso leicht gelangt man zu Formeln für $\int\cos^q x\,dx$, indem man in den sechs Hauptformeln $p=0$ und für q eine positive oder negative ganze Zahl $\pm n$ substituirt. Man hat dann im ersten Falle nach Nro. (8)

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

und hieraus findet man leicht das nachstehende Formelpaar.

a) für gerade n

$$\left.\begin{aligned}&\int\cos^n x\,dx\\ &=\frac{\sin x}{n}\Big[\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x+\dots+\frac{(n-1)(n-3)\dots5.3}{(n-2)(n-4)\dots4.2}\cos x\Big]\\ &\qquad+\frac{(n-1)(n-3)\dots3.1}{n(n-2)\dots4.2}\,x+C;\end{aligned}\right\}(15)$$

b) für ungerade n

$$\int \cos^n x dx$$
$$= \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5}x + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{(n-1)(n-3)\dots 4.2}{(n-2)(n-4)\dots 3.1}\right] + C. \qquad (16)$$

Im zweiten Falle $q=-n$ giebt die Anwendung der Formel (9)

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}$$

und hier lässt sich für ein gerades n das Integral vollständig entwickeln, für ein ungerades n dagegen stösst man zuletzt auf

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\frac{1}{2}\pi - x)}{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)}$$

und wenn man hier die Formel (12) benutzt, indem man sich $\frac{1}{2}\pi - x$ an die Stelle von x gesetzt denkt, so folgt

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\tfrac{1}{2}l\tan^2(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}l\tan^2(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) + C \qquad (17)$$

und nach diesen Bemerkungen findet man leicht:

a) für ein gerades n

$$\int \sec^n x dx$$
$$= \frac{\sin x}{n-1}\left[\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x + \dots + \frac{(n-2)\dots 4.2}{(n-3)\dots 3.1}\sec x\right] + C; \quad (18)$$

b) für ein ungerades n

$$\int \sec^n x dx$$
$$= \frac{\sin x}{n-1}\left[\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x + \dots + \frac{(n-2)\dots 5.3}{(n-3)\dots 4.2}\sec^2 x\right]$$
$$+ \frac{(n-2)(n-4)\dots 3.1}{(n-1)(n-3)\dots 4.2}\tfrac{1}{2}l\tan^2(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) + C. \qquad (19)$$

Nimmt man ferner in der Formel (5) $p=m, q=-m$, wo m wieder eine ganze positive Zahl bedeutet, so wird

$$\int \tan^m x dx = \frac{\tan^{m-1}x}{m-1} - \int \tan^{m-2}x dx.$$

Bei einem geradem m führt dies Formel zuletzt auf $\int dx = x$, bei ungeradem auf $\int \tan x dx = -\frac{1}{2} l \cos^2 x$ (nach Nro. 14 der Grundformeln) und hieraus folgt:

a) für gerade m

(20)

$$\int \tan^m x dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \frac{\tan^{m-3} x}{m-3} + \frac{\tan^{m-5} x}{m-5} - \ldots - \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \tan x}{1} + (-1)^{\frac{m}{2}} + C;$$

b) für ungerade m

$$\int \tan^m x dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \frac{\tan^{m-3} x}{m-3} + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} \tan^2 x}{2} + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \tfrac{1}{2} l \cos^2 x + C. \quad (21)$$

Um auch noch eine Cotangentenformel zu erhalten, setzen wir in Formel (4) $q =$ einer ganzen positiven Zahl n und $p = -n$; es ergiebt sich dann

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx$$

und mittelst dieser Formel bringt man das Integral links auf eines von den Integralen

$$\int dx = x, \text{ oder} \int \cot x dx = \tfrac{1}{2} l \sin^2 x$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Diess giebt dann

a) für ein gerades n

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} - \ldots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cot x}{1} - (-1)^{\frac{n}{2}} x + C; \quad (22)$$

b) für ungerade n

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} - \ldots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cot^2 x}{2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tfrac{1}{2} l \sin^2 x + C. \quad (23)$$

Dass es nun mit Hülfe der bisher aufgestellten Formeln immer möglich ist, das Integral

$$\int \sin^p x \cos^q x dx$$

vollständig zu entwickeln, wenn p und q ganze Zahlen sind, gleichviel ob positiv oder negativ, lässt sich auf folgende Weise zeigen.

1. Sind p und q beide positiv, so bringe man die Formel (7) wiederholt in Anwendung und vermindere auf diese Weise p der Reihe nach um 2, 4, 6 etc. So reduzirt sich das Integral auf eines von den beiden:

$$\int \cos^q x dx, \int \sin x \cos^q x dx \tag{24}$$

je nachdem p gerade oder ungerade ist. Der Werth des ersten der vorstehenden Integrale kann nach Formel (16) gefunden werden, und der des zweiten ist

$$-\int \cos^q x d(\cos x) = -\frac{\cos^{q+1} x}{q+1} + C. \tag{25}$$

2. Für ein positives p und negatives q verfährt man anfangs ebenso wie vorhin und wendet dann die Formel (19) an, das zweite Integral in (25) würde ebenfalls durch die Formel (25) gegeben sein und nur in dem Falle $q=-1$ tritt eine Aenderung ein, in so fern man hier die Formel (17) in Anwendung bringen muss.

3. Für ein negatives p und positives q benutzt man die Formel (8) zu einer successiven Verminderung des q; man kommt dadurch auf eines der Integrale

$$\int \sin^p x dx, \int \sin^p x \cos x dx \tag{26}$$

von denen das erste nach Nro. (13) entwickelt wird und das zweite

$$=\int \sin^p x d(\sin x) = \frac{\sin^{p+1} x}{p+1} + C \tag{27}$$

ist. Nur für $p=-1$ würde diess nicht gelten und dann muss man die Formel

$$\int \cot x dx = \tfrac{1}{2} l \sin^2 x + C \tag{28}$$

in Anwendung bringen.

4. Sind endlich p und q beide negativ, so vermehre man q successive mit Hülfe der Formel (9) und reduzire so das Integral auf eines von den beiden

$$\int \sin^p x dx, \int \frac{\sin^p x}{\cos x} dx.$$

Auf das erste ist die Formel (14) anwendbar, das zweite findet man dadurch, dass man mittelst der Formel (6) das negative p vermehrt. Es reduzirt sich dann das Integral entweder auf

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \tfrac{1}{2} l \tan^2(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) + C$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \tfrac{1}{2} l \tan^2 x + C. \qquad (30)$$

Da hinsichtlich der Zahlen p und q keine anderen als die hier aufgezählten vier Fälle vorkommen können, so rechtfertigt sich damit die vorhin ausgesprochene Behauptung.

§ 18.

Integration von $dx : (a + b\cos x)$ und ähnlichen Ausdrücken.

Die am Eingange des vorigen Paragraphen erwähnte Methode zur Reduktion goniometrischer Integrale auf solche, deren Differenzial nur algebraische Bestandtheile enthält, ist gleichförmig auf das häufig vorkommende Integral

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} \qquad (1)$$

anwendbar. Für $\cos x = z$ erhält man nämlich zunächst

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = -\int \frac{dz}{(a + bz)\sqrt{1 - z^2}}$$

und da hier das auf z bezogene Integral nicht unter den bisher behandelten vorkommt, so muss man es rational machen, was durch die Substitution

$$z = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \qquad (2)$$

leicht geschehen kann. Es wird nämlich dabei

$$\sqrt{1 - z^2} = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad dz = -\frac{4udu}{(1 + u^2)^2}$$

und mittelst dieser Werthe

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = -\int \frac{dz}{(a+bz)\sqrt{1-z^2}} = 2\int \frac{du}{a+b+(a-b)u^2};$$

hier würde man Gelegenheit zur Anwendung bekannter Formeln finden Um hierauf von dem nach u genommenen Integrale auf das nach x genommene zurückzugelangen, bedarf es blos der Bemerkung, dass aus Nro. (2) folgt:

$$u = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \tan \tfrac{1}{2}x.$$

Man kann aber auch dadurch zu dem Integrale in (1) gelangen, dass man erst die beiden Integrale

$$\int \frac{dz}{\alpha^2 \cos^2 z - \beta^2 \sin^2 z} \text{ und} \int \frac{dz}{\alpha^2 \cos^2 z + \beta^2 \sin^2 z} \qquad (3)$$

betrachtet, woraus der Werth des obigen leicht abzuleiten ist

Das erste der hier aufgeführten Integrale lässt sich leicht entwickeln, indem man bemerkt, dass es

$$= \int \frac{\frac{dz}{\cos^2 z}}{\alpha^2 - \beta^2 \tan^2 z} = \int \frac{d\tan z}{\alpha^2 - \beta^2 \tan^2 z},$$

also

$$\int \frac{dz}{\alpha^2 \cos^2 z - \beta^2 \sin^2 z} = \frac{1}{4\alpha\beta}\, l\left(\frac{\alpha+\beta\tan z}{\alpha-\beta\tan z}\right)^2 + C$$

ist, und ebenso findet man das zweite

$$= \int \frac{\frac{dz}{\cos^2 z}}{\alpha^2 + \beta^2 \tan^2 z} = \int \frac{d\tan z}{\alpha^2 + \beta^2 \tan^2 z}$$

d. i.

$$\int \frac{dz}{\alpha^2 \cos^2 z + \beta^2 \sin^2 z} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\tan z\right) + C.$$

Vermöge der bekannten goniometrischen Formeln

$$\cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2}, \quad \sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$$

ergiebt sich hieraus

$$\int \frac{2\,dz}{\alpha^2 - \beta^2 + (\alpha^2+\beta^2)\cos 2z} = \frac{1}{4\alpha\beta}\, l\left(\frac{\alpha+\beta\tan z}{\alpha-\beta\tan z}\right)^2 + C$$

$$\int \frac{2\,dz}{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha^2-\beta^2)\cos 2z} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\tan z\right) + C.$$

Setzt man nun im ersten Integrale

$$\alpha^2-\beta^2=a,\ \alpha^2+\beta^2=b,$$

also

$$=\sqrt{\frac{b+a}{2}},\ \beta=\sqrt{\frac{b-a}{2}},\ a<b$$

dagegen im zweiten Integrale

$$\alpha^2+\beta^2=a,\ \alpha^2-\beta^2=b$$

also

$$\alpha=\sqrt{\frac{a+b}{2}},\ \beta=\sqrt{\frac{a-b}{2}},\ a>b$$

und in beiden Formeln $2z=x$ oder $x=\frac{1}{2}z$, so ergeben sich auf der Stelle die beiden Integralformeln

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\,l\left[\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{1}{2}x}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{1}{2}x}\right]^2+C \qquad (4)$$

wobei $a<b$ sein muss, und dagegen für $a>b$:

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\tfrac{1}{2}x\right)+C. \qquad (5)$$

Wäre endlich $a=b$, so würde man diese Formeln nicht unmittelbar anwenden können, dagegen ist ganz einfach in diesem Falle $a+b\cos x=a(1+\cos x)=2a\cos^2\frac{1}{2}x$ und folglich

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{a}\int\sec^2\tfrac{1}{2}x\,d(\tfrac{1}{2}x)=\frac{1}{a}\tan\tfrac{1}{2}x+C.$$

Nicht weniger leicht sind die Integrale

$$\int\frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}\ \text{und}\int\frac{\cos x\,dx}{a+b\cos x}$$

zu entwickeln. Bemerkt man, dass

$$\frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}=\frac{-d\cos x}{a+b\cos x}=-\frac{1}{b}\,\frac{d(a+b\cos x)}{a+b\cos x}$$

ist, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\int\frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}=-\frac{1}{2b}\,l(a+b\cos x)^2+C. \qquad (6)$$

Das zweite der vorhin aufgestellten Integrale lässt sich unter die Form

$$\int\left[\frac{1}{b}-\frac{a}{b(a+b\cos x)}\right]dx$$

bringen und hieraus erkennt man sogleich die Richtigkeit der Gleichung

$$\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a + b\cos x} \tag{7}$$

welche das gesuchte Integral auf das in Nro. (4) und (5) behandelte reduzirt.

Um das allgemeinere Integral

$$\int \frac{a' + b'\cos x}{(a + b\cos x)^n}\, dx \tag{8}$$

zu reduziren, bedienen wir uns des Kunstgriffs, dasselbe

$$= \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{B + C\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\, dx \tag{9}$$

zu setzen, worin A, B, C drei unbekannte von a, b, a' und b' abhängige Constanten bezeichnen. Ob diese hypothetisch aufgestellte Gleichung bestehen kann oder nicht, wird sich von selbst dadurch entscheiden, dass zur Bestimmung von A, B, C im ersten Falle Gleichungen mit möglichen, im zweiten, Gleichungen mit unmöglichen Wurzeln herauskommen. Durch Differenziation der Gleichung (8) = (9) erhält man nun nach Wegschaffung von dx und $(a + b\cos x)^n$,

$$a' + b'\cos x = A\cos x(a + b\cos x) + (n-1)Ab\sin^2 x$$
$$+ (B + C\cos x)(a + b\cos x)$$

und wenn man Alles nach Potenzen von $\cos x$ ordnet, wobei man $1 - \cos^2 x$ für $\sin^2 x$ schreibt,

$$a' + b'\cos x = (n-1)Ab + Ba + (Aa + Bb + Ca)\cos x$$
$$+ [Ab - (n-1)Ab + Cb]\cos^2 x.$$

Soll diese Gleichung für alle x bestehen und eine reine Identität darstellen, so müssen die Coeffizienten gleicher Potenzen von $\cos x$ beiderseits einander gleich sein; aus den drei so entstehenden Gleichungen

$$(n-1)Ab + Ba = a',\ Aa + Bb + Ca = b'$$
$$-(n-2)A + C = 0$$

erhält man jetzt:

$$A = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{ab' - a'b}{a^2 - b^2},\ B = \frac{aa' - bb'}{a^2 - b^2},$$

$$C = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{ab' - a'b}{a^2 - b^2}$$

und diese Bestimmung bleibt immer ausführbar, sobald b von a verschieden ist, was wir ohnehin voraussetzen müssen, wenn das Integral in (8) nicht einer früher betrachteten Categorie anheim fallen soll. Vermöge der Werthe von A, B, C ergiebt sich nun durch Vergleichung von (8) und (9)

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{(a'+b'\cos x)\,dx}{(a+b\cos x)^n} &= \frac{1}{n-1}\,\frac{ab'-a'b}{a^2-b^2}\,\frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\\ &+\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{(n-1)(aa'-bb')+(n-2)(ab'-a'b)\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\,dx\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Für ein ganzes positives n kommt man durch mehrmalige Anwendung dieser Formel zuletzt auf ein Integral der Gestalt:

$$\int\frac{\alpha+\beta\cos x}{a+b\cos x}\,dx$$

$$=\int\left[\frac{\beta}{b}-\frac{a\beta-b\alpha}{b(a+b\cos x)}\right]dx=\frac{\beta}{b}\,x-\frac{a\beta-b\alpha}{b}\int\frac{dx}{a+b\cos x}$$

und ist demnach im Stande, das Integral in (8) vollständig zu entwickeln.

Betrachten wir noch das namentlich in den Anwendungen des höheren Calcüls vorkommende Integral

$$\int(a+b\cos x)^\mu\,dx$$

so ist unmittelbar klar, dass sich dasselbe für ein ganzes μ immer in endlicher Form darstellen lässt. Denn für ein positives μ würde man dem Binomialtheoreme zufolge

$$(a+b\cos x)^\mu=\mu_0\,a^\mu+\mu_1\,a^{\mu-1}b\cos x+\mu_2\,a^{\mu-2}b^2\cos^2 x+\dots$$

setzen und nun jedes einzelne Glied integriren, für ein negatives μ dagegen könnte man sich der Reduktionsformel (10), $a'=1, b'=0$ nehmend, bedienen. Ist dagegen μ keine ganze Zahl und zugleich $a>b$, so muss man sich mit der Verwandelung des Integrales in eine unendliche Reihe begnügen. Setzt man zur Abkürzung $\frac{b}{a}=k$, wo nun k ein ächter Bruch ist, so hat man

$$\int(a+b\cos x)^\mu\,dx=a^\mu\int(1+k\cos x)^\mu dx$$

und da nun auch $k\cos x<1$ bleibt, so giebt das allgemeine Binomialtheorem

$$\left.\begin{array}{r}\int(1+k\cos x)^{\mu}dx\\ =\int\Big[\mu_0+\mu_1\,k\cos x+\mu_2 k^2\cos^2 x+\mu_3 k^3\cos^3 x+\ldots\Big]dx\end{array}\right\}\quad(11)$$

Hier würde nun aber die Integration der einzelnen Glieder eine sehr weitläufige Operation werden, weil jedes einzelne derartige Integral desto mehr Bestandtheile hat, je höher der Exponent von $\cos x$ ist. Wir transformiren daher die unter dem Integralzeichen stehende Reihe in eine andere, welche nach den Cosinus von $x, 2x, 3x$, etc. fortschreitet. Diess geschieht, indem man auf jedes einzelne Glied der Reihe den für ein positives m geltenden Satz

$$\cos^m x=\frac{1}{2^m}\Big[m_0\cos mx+m_1\cos(m-2)x+m_2\cos(m-4)x+\ldots$$
$$\ldots+m_{m-1}\cos(m-\overline{2m-2})x+m_m\cos(m-2m)x\Big]$$

anwendet, von dessen Richtigkeit man sich sogleich dadurch überzeugen kann, dass man die Cosinus rechts in imaginäre Exponenzialgrössen auflöst. Das Resultat nimmt dann die Form

$$\left.\begin{array}{l}\mu_0+\mu_1 k\cos x+\mu_2 k^2\cos^2 x+\mu_3 k^3\cos^3 x+\ldots\ldots\ldots\\ =A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\ldots\end{array}\right\}\quad(12)$$

an und dabei ist

$$A_0=1+2_1\,\mu_2\left(\frac{k}{2}\right)^2+4_2\,\mu_4\left(\frac{k}{2}\right)^4+6_3\,\mu_6\left(\frac{k}{2}\right)^6+\ldots\quad(13)$$

$$\frac{1}{2}A_1=1_0\,\mu_1\left(\frac{k}{2}\right)+3_1\,\mu_3\left(\frac{k}{2}\right)^3+5_2\,\mu_5\left(\frac{k}{2}\right)^5+7_3\,\mu_7\left(\frac{k}{2}\right)^7+\ldots\quad(14)$$

Ebenso leicht kann man auch die Werthe der übrigen Coeffizienten hinschreiben, gelangt aber zu bequemeren Formeln für dieselben, wenn man sie rekurrirend bestimmt. Diess geschieht dadurch, dass man von der Gleichung

$$(1+k\cos x)^{\mu}=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots$$

die Logarithmen nimmt und sie dann differenzirt; diess giebt

$$\frac{\mu k\sin x}{1+k\cos x}=\frac{A_1+2A_2\sin 2x+3A_3\sin 3x+\ldots}{A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\ldots}.$$

Schafft man die Nenner weg und zerlegt die entstehenden Produkte aus Sinus und Cosinus nach den Formeln

$$\cos px \sin x = \tfrac{1}{2}\sin(p+1)x - \tfrac{1}{2}\sin(p-1)x$$
$$\sin px \cos x = \tfrac{1}{2}\sin(p+1)x + \tfrac{1}{2}\sin(p-1)x$$

so erhält man eine Gleichung zwischen zwei nach den Sinus von $x, 2x, 3x$, etc. fortgehenden Reihen, und wenn man in dieser die Coeffizienten derselben Sinus identifizirt, so entsteht die folgende Reihe von Gleichungen

$$2\mu k A_0 - 2A_1 - (\mu+2)kA_2 = 0$$
$$(\mu-1)kA_1 - 4A_2 - (\mu+3)kA_3 = 0$$
$$(\mu-2)kA_2 - 6A_3 - (\mu+4)kA_4 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

überhaupt für $n > 0$,

$$(\mu-n)kA_n - (2n+2)A_{n+1} - (\mu+n+2)kA_{n+2} = 0$$

und hieraus findet man successiv

$$A_2 = \frac{2\mu k A_0 - 2A_1}{(\mu+2)k}$$

$$A_3 = \frac{(\mu-1)kA_1 - 4A_2}{(\mu+3)k}$$

$$A_4 = \frac{(\mu-2)kA_2 - 6A_3}{(\mu+4)k}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{n+2} = \frac{(\mu-n)kA_n - (2n+2)A_{n+1}}{(\mu+n+2)k}, \; n < 0$$

und da A_0 und A_1 durch die Formeln (13) und (14) bekannt sind, so lassen sich jetzt sämmtliche Coeffizienten berechnen.

Durch Substitution der Gleichung (12) in (11) und Integration der einzelnen Glieder wird nun für $k < 1$,

$$\int (1+k\cos x)^\mu dx \qquad (15)$$
$$= A_0 x + \tfrac{1}{1}A_1 \sin x + \tfrac{1}{2}A_2 \sin 2x + \tfrac{1}{3}A_3 \sin 3x + \ldots + C,$$

und hiernach ist die numerische Berechnung stets möglich.

§ 19.

Integration von $x^\mu \sin x\, dx$ und $x^\mu \cos x\, dx$.

Wendet man die allgemeine Reduktionsformel

$$\int \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = \varphi(x) \int \psi(x)\, dx - \int \varphi'(x)\, dx \int \psi(x)\, dx \qquad (1)$$

auf die in der Ueberschrift aufgeführten Integrale an, so erhält man zuerst für $\varphi(x) = x^\mu, \psi(x) = \sin x$

$$\int x^\mu \sin x dx = -x^\mu \cos x + \mu \int x^{\mu-1} \cos x dx$$

ferner, indem man die Formel wieder für das zweite Integral rechts benutzt,

$$\int x^{\mu-1} \cos x dx = x^{\mu-1} \sin x - (\mu - 1) \int x^{\mu-2} \sin x dx$$

$$\int x^{\mu-2} \sin x dx = -x^{\mu-2} \cos x + (\mu-2) \int x^{\mu-3} \cos x dx$$

u. s. w.

Fährt man so mit der Verringerung von μ fort, so reduzirt sich, wenn μ eine ganze positive Zahl ist, das Integral zuletzt auf eines der beiden $\int \sin x dx = -\cos x$ oder $\int \cos x dx = \sin x$. Bezeichnen wir überhaupt zur Abkürzung wie folgt

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-\overline{r-1}) = M_r \qquad (2)$$

so ist für ein ganzes positives m

$$\int x^m \sin x dx = -\cos x \left[x^m - M_2 x^{m-2} + M_4 x^{m-4} - M_6 x^{m-6} + \dots \right] \qquad (3)$$
$$+ \sin x \left[M_1 x^{m-1} - M_3 x^{m-3} + M_5 x^{m-5} - \dots \right]$$

worin beide Reihen so weit fortgesetzt werden, bis sie von selbst abbrechen.

Auf ganz gleiche Weise kann man das zweite der in der Ueberschrift genannten Integrale entwickeln und zwar erhält man für ein ganzes positives m

$$\int \cos {}^m x dx = \sin x \left[x^m - M_2 x^{m-2} + M_4 x^{m-4} - M_6 x^{m-6} + \dots \right]$$
$$+ \cos x \left[M_1 x^{m-1} - M_3 x^{m-3} + M_5 x^{m-5} - \dots \right] \qquad (4)$$

Wäre dagegen μ eine negative ganze Zahl $=-n$, so würde man mit der so eben entwickelten Reduktion nicht zum Ziele kommen; man muss in diesem Falle in Nro. (1) $\varphi(x)=\sin x, \psi(x)=x^\mu=x^{-n}$ setzen und erhält dann

$$\int\frac{\sin x}{x^n}dx=-\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{\cos x}{x^{n-1}}dx$$

$$\int\frac{\cos x}{x^{n-1}}dx=-\frac{\cos x}{(n-2)x^{n-2}}-\frac{1}{n-2}\int\frac{\sin x}{x^{n-2}}dx$$

u. s. w.

und indem man so mit der Verringerung von n fortfährt, reduzirt man das gesuchte Integral auf eines der beiden

$$\int\frac{\sin x}{x}dx \text{ und } \int\frac{\cos x}{x}dx$$

die sich nicht anders als durch unendliche Reihen darstellen lassen. Dasselbe gilt von dem Integrale

$$\int\frac{\cos x}{x^n}dx$$

auf welches genau dieselbe Reduktionsmethode anwendbar ist. Man kann übrigens zu den hier entwickelten Formeln auch noch auf anderem Wege gelangen, dadurch nämlich, dass man in den beiden Formeln

$$\int x^m e^{kx}dx$$

$$=e^{kx}\left[\frac{x^m}{k}-\frac{mx^{m-1}}{k^2}+\frac{m(m-1)x^{m-2}}{k^3}-\ldots+\frac{(-1)^m m(m-1)\ldots 2.1}{k^{m+1}}\right]$$

und

$$\int\frac{dx}{x^n}e^{kx}$$

$$=-e^{kx}\left[\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{k}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}+\ldots+\frac{k^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1.x}\right]$$

$$+\frac{k^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}\int\frac{dx}{x}e^{kx}$$

k imaginär etwa $k=b\sqrt{-1}=bi$ setzt, dabei berücksichtigt, dass

$$e^{bxi}=\cos bx+i\sin bx,$$

$$i=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=+1, i^5=+i, \text{etc.}$$

st und endlich beiderseits diejenigen Partieen vergleicht, welche von i frei sind und ebenso die, welche es als gemeinschaftlichen Faktor enthalten.

Hinsichtlich der drei Integrale

$$\int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx$$

stehe hier noch folgende Bemerkung. Substituirt man für e^x, $\cos x$, $\sin x$ die gleichgeltenden Reihen, so ist

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \tfrac{1}{2}\,l(x^2) + \tfrac{1}{1}\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \dots + C \tag{5}$$

$$\int \frac{\cos x}{x}dx = \tfrac{1}{2}\,l(x^2) - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots + C \tag{6}$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = \tfrac{1}{1}\frac{x}{1} - \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots + C \tag{7}$$

Zerlegt man in den ersten zwei Integralen die willkührliche Constante C in $0,5772156\dots + C_1$ und berücksichtigt die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} li(e^x) = 0,5772156\dots &+ \tfrac{1}{2}\,l(x^2) \\ &+ \tfrac{1}{1}\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \dots \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

so folgt

$$\int \frac{e^x}{x}dx = li(e^x) + C_1 \tag{9}$$

$$\int \frac{\cos x}{x}dx = 0,5772156\dots + \tfrac{1}{2}\,l(x^2) - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{1..4} - \dots + C_1 \tag{10}$$

Führen wir nun eine neue Funktion $Ei(x)$ ein, deren Definition durch die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} Ei(x) = 0,5772156\dots &+ \tfrac{1}{4}\,l(x^4) \\ &+ \tfrac{1}{1}\frac{x}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \dots \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

gegeben ist, so erhellt auf der Stelle, dass für alle reellen x die Funktionen $Ei(x)$ und $li(e^x)$ zusammenfallen, weil dann immer $\frac{1}{4}l(x^4) = \frac{1}{2}l(x^2)$ ist. Für imaginäre x dagegen ist $\frac{1}{4}\,l(x^4)$ reell und $\frac{1}{2}\,l(x^2)$ imaginär, mithin sind auf dieser Seite $Ei(x)$ und $li(e^x)$ verschieden.

Bezeichnen wir nun weiter wie folgt*)

$$\left.\begin{aligned} Ci(x) = 0{,}5772156 + \tfrac{1}{4}\, l(x^4) \\ - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{1.2.3.4} - \tfrac{1}{6}\frac{x^6}{1.2..6} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$Si(x) = \tfrac{1}{1}\frac{x}{1} - \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \quad (13)$$

so folgt augenblicklich

$$Ei(x\sqrt{-1}) = Ci(x) + \sqrt{-1}\; Si(x) \quad (14)$$

und zugleich haben wir aus (9) und (10) die Gleichungen

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx = Ei(x) + C \quad (15)$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx = Ci(x) + C \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = Si(x) + C \quad (17)$$

wobei wieder C für C_1 geschrieben worden ist.

Wenn μ weder eine positive noch negative ganze Zahl ist, so bleibt zur Entwickelung der Integrale

$$\int x^\mu \sin x\, dx \text{ und } \int x^\mu \cos x\, dx$$

kein anderes Mittel als ihre Verwandlung in unendliche Reihen übrig, indem man für $\sin x$ und $\cos x$ die gleichgeltenden nach Potenzen von x fortschreitenden Reihen setzt. Es ergiebt sich so

$$\int x^\mu \sin x\, dx = x^{\mu+1}\left[\frac{x}{1.(\mu+2)} - \frac{x^3}{1.2.3(\mu+4)} + \ldots\right] + C,$$

$$\int x^\mu \cos x\, dx = x^{\mu+1}\left[\frac{1}{\mu+1} - \frac{x^2}{1.2(\mu+3)} + \frac{x^4}{1..4(\mu+5)} - \ldots\right] + C,$$

und da diese Reihen jederzeit convergiren, so bieten sie ein sicheres Mittel zur numerischen Berechnung der fraglichen Integrale dar.

---

*) In Worten könnte man etwa die drei Funktionen $Ei(x)$, $Ci(x)$, $Si(x)$ mit Integralexponentielle, Integralcosinus und Integralsinus bezeichnen.

§ 20.

Integration einiger Ausdrücke, welche Exponenzial- und goniometrische Funktionen zugleich enthalten.

Von besonderem Interesse ist noch die Entwickelung der beiden Integrale

$$\int e^{ax}\cos^n bx dx \text{ und } \int e^{ax}\sin^n bx dx \tag{1}$$

worin a und b beliebige Constanten bezeichnen, n dagegen als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird.

Durch theilweise Integration ergiebt sich nämlich zuvörderst, wenn das erste der obigen Integrale kurz mit P bezeichnet wird

$$\begin{aligned} P &= \cos^n bx \int e^{ax}dx - \int d\cos^n bx \int e^{ax}dx \\ &= \cos^n bx \frac{1}{a}e^{ax} + \frac{nb}{a}\int e^{ax}\cos^{n-1}bx \sin bx dx \end{aligned} \tag{2}$$

und wenn wir zur Abkürzung das Integral rechts P_1 nennen

$$aP = e^{ax}\cos^n bx + nbP_1 \tag{3}$$

Das Integral P_1 giebt bei fernerer theilweiser Integration

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos^{n-1}bx \sin bx \int e^{ax}dx - \int d[\cos^{n-1}bx \sin bx] \int e^{ax}dx \\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos^{n-1}bx \sin bx \\ &\quad - \frac{b}{a}\int e^{ax}[\cos^n bx - (n-1)\cos^{n-2}bx \sin^2 bx]dx \end{aligned}$$

oder wenn man $1-\cos^2 bx$ für $\sin^2 bx$ schreibt und die einzelnen Bestandtheile der rechten Seite integrirt

$$\begin{aligned} aP_1 &= e^{ax}\cos^{n-1}bx \sin bx \\ &\quad - nb\int e^{ax}\cos^n bx dx + (n-1)b\int e^{ax}\cos^{n-2}bx dx. \end{aligned}$$

Substituiren wir diess in die Gleichung (3), nachdem dieselbe mit a multiplizirt worden ist, und berücksichtigen dabei die Gleichung

$$\int e^{ax}\cos^n bx dx = P$$

so ergiebt sich

$$a^2 P = ae^{ax}\cos^n bx + nbe^{ax}\cos^{n-1}bx\sin bx$$
$$-n^2b^2P + n(n-1)b^2\int e^{ax}\cos^{n-2}bx dx$$

oder wenn man P als unbekannt ansieht

$$\left.\begin{aligned}\int e^{ax}\cos^n bx dx = \frac{a\cos bx + nb\sin bx}{a^2+n^2b^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx \\ + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx dx\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so bringt man durch mehrmalige Anwendung dieser Reduktionsformel das Integral zuletzt auf

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

zurück; für ein ungerades n dagegen führt die Reduktionsformel am Ende auf das Integral

$$\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Dieses letztere findet sich aber selbst wieder aus der Formel (4), denn für $n=1$ giebt letztere

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C \qquad (5)$$

und so ist dann in jedem Falle das ursprünglich aufgestellte Integral P entwickelbar.

Ein völlig analoger Calcül führt zu einer Reduktionsformel für das zweite in Nro. (1) verzeichnete Integral, welches kurzweg Q heissen möge. Man hat nämlich zuvörderst

$$Q = \sin^n bx\int e^{ax}dx - \int d\sin^n bx\int e^{ax}dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin^n bx - \frac{nb}{a}\int e^{ax}\sin^{n-1}bx\cos bx dx$$

oder

$$aQ = e^{ax} \sin^n bx - nbQ_1 \tag{6}$$

wobei Q_1 zur Abkürzung dient. Ferner ist

$$Q_1 = \sin^{n-1} bx \cos bx \int e^{ax}\,dx - \int d[\sin^{n-1} bx \cos bx] \int e^{ax}\,dx$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin^{n-1} bx \cos bx$$
$$+ \frac{b}{a} \int e^{ax} [\sin^n bx - (n-1) \sin^{n-2} bx \cos^2 bx]\,dx$$

oder wenn $1 - \sin^2 bx$ für $\cos^2 bx$ gesetzt und jedes einzelne Glied rechts integrirt wird

$$aQ_1 = e^{ax} \sin^{n-1} bx \cos bx$$
$$+ nb \int e^{ax} \sin^n bx\,dx - (n-1)\,b \int e^{ax} \sin^{n-2} bx\,dx.$$

Substituirt man diess in die noch mit a multiplizirte Gleichung (6) und berücksichtigt, dass

$$\int e^{ax} \sin^n bx\,dx = Q$$

war, so ergiebt sich

$$a^2 Q = ae^{ax} \sin^n bx - nbe^{ax} \sin^{n-1} bx \cos bx$$
$$- n^2 b^2 Q + n(n-1)\,b^2 \int e^{ax} \sin^{n-2} bx\,dx$$

und hieraus findet man Q oder

$$\left.\begin{aligned}\int e^{ax} \sin^n bx\,dx &= \frac{a \sin bx - nb \cos bx}{a^2 + n^2 b^2}\, e^{ax} \sin^{n-1} bx \\ &+ \frac{n(n-1)\,b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx\,dx\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Je nachdem nun n gerade oder ungerade ist, führt man mittelst dieser Formel das Integral Q auf eines der beiden folgenden

$$\int e^{ax}\,dx \text{ oder} \int e^{ax} \sin bx\,dx$$

zurück, von welchen das erste unmittelbar bekannt ist und das zweite sich aus der Formel (7) selbst durch die Spezialisirung $n = 1$ ableiten lässt. Man bekommt nämlich

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C \tag{8}$$

und kann demnach Q jederzeit vollständig entwickeln.

Es mag noch bemerkt werden, dass sich die Integrale (5) und (6) auch auf einem viel kürzeren Wege entwickeln lassen, welcher mit einiger Verallgemeinerung wieder auf die Integrale P und Q anwendbar ist. Berücksichtigt man nämlich, dass die Differenzialformel

$$de^{kx} = ke^{kx}dx \text{ oder } d\left(\frac{e^{kx}}{k}\right) = e^{kx}dx$$

auch für imaginäre $k = a + b\sqrt{-1} = a + bi$ gültig bleibt, wovon man sich leicht durch Anwendung der Formel

$$e^{kx} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

überzeugen kann, so folgt sogleich nach dem Begriffe des unbestimmten Integrales, dass

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C$$

ist. Nun hat man aber

$$\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{\cos bx + i\sin bx}{a+bi}e^{ax}$$
$$= \frac{(a-bi)(\cos bx + i\sin bx)}{a^2+b^2}e^{ax}$$

und folglich, wenn man die Multiplikation ausführt,

$$\int e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)dx$$
$$= \frac{a\cos bx + b\sin bx + i(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

Denkt man sich noch $C + Ci$ für das willkührliche C geschrieben, so führt die Vergleichung der beiderseitigen reellen und imaginären Partieen unmittelbar auf die Gleichungen (5) und (8). Die allgemeineren Integrale (4) und (7) lassen sich hieraus wieder dadurch ableiten, dass man für $\cos^n bx$ die Reihe

$$n_0\cos nbx + n_1\cos(n-2)bx + n_2\cos(n-4)bx + \ldots$$

substituirt und die Formel (5) auf jedes einzelne Glied anwendet. Man erhält dann in kurzer Bezeichnung

$$\int e^{ax}\cos^n bx dx = e^{ax}\Sigma n_r\frac{a\cos(n-2r)bx + b\sin(n-2r)bx}{a^2+(n-2r)^2b^2},$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Werthe $r = 0, 1, 2, \ldots n$ bezieht.

Auf ähnliche Weise kann man auch das Integral Q entwickeln, aber eben so leicht auch dasselbe auf das vorstehende reduziren. Setzt man nämlich $x=\frac{\pi}{2b}-z$, so wird $\sin bx=\cos bz$ und

$$\int e^{ax}\sin^n bx dx=-e^{\frac{a\pi}{2b}}\int e^{-az}\cos^n bz dz.$$

Hier lässt sich nun das Integral rechts nach dem Vorhergehenden entwickeln, indem man $-a$ und z an die Stelle von a und x setzt. Führt man darauf den Werth $z=\frac{\pi}{2b}-x$ ein und multiplizirt das Erhaltene mit $-e^{\frac{a\pi}{2b}}$, so erhält man die vollständige Entwickelung des Integrales Q, welche nach diesen Bemerkungen durchaus keinen Schwierigkeiten unterliegt.

§ 21.

Integration der Differenzialformeln, welche cyklometrische Funktionen enthalten.

Die Integration aller derjenigen Differenzialformeln, welche unter der allgemeinen Form $F(\text{Arcsin}\,x)\,dx$ oder $F(\text{Arctan}\,x)\,dx$ begriffen sind, lässt sich jederzeit leicht auf solche Integrationen zurückführen, worin statt cyklometrischer goniometrische Funktionen vorkommen. Setzt man nämlich $\text{Arcsin}\,x=z$, so wird $x=\sin z, dx=\cos z\,dz$ und folglich

$$\int F(\text{Arcsin}\,x)\,dx=\int F(z)\cos z\,dz \tag{1}$$

und auf ähnliche Weise ergiebt sich durch die Substitution $\text{Arctan}\,x=z$ die analoge Formel

$$\int F(\text{Arctan}\,x)\,dx=\int F(z)\cot z dz \tag{2}$$

Diesen Formeln kann man noch die beiden folgenden

$$\int F(\text{Arc}\cos x)\,dx=-\int F(z)\sin z dz \tag{3}$$

$$\int F(\text{Arc}\cot x)\,dx=-\int F(z)\tan z dz \tag{4}$$

beigesellen, deren Ableitung nicht minder leicht ist.

So ergiebt sich z. B. nach Formel (1)

$$\int e^{a\,Arcsin\,x}dx = \int e^{az}\cos z dz$$
$$= \frac{a\cos z + \sin z}{a^2+1} e^{az} + C$$

d. i. wenn man $\sin z = x$, $\cos z = \sqrt{1-x^2}$, $z = \text{Arcsin}\,x$ rückwärts substituirt

$$\int e^{a\,Arcsin\,x}\,dx = \frac{x + a\sqrt{1-x^2}}{1+a^2} e^{a\,Arcsin\,x} + C.$$

Ebenso leicht würde es sein, die Integrale

$$\int (\text{Arcsin}\,x)^n dx,$$

und

$$\int (\text{Arc}\cos x)^n dx,$$

worin n als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird, mittelst der Formeln (1) und (3) zu entwickeln.

Bemerkenswerth ist der Fall, in welchem die Funktion $F(\text{Arcsin}\,x)$ unter der Form $f(x)\,\text{Arcsin}\,x$ steht und $f(x)$ so beschaffen ist, dass das Integral $\int f(x)\,dx$ durch algebraische Funktionen dargestellt werden kann. Es glückt nämlich unter diesen Umständen, das Integral

$$\int f(x)\,\text{Arcsin}\,x dx$$

in ein anderes zu verwandeln, welches nur algebraische Funktionen enthält, und diess geschieht mit Hülfe der partiellen Integration:

$$\int f(x)\,\text{Arcsin}\,x dx$$
$$= \text{Arcsin}\,x \int f(x)\,dx - \int d\,\text{Arcsin}\,x \int f(x)\,dx$$

d. i.

$$\int f(x)\,\text{Arcsin}\,x dx = \text{Arcsin}\,x \int f(x)\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x)\,dx \qquad (5)$$

Dasselbe Verfahren ist auch auf das Integral von $f(x)\,\text{Arctan}\,x dx$ anwendbar und giebt

$$\int f(x)\,\text{Arctan}\,x dx$$
$$= \text{Arctan}\,x \int f(x)\,dx - \int d\,\text{Arctan}\,x \int f(x)\,dx$$

oder

$$\int f(x)\,\mathrm{Arctan}\,x dx = \mathrm{Arctan}\,x \int f(x)\,dx - \frac{dx}{1+x^2}\int f(x)\,dx \qquad (6)$$

Auf dieselbe Weise lassen sich auch die Integrale

$$\int f(x)\,\mathrm{Arc\,cos}\,x dx \text{ und } \int f(x)\,\mathrm{Arc\,cot}\,x dx$$

behandeln, wenn man es nicht vorzieht, dieselben dadurch auf die vorhergehenden zurückzuführen, dass man die aus dem Begriffe der cyklometrischen Funktionen sich unmittelbar ergebenden Relationen

$$\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arc\,cos}\,x = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arc\,cot}\,x = \frac{\pi}{2}$$

in Anwendung bringt. Man erhält dann

$$\int f(x)\,\mathrm{Arc\,cos}\,x dx = \frac{\pi}{2}\int f(x)\,dx - \int f(x)\,\mathrm{Arcsin}\,x dx \qquad (7)$$

$$\int f(x)\,\mathrm{Arc\,cot}\,x dx = \frac{\pi}{2}\int f(x)dx - \int f(x)\,\mathrm{Arctan}\,x dx \qquad (8)$$

Um ein paar Beispiele zu haben, setzen wir in den Formeln (5) und (6) $f(x) = x^\mu$; es ergiebt sich dann für ein von -1 verschiedenes μ

$$\int x^\mu\,\mathrm{Arcsin}\,x dx = \frac{x^{\mu+1}\,\mathrm{Arcsin}\,x}{\mu+1} - \frac{1}{\mu+1}\int \frac{x^{\mu+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (9)$$

$$\int x^\mu\,\mathrm{Arctan}\,x dx = \frac{x^{\mu+1}\,\mathrm{Arctan}\,x}{\mu+1} - \frac{1}{\mu+1}\int \frac{x^{\mu+1}dx}{1+x^2} \qquad (10)$$

wo man für ganze μ die noch übrigen Integrationen rechter Hand ausführen kann. Der spezielle Fall $\mu = 0$ giebt

$$\int \mathrm{Arcsin}\,x dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \mathrm{Arctan}\,x dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\,l(1+x^2) + C.$$

Ein etwas complizirteres Beispiel ist das folgende. Man hat zunächst nach Nro. (6)

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} x dx \\ &= -\operatorname{Arctan} x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

und um die Integration rechts auszuführen, setzen wir $x = \sin u$, woraus

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx = \int \frac{\cos^2 u\, du}{1+\sin^2 u} = \int \frac{1-\sin^2 u}{1+\sin^2 u} du$$
$$= \int \left[\frac{2}{1+\sin^2 u} - 1\right] du$$

folgt. Durch Integration der einzelnen Bestandtheile findet man hier

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx = \sqrt{2} \operatorname{Arctan} (\sqrt{2} \tan u) - u + C,$$

wobei man, wegen der Gleichung $\sin u = x$,

$$\tan u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } u = \operatorname{Arcsin} x$$

zu setzen hat, so dass

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx = \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{Arcsin} x + C$$

wird. Durch Substitution dieses Ausdrucks in die Gleichung (11) erhält man nun

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} x dx = -\sqrt{1-x^2} \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arcsin} x \\ + \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

In den Fällen endlich, wo das Integral $\int f(x) dx$ nicht algebraisch ausdrückbar ist, würde nichts Anderes als die Verwandlung von $f(x) \operatorname{Arcsin} x$ oder $f(x) \operatorname{Arctan} x$ in unendliche Reihen übrig bleiben, von denen nachher jedes einzelne Glied integrirt wird. Diese Verwandlung geschieht dadurch, dass man für $\operatorname{Arcsin} x$ und $\operatorname{Arctan} x$ die gleichgeltenden Reihen substituirt, $f(x)$ für sich in eine Reihe entwickelt und diese beiden Reihen mit einander multiplizirt.

Cap. VI. Integration zwischen bestimmten Gränzen.

§ 22.

Fundamentaleigenschaften bestimmter Integrale.

Man könnte für den Augenblick eine spezielle Betrachtung bestimmter Integrale für völlig überflüssig halten, indem man als Grund die in der Einleitung nachgewiesene Eigenschaft geltend machte, wonach jedes bestimmte Integral als Differenz zweier besonderer Werthe eines unbestimmten Integrales angesehen werden kann. Diess wäre aber eine nicht geringe Täuschung. Einerseits nämlich treten schon wegen des Umstandes, dass hier die Variabele der Integration nicht als schlechthin willkührlich angesehen, sondern ihr ein begränzter Spielraum angewiesen wird, ganz besondere Eigenthümlichkeiten an dem bestimmten Integrale hervor, die sich an dem unbestimmten nicht finden; andererseits ist auch jener Satz, wonach man das bestimmte Integral aus dem unbestimmten soll ableiten können, d. h. jene Beziehung zwischen den Resultaten der direkten und indirekten Integration, nicht ohne Ausnahme, sondern nur unter Bedingungen gültig, deren genaue Erörterung früher wegbleiben und für einen der nächsten Paragraphen aufgespart werden musste; und endlich ist die aus dem Begriffe der unbestimmten (indirekten) Integration hergeholte Auffassung des bestimmten Integrales eine nur untergeordnete, die sich nicht zu dem Grade der Allgemeinheit erheben kann, wie ihn die Wissenschaft und namentlich manche physikalische Anwendungen derselben fordern.

Wir gehen nun, wie in der Einleitung, davon aus, dass unter dem Symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

der Gränzwerth verstanden werden soll, welchem sich die Summe

$$\delta[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,\delta)]$$

für unausgesetzt wachsende n, also unendlich abnehmende $\delta=(b-a):n$, nähert, und setzen dabei $f(x)$ als eine während des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ stetige und endliche Funktion voraus.

I. Eine unmittelbare Folge dieser Definition ist, dass wenn $f(x)$ innerhalb des Intervalles a bis b dasselbe Vorzeichen behält, auch dem bestimmten Integrale eben dieses Vorzeichen zukommt. Ferner erhellt unmittelbar, dass wenn $f(\alpha)$ die grösste und $f(\beta)$ die kleinste unter den Funktionen $f(a), f(a+\delta), f(a+2\delta), \ldots f(a+\overline{n-1}\,\delta)=f(b-\delta)$ ist, also $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ das Maximum und Minimum darstellen, welche $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ erlangt, die Beziehung

$$\delta[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,\delta)]$$
$$<\delta[f(\alpha)+f(\alpha)+f(\alpha)+\ldots+f(\alpha)]$$
$$\text{und} >\delta[f(\beta)+f(\beta)+f(\beta)+\ldots+f(\beta)]$$

d. i.

$$<\delta n\, f(\alpha) \text{ und} > \delta n\, f(\beta)$$

statt findet. Erinnert man sich nun, dass $\delta n=b-a$ ist, und geht zur Gränze für unendlich wachsende n über, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)f(\alpha) \text{ und} >(b-a)f(\beta).$$

Diess kann man auch so ausdrücken. Wenn in dem Ausdrucke

$$\int_a f(x)\,dx-(b-a)f(u)$$

die Variable u das Intervall a bis b durchläuft, so geht der ganze Ausdruck vom Negativen zum Positiven über, indem jenes für $u=\alpha$, dieses für $u=\beta$ eintritt. Da wegen der Stetigkeit von $f(x)$ oder $f(u)$ der ganze Ausdruck sich continuirlich ändert, so folgt daraus, dass es zwischen $u=a$ bis $u=b$ einen Werth $u=\gamma$ giebt, für welchen

$$\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f(\gamma)=0$$

wird; setzt man $\gamma=a+\lambda(b-a)$, wo nun λ ein positiver ächter Bruch ist, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(a+\lambda\,\overline{b-a}). \qquad (1)$$

II. Ein ähnlicher und allgemeinerer Satz von häufiger Brauchbarkeit ergiebt sich noch auf folgende Weise. Sei $f(x)$ ein Produkt aus zwei anderen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ deren zweite während des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ positiv bleibt, und mögen ferner M und N das Maximum und Minimum bezeichnen, welche $\varphi(x)$ während desselben Intervalles erlangt, so ist

$$M-\varphi(x) \text{ positiv}, \; N-\varphi(x) \text{ negativ},$$

und da $\psi(x)$ positiv bleibt,

$$[M-\varphi(x)]\,\psi(x) \text{ pos.}, \; [N-\varphi(x)]\,\psi(x) \text{ neg.}$$

natürlich immer nur innerhalb des Intervalles a bis b. Es olgt nun weiter, dass

$$\int_a^b [M-\varphi(x)]\,\psi(x)\,dx \text{ positiv}$$

$$\int_a^b [N-\varphi(x)]\,\psi(x)\,dx \text{ negativ}$$

ist. Nun geht aber aus der vorhin aufgestellten Definition des bestimmten Integrales unmittelbar hervor, dass die Gleichungen

$$\int_a^b [\Phi(x) \pm \Psi(x)]\,dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx \pm \int_a^b \Psi(x)\,dx,$$

$$\int_a^b K\,\Phi(x)dx = K\int_a^b \Phi(x)\,dx$$

statt finden, in deren letzterer K einen von x unabhängigen Faktor bezeichnet und daher ist nach dem Obigen

$$M\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \text{ positiv}$$

$$N\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \text{ negativ}$$

und daraus ergiebt sich sogleich die Ungleichung:

$$M\int_a^b \psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx > N\int_a \psi(x)\,dx. \qquad (2)$$

III. Man kann die anfangs gegebene Erklärung des bestimmten Integrales auch noch etwas verallgemeinern. Bezeichnet man nämlich mit $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ Grössen, welche sämmtlich bis zur Gränze Null abnehmen, aber so, dass immer $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n = b - a$ bleibt, so ist

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx\\ &= \mathrm{Lim}[\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots\\ &\qquad \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})]\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Um diess zu zeigen, bedarf es blos des Nachweises, dass die Differenz

$$\mathrm{Lim}[\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})]$$
$$- \mathrm{Lim}\,[\delta\{f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)\}],$$

worin $\delta = (b-a):n$ ist, den Werth Null hat, oder es muss, weil die Differenz zweier Gränzwerthe gleich der Lim. der Differenz ist, bewiesen werden, dass sich die Differenz

$$\begin{aligned}&\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots\\ &\qquad \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})\\ &- [\delta f(a) + \delta f(a+\delta) + \delta f(a+2\delta) + \ldots\\ &\qquad \ldots + \delta f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\end{aligned}$$

der Gränze Null nähert. Nennen wir δ' die grösste und δ'' die kleinste unter den Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, so ist, wenn k eine bestimmte positive ganze Zahl zwischen 0 und n bezeichnet,

$$k\delta' > \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_k > k\delta''.$$

Andererseits ist aber auch

$$\delta = \frac{b-a}{n} = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n},$$

und folglich

$$\delta < \delta' \text{ und } > \delta''$$

oder auch

$$k\delta' > k\delta > k\delta''.$$

Da also $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k$ und $k\delta$ zwischen denselben Grössen $k\delta'$ und $k\delta''$ liegen, so können $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k$ und $k\delta$ nicht sehr von einander verschieden sein, und wir sind daher berechtigt,

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_k = k\delta + \varepsilon_k$$

zu setzen, wo ε_k eine weiter nicht bestimmte Differenz bezeichnet, von

der wir aber das wenigstens wissen, dass sie bis zur Gränze Null ab nimmt, wenn diess mit $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$ und ebenso mit δ der Fall ist. Die vorhin betrachtete Differenz zweier n gliedrigen Reihen nimmt jetzt, wenn man Glied für Glied subtrahirt, folgende Form an:

$$\{\delta_1 f(a) - \delta f(a)\} + \{\delta_2 f(a+\delta+\varepsilon_1) - \delta f(a+\delta)\}$$
$$+\{\delta_3 f(a+2\delta+\varepsilon_2) - \delta f(a+2\delta)\} + \ldots$$
$$\ldots + \{\delta_n f(a+\overline{n-1}\delta+\varepsilon_{n-1}) - \delta f(a+\overline{n-1}\delta)\}.$$

Man kann aber überhaupt

$$f(\alpha+\varepsilon_k) = f(\alpha) + \varrho_k$$

setzen, wo ϱ_k eine nicht weiter bestimmte Grösse bezeichnet, die mit ε_k gleichzeitig bis zur Null abnimmt. Wenden wir diess auf jedes Glied der obigen Reihe an, so zerfällt dieselbe in

$$(\delta_1-\delta)f(a) + (\delta_2-\delta)f(a+\delta) + (\delta_3-\delta)f(a+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots + (\delta_n-\delta)f(a+\overline{n-1}\delta)$$
$$+\delta_2\varrho_1 + \delta_3\varrho_2 + \delta_4\varrho_3 + \ldots + \delta_n\varrho_{n-1}.$$

Dass nun die erste Reihe so wohl als die zweite sich der Gränze Null nähert, ist leicht zu sehen. Denn sind M und N das Maximum und Minimum von $f(x)$ während des Intervalles $x=a$ bis $x=b$, so liegt die Summe der ersten Reihe zwischen

$$(\delta_1-\delta)M + (\delta_2-\delta)M + \ldots + (\delta_n-\delta)M$$
$$= (\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n - n\delta)M$$

und

$$(\delta_1-\delta)N + (\delta_2-\delta)N + \ldots + (\delta_n-\delta)N$$
$$= (\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n - n\delta)N$$

beide Produkte aber sin $d=o$, weil $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n = n\delta = b-a$ und wegen der voraus gesetzten Endlichkeit von $f(x)$ auch M und N endliche Grössen sind. Nennen wir ferner ϱ' und ϱ'' die grösste und kleinste der Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$, so ist die Summe der Reihe $\delta_2\varrho_1 + \delta_3\varrho_2 + \ldots$ $\ldots + \delta_n\varrho_{n-1}$ zwischen den Grössen

$$(\delta_2+\delta_3+\delta_4+\ldots+\delta_n)\varrho' = (b-a-\delta_1)\varrho'$$

und

$$(\delta_2+\delta_3+\delta_4+\ldots+\delta_n)\varrho'' = (b-a-\delta_1)\varrho''$$

enthalten. Wenn aber $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ und δ bis zur Gränze Null abnehmen, so convergirt auch ε_k gegen die Null, und wegen der Abnahme von ε_k nähert sich auch ϱ_k d. h. wegen des beliebigen k, jede der Grössen

$\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ der Null. Daraus folgt, dass diese Eigenschaft auch der grössten und kleinsten dieser Grössen, d. h. ϱ' und ϱ'', zukomme und mithin

$$\mathrm{Lim}[(b-a-\delta_1)\varrho'] = \mathrm{Lim}[(b-a-\delta_1)\varrho''] = 0$$

sei. Da nun $\delta_2\varrho_1 + \delta_3\varrho_2 + \ldots + \delta_n\varrho_{n-1}$ zwischen diesen Gränzen liegen muss, so ergiebt sich hieraus auf der Stelle die Richtigkeit der vorhin aufgestellten Behauptung und ebenso der Gleichung (3).

IV. Hieran reiht sich unmittelbar ein sehr wichtiger Satz, den man sehr häufig anzuwenden Gelegenheit hat. Bezeichnen wir nämlich mit $\delta', \delta'', \delta''', \ldots \delta^{(n)}$ unendlich abnehmende Grössen, deren Summe constant $= c - b$ bleibt, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$
$$= \mathrm{Lim}[\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \ldots + \delta_n f(a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})]$$
$$+ \mathrm{Lim}[\delta' f(b) + \delta'' f(b+\delta') + \ldots + \delta^{(n)} f(b+\delta'+\ldots+\delta^{(n-1)})]$$

Da nun aber nichts auf die Bezeichnung ankommt, so kann man auch für

$$\delta', \delta'', \delta''', \ldots \delta^{(n-1)}, \delta^{(n)}$$

schreiben

$$\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \delta_{n+3}, \ldots \delta_{2n-1}, \delta_{2n},$$

und wenn man berücksichtigt, dass $b = a + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$, so ist durch Zusammenziehung beider Linien in eine

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$
$$= \mathrm{Lim}[\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a+\delta_1) + \delta_3 f(a+\delta_1+\delta_2) + \ldots$$
$$\ldots + \delta_{2n} f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{2n-1})].$$

Dabei ist aber $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{2n} = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_1 + \delta' + \delta'' + \ldots + \delta^{(n)}$ $= b - a + c - b = c - a$, und mithin dem Begriffe des bestimmten Integrales gemäss

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$

und diese Gleichung enthält eine Zusammenziehung von zwei bestimmten Integralen in ein einziges, oder auch die Zerfällung eines Integrales in zwei andere mit kleineren Integrationsintervallen, wobei man blos zu

berücksichtigen hat, dass b eine zwischen a und c liegende Grösse ist. Aus der letzteren Ansicht der obigen Gleichung leitet man noch leicht das folgende allgemeinere Theorem ab: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$ beliebige, zwischen a und b liegende Grössen der Art, dass

$$a < \alpha < \beta < \gamma \ldots < \varkappa < b,$$

so gilt die folgende Zerfällung

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,dx \\ = &\int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \ldots + \int_\varkappa^b f(x)\,dx \end{aligned}\right\} (4)$$

§ 23.

Die Differenzialquotienten bestimmter Integrale.

Aus der Definition des bestimmten Integrales geht unmittelbar hervor, dass der Werth eines Ausdrucks wie

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

von weiter nichts abhängt, als den Integrationsgränzen a und b, der Natur von $f(x)$ und den in $f(x)$ etwa noch vorkommenden Constanten (den sogen. Parametern der Funktion). Man kann daher den Werth eines bestimmten Integrales als eine Funktion aller dieser willkührlichen Constanten ansehen und in so fern hätte es auch einen Sinn, ein bestimmtes Integral in Bezug auf eine oder mehrere dieser Constanten zu differenziren. Wir thun diess in folgender Weise.

I. Es sei zunächst a eine Funktion einer arbiträren Constanten r, von welcher wir voraussetzen, dass sie weder in b noch in $f(x)$ vorkomme, wie diess z. B. in dem Integrale

$$\int_{\sqrt{r}}^b x\,dx$$

der Fall sein würde, so ist auch $\int_a^b f(x)\,dx$ eine Funktion von r, und wir setzen desshalb

$$\varphi(r)=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Hieraus folgt nun, wenn sich r um das willkührliche Δr, also a um das (nicht willkührliche, sondern von Δr abhängige) Inkrement Δa ändert,

$$\varphi(r+\Delta r)=\int_{a+\Delta a}^b f(x)\,dx.$$

Durch Subtraktion der vorigen Gleichung ergiebt sich unter der Bemerkung, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{a+\Delta a} f(x)\,dx+\int_{a+\Delta a}^b f(x)\,dx$$

gesetzt werden kann,

$$\varphi(r+\Delta r)-\varphi(r)=-\int_a^{a+\Delta a} f(x)\,dx$$

d. i. nach Nro. (1) des vorigen Paragraphen für $b=a+\Delta a$ und $1>\lambda>0$, nach Division mit Δr

$$\frac{\varphi(r+\Delta r)-\varphi(r)}{\Delta r}=-f(a+\lambda\Delta a)\frac{\Delta a}{\Delta r},$$

Hier liefert nun der Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δr und Δa unmittelbar die Gleichung

$$\frac{d\varphi(r)}{dr}=-f(a)\frac{da}{dr}$$

oder vermöge der Bedeutung von $\varphi(r)$

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{dr}=-f(a)\frac{da}{dr}, \qquad (2)$$

wobei a als allein von r abhängig gedacht wird.

II. Wäre ferner b die einzige Grösse, worin r vorkäme, so würde eine Aenderung des r auch nur eine Aenderung von b zur Folge haben, d. h. aus

$$\varphi(r)=\int_a^b f(x)\,dx$$

würde sich

$$\varphi(r+\Delta r)=\int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx$$

ergeben. Zerlegt man das von a bis $b+\Delta b$ genommene Integral in zwei andere von a bis b und von b bis $b+\Delta b$ sich erstreckende, so wird

$$\varphi(r+\Delta r)-\varphi(r)=\int_b^{b+\Delta b} f(x)\,dx=\Delta b f(b+\lambda\Delta b)$$

$$\frac{\varphi(r+\Delta r)-\varphi(r)}{\Delta r}=f(b+\lambda\Delta b)\frac{\Delta b}{\Delta r}$$

und mithin durch Gränzenübergang

$$\frac{d\varphi(r)}{dr}=f(b)\frac{db}{dr}$$

oder vermöge der ursprünglichen Bedeutung von $\varphi(r)$

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{dr}=f(b)\frac{db}{dr}, \tag{3}$$

wobei b als allein von r abhängig angesehen wird. Man kann übrigens dieses Resultat auf einem kürzeren Wege finden, wenn man von der Bemerkung ausgeht, dass immer

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx,$$

ist, die man leicht aus der Definition des bestimmten Integrales verifiziren kann. Es lässt sich dann auf der rechten Seite die Regel zur Differenziation nach der unteren Integrationsgränze in Anwendung bringen.

III. Es enthalte drittens blos $f(x)$ die willkührliche Constante r, es seien aber a und b frei davon. Schreiben wir, um diess zu bezeichnen, $f(r,x)$ für $f(x)$, so ist jetzt für

$$\varphi(r)=\int_a^b f(r,x)\,dx,$$

$$\varphi(r+\Delta r)=\int^b f(r+\Delta r,x)\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich durch Subtraktion und Division mit Δr, welches man wegen seiner Unabhängigkeit von x unter das Zeichen $\int$ stellen kann,

$$\frac{\varphi(r+\Delta r)-\varphi(r)}{\Delta r}=\int_a^b \frac{f(r+\Delta r,x)-f(r,x)}{\Delta r}dx.$$

Nun ist aber nach einem bekannten Satze

$$F(r+h)=F(r)+hF'(r)+\tfrac{1}{2}h^2F''(r+\lambda h),$$

wobei $1>\lambda>0$ ist. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{F(r+h)-F(r)}{h}=F'(r)+\tfrac{1}{2}hF''(r+\lambda h).$$

und für $F(r)=f(r,x)$ wobei $F'(r)=f'_r(r,x)$, $F''(r)=f''_r(r,x)$ wird

$$\frac{f(r+\Delta r,x)-f(r,x)}{\Delta r}=f'_r(r,x)+\tfrac{1}{2}\Delta r f''_r(r+\lambda\Delta r,x),$$

und mithin

$$\frac{\varphi(r+\Delta r)-\varphi(r)}{\Delta r}$$

$$=\int_a^b f'_r(r,x)\,dx+\tfrac{1}{2}\Delta r\int_a^b f''_r(r+\lambda\Delta r,x)\,dx.$$

Der Gränzenübergang für unendlich abnehmende Δr giebt jetzt

$$\frac{d\varphi(r)}{dr}=\int_a^b f'_r(r,x)\,dx+\tfrac{1}{2}\operatorname{Lim}\left[\Delta r\int_a^b f''_r(r+\lambda\Delta r,x)\,dx\right].$$

Hier würde es voreilig sein, statt der Lim. auf der rechten Seite kurzweg

$$0.\int_a^b f''_r(r,x)\,dx=0$$

setzen zu wollen. Man darf nämlich nicht vergessen, dass wenn auch eine Funktion continuirlich und endlich bleibt innerhalb gewisser Gränzen, daraus nicht die Stetigkeit und Endlichkeit ihrer Differenzialquotienten innerhalb desselben Intervalles folgt; so ist z. B. $(1-z)^{\frac{2}{3}}$ stetig und endlich von $z=0$ bis $z>1$, aber von dem Differenzialquotienten $\frac{2}{3}(1-z)^{-\frac{1}{3}}$ gilt diess schon nicht mehr, denn dieser erleidet für $z=1$ eine Unterbrechung der Continuität. Es kann daher $f''_r(r+\lambda\Delta r,x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ diskontinuirlich und unendlich werden, so dass dann zugleich

$$\int_a^b f''_r(r+\lambda\Delta r, x)\,dx = \infty$$

und folglich

$$\mathrm{Lim}\,[\Delta r \int_a^b f''_r(r+\lambda\Delta r, x)dx] = 0\,.\,\infty\,,$$

d. h. unbestimmt wird. Weiss man aber im Voraus, dass

$$\mathrm{Lim}\,[\,\Delta r \int_a^b f''_r(r+\lambda\Delta r, x)dx] = 0 \qquad (4)$$

ist, so folgt jetzt nach dem früheren

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \int_a^b f'_r(r,x)dx$$

oder der Bedeutung von $\varphi(r)$ gemäss

$$\frac{d\int_a^b f(r,x)\,dx}{dr} = \int_a^b \left[\frac{df(r,x)}{dr}\right]dx\,, \qquad (5)$$

wobei $\left[\frac{df(r,x)}{dr}\right]$ den partiell nach r genommenen Differenzialquotienten von $f(r,x)$ bezeichnet. Die Bedingung (4), welche man übrigens für $\lambda\Delta r = \delta$ auch unter der Form

$$\mathrm{Lim}[\,\delta \int_a^b f''_r(r+\delta, x)\,dx] = 0$$

darstellen kann, ist übrigens immer erfüllt, wenn $f''_r(r,x)$ endlich und stetig bleibt für alle in dem Intervalle $x=a$ bis $x=b$ begriffenen x und ebenso für keines der r, welche man in Anspruch nimmt, unendlich wird. Denn es ist dann

$$\int_a^b f''_r(r+\delta, x)dx = (b-a)\,f''_r[r+\delta, a+\lambda(b-a)],$$

und daraus folgt nach den gemachten Voraussetzungen sogleich die obige Bedingungsgleichung. Man kann daher sagen: bleibt $f''_r(r,x)$ endlich und stetig für alle Paare spezieller Werthe von r und x, die man willkührlich aus den beiden Intervallen $r=\alpha$ bis $r=\beta$ und $x=a$ bis $x=b$ herausgreifen kann, so gilt die Formel (5) für alle r von $r=\alpha$ bis $r=\beta$.

IV. Wir betrachten endlich den allgemeinsten Fall, in welchem nämlich a, b und $f(x)$ gleichzeitig von r abhängig sind, also wieder $f(r, x)$ für $f(x)$ geschrieben wird. Dann ist das bestimmte Integral

$$u = \int_a^b f(r, x)\, dx$$

eine Funktion dreier von einander abhängiger Variabeln a, b, r und nach einem bekannten Satze der Differenzialrechnung

$$\frac{du}{dr} = \left(\frac{du}{da}\right)\frac{da}{dr} + \left(\frac{du}{db}\right)\frac{db}{r} + \left(\frac{du}{dr}\right),$$

wobei

$$\left(\frac{du}{da}\right), \left(\frac{du}{db}\right), \left(\frac{du}{dr}\right)$$

die drei Differenzialquotienten sind, die man aus u erhält, indem man der Reihe nach a, b und r als die jedesmal einzig vorhandene und zwar unabhängige Variable ansieht. Diese Differenzialquotienten sind in unserem Falle

$$-f(r, a), f(r, b), \int_a^b \left[\frac{df(r, x)}{dx}\right] dx$$

vorausgesetzt, dass $f''_r(r, x)$ denselben Bedingungen wie unter Nro. III. genügt, und so ergiebt sich jetzt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\int_a^b f(r, x)\, dx}{dr} \\ &= -f(r, a)\frac{da}{dr} + f(r, b)\frac{db}{dr} + \int_a^b \left[\frac{df(r, x)}{dr}\right] dx \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 24.

Vergleichung der zwei verschiedenen Ansichten des bestimmten Integrales.

Sehen wir b als unabhängige Variable an und nennen u zur Abkürzung das zwischen den Gränzen a und b genommene Integral von $f(x)dx$, so ist nach no. II des vorigen Paragraphen

$$\frac{du}{db} = f(b). \qquad (1)$$

Kennt man nun eine Funktion $F(x)$, deren Differenzialquotient $f(x)$ ist, so hat man gleichzeitig

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ oder } \frac{dF(b)}{db} = f(b)$$

und wenn wir diess mit no. (1) vergleichen, so folgt, dass entweder geradezu $u = F(b)$ oder höchstens um eine Constante C davon verschieden sein kann. Um nun in der so gewonnenen Gleichung $u = F(b) + C$ d. i.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + C \qquad (2)$$

diese Constante zu bestimmen, brauchen wir blos zu berücksichtigen, dass wenn b in a übergeht, das Integral

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

ist, wie man sogleich aus der Formel (1) in § 22 erkennt; man hat daher aus no. (2) für $b = a$

$$0 = F(a) + C$$

und mithin $C = -F(a)$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Nun war aber $F(x)$ der Voraussetzung nach diejenige Funktion von x, deren Differenzialquotient mit $f(x)$ zusammenfällt, und mithin ist $(F)x$ das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ oder

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \qquad (4)$$

und wir erhalten daher vermöge der Bedeutung des bestimmten Integrales zwischen $F(x)$ und $f(x)$ folgende Relation

$$F(b) - F(a)$$
$$= \text{Lim}\left[\delta\{f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)\}\right]$$

übereinstimmend mit dem schon früher gefundenen Resultate.

Es findet indessen zwischen den zwei verschiedenen Auffassungsweisen des bestimmten Integrales, welche einerseits durch die anfäng-

lich gegebene Definition desselben und andererseits durch die Gleichungen (4) und (3) ausgedrückt werden, doch noch manche Differenz statt, die sich am deutlichsten auseinander setzen lässt, wenn man sich $f(x)$ als Ordinate einer Curve denkt, zu welcher x als Abscisse gehört, so dass $y = f(x)$ die Gleichung der fraglichen Curve wäre. Schon die obengemachte Annahme, dass $dF(x) = f(x)dx$ sein solle, ist eine unbewiesene, d. h. es fehlt der Nachweis, dass es immer eine Funktion $F(x)$ geben müsse, deren Differenzialquotient mit $f(x)$ zusammenfällt und hieraus erhellt, dass in den Fällen, wo man eine solche Funktion nicht auftreiben kann, die Definition: „wenn $F(x) = \int f(x)\,dx + C$ ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),\text{“}$$

gar keinen Sinn hat, während die ursprünglich aufgestellte Erklärung des bestimmten Integrales, welche dasselbe als den Gränzwerth von

$$\delta[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)]$$

ansieht, hier völlig unangefochten stehen bleibt. Nun ist aber gar nicht nöthig, dass $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ nach einem und demselben Gesetze gebildet sei; so könnte z. B., wenn α, β, γ,... beliebige zwischen a und b eingeschaltete Grössen bezeichnen, die Funktion $f(x)$ der Gestalt aus anderen stetigen und endlichen Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ etc. zusammengesetzt sein, dass

$$\begin{array}{llll} \text{von } x = a & \text{bis } x = \alpha, & f(x) = \varphi(x) \\ \text{„} \quad x = \alpha & \text{„} \quad x = \beta, & f(x) = \psi(x) \\ \text{„} \quad x = \beta & \text{„} \quad x = \gamma, & f(x) = \chi(x) \\ & \ldots\ldots & \end{array}$$

wäre und zugleich $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$, $\psi(\beta) = \chi(\beta)$ etc. sein, dann würde ebenfalls $f(x)$ immer endlich bleiben und keine Unterbrechung der Continuität erleiden. Was diess heissen wolle, wird die geometrische Bedeutung von $y = f(x)$ deutlicher machen. Wäre z. B. $a=0$, $\alpha=1$, $\beta = 2$, $b = 3$ und

$$\begin{array}{llll} \text{von } x = 0 & \text{bis } x = 1, & f(x) = x^2, \\ \text{„} \quad x = 1 & \text{„} \quad x = 2, & f(x) = \dfrac{1}{x}, \\ \text{„} \quad x = 2 & \text{„} \quad x = 3, & f(x) = \cos\dfrac{\pi x}{6}; \end{array}$$

so bestände die durch die Gleichung $y = f(x)$ repräsentirte Curve aus aneinandergerückten Bögen verschiedener krummer Linien. Von $x=0$ bis $x=1$ nämlich ist die Curve parabolisch gekrümmt, von $x=1$ bis $x=2$ gleichseitig-hyperbolisch und von $x=2$ bis $x=3$ ist sie mit der sogenannten Cosinuslinie identisch. Da aber

$$\text{für } x = 1 \text{ , } 1^2 = \frac{1}{1}$$

$$\text{und für } x = 2 \text{ , } \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi . 2}{6}$$

ist, so fällt der Endpunkt eines jeden Bogens mit dem Anfangspunkte des nächstfolgenden zusammen und das ganze Bogensystem bildet eine zusammenhängende Curve. Wollte man nun die in no. (3) aufgegestellte Ansicht des bestimmten Integrales hier zur Anwendung bringen, so müsste man vorerst eine Funktion $F(x)$ aufzeigen, deren Differenzialquotient $\varphi(x)$, oder $\psi(x)$, oder $\chi(x)$ etc. wäre, jenachdem x zwischen a und α, oder α und β, oder β und γ u. s. w. fiele. Ja noch mehr; man kann den Begriff der Funktion noch dahin erweitern, dass man sagt: die Gleichung $y = f(x)$ bedeutet nur, dass zu jedem x ein bestimmtes y gehört, gleichviel, wo man dasselbe herbekommen hat. Denkt man sich nun eine ebene Curve durch einen ganz regellosen Zug entstanden, so gehört hier zu jedem x ein y, da man nachträglich die Abscissen und Ordinaten einzeichnen und also die einander entsprechenden x und y construiren kann. Da dieser Zug vollkommen willkührlich ist, so braucht es gar keine analytische Funktionsform zu geben, deren geometrisches Bild mit jener Curve zusammenfiele d. h. mit anderen Worten: es ist wohl eine Curve da, aber man kann ihre Gleichung nicht aufstellen, oder: es gehört zwar zu jedem x ein ganz bestimmtes y aber das Wie dieses Zusammenhanges lässt sich nicht angeben. In diesem Falle hört nun schon $f(x)$ auf eine analytische Bedeutung zu haben, um so mehr ist diess mit $F(x)$ der Fall und mithin wird auch die Definition (3) völlig nichtssagend. Dagegen bleibt die ursprüngliche Erklärung des bestimmten Integrales ungestört, denn nennen wir y_0 , y_1 , y_2, ... y_{n-1} die zu den Werthen 0, δ, 2δ,... $(n-1)\delta$ gehörenden Werthe von y, so ist jetzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Lim}[\delta(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})]$$

und diess hat immer einen bestimmten Sinn, weil y_0 , y_1 , ... y_{n-1}

ganz abgesehen, ob sie sich nach einem Gesetze bilden oder nicht, doch bekannte Grössen sind. Noch anschaulicher wird diess, wenn man sich erinnert, dass zufolge der in der Einleitung zur Differenzialrechnung angestellten Betrachtungen das zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ genommene Integral $\int f(x)dx$ nichts Anderes als die Fläche ist, welche von der Strecke $b-a$ der Abscissenachse, den Ordinaten $f(a)$, $f(b)$ und der durch die Gleichung $y=f(x)$ charakterisirten Curve begränzt wird. Mag nun diese Curve aus einzelnen Bögen anderer krummer Linien zusammengesetzt, oder auch durch einen völlig willkührlichen Zug entstanden sein, so hat sie doch immer eine ganz bestimmte Fläche und ebendiese ist hier die geometrische Bedeutung unsers

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ oder} \int_a^b y\,dx$$

wenn wir, um den Schein einer mathematischen Ausdrückbarkeit des $f(x)$ zu vermeiden, das auf irgend welche Weise entstandene y an die Stelle von $f(x)$ treten lassen*).

Es giebt aber auch noch andere Fälle, für welche $F(b)-F(a)$ von $\int_a^b f(x)\,dx$ d. h. von

$$\text{Lim}\,[\delta\{f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\delta)\}]$$

verschieden ist, und zwar sind es diejenigen, indenen eine der Funktionen $F(x)$ oder $f(x)$ während des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ diskontinuirlich wird. Betrachten wir zunächst den ersten Fall.

I. Wenn $F(x)$ an der Stelle $x=\varkappa$, wobei $b>\varkappa>a$, eine Unterbrechung der Continuität erleidet, so gehören zu $x=\varkappa$ zwei Werthe von $F(x)$, wenn ausserdem jedem anderen x nur ein einziger Werth von $F(x)$ entspricht. Diese beiden Werthe von $F(\varkappa)$ kann man durch $F(\varkappa-0)$ und $F(\varkappa+0)$ bezeichnen und man deutet damit zugleich an, dass $F(\varkappa-0)$ der letzte unter den Werthen von $F(x)$ ist, welche dem Intervalle $x=a$ bis $x=\varkappa$ angehören, und der zweite die neue

*) In der mathematischen Physik ist man sehr häufig zu einer solchen allgemeineren Auffassung von $y=f(x)$ und ebenso des bestimmten Integrales von ydx genöthigt, z. B. wenn $y=f(x)$ die ursprüngliche Gestalt einer schwingenden Saite, oder die zur Zeit Null vorhandene Wärmevertheilung in den durch die Abscissen bestimmten Schichten eines Körpers bezeichnet.

Reihe von Werthen eröffnet, die dem **Intervalle $x = a$ bis $x = b$** entsprechen. Ist nun $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, so folgt umgekehrt

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

d. i.

$$\text{Lim}\,\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = f(x).$$

Diese Gleichung erlaubt, die Beziehung

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = f(x) + \varepsilon$$

aufzustellen, worin ε eine nicht näher bekannte Grösse ist, von welcher wir aber Das wenigstens wissen, dass sie mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnehmen muss. Aus der vorigen Gleichung folgt nun

$$F(x+\delta) - F(x) = \delta f(x) + \delta\varepsilon$$

und wenn man $x = a,\ a+\delta,\ a+2\delta, \ldots a+\overline{n-1}\,\delta$ setzt,

$$\left.\begin{aligned}
F(a+\delta) - F(a) &= \delta f(a) + \delta\varepsilon_1 \\
F(a+2\delta) - F(a+\delta) &= \delta f(a+\delta) + \delta\varepsilon_2 \\
F(a+3\delta) - F(a+2\delta) &= \delta f(a+2\delta) + \delta\varepsilon_3 \\
\cdot \qquad & \qquad \cdot \\
\cdot \qquad & \qquad \cdot \\
\cdot \qquad & \qquad \cdot \\
F(a+\overline{n-1}\,\delta) - F(a+\overline{n-2}\,\delta) &= \delta f(a+\overline{n-1}\,\delta) + \delta\varepsilon_n
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ verschiedene Grössen sind, welche dieselben Eigenschaften wie ε haben. Daraus schliesst man leicht, dass wenn ε' die grösste und ε'' die kleinste derselben bezeichnet,

$$\begin{gathered}
\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3 + \ldots + \delta\varepsilon_n \\
< \delta n\varepsilon' \text{ d. i. } < (b-a)\,\varepsilon' \\
\text{und } > \delta n\varepsilon'' \text{ d. i. } > (b-a)\,\varepsilon'',
\end{gathered}$$

folglich

$$\text{Lim}\,(\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3 + \ldots + \delta\varepsilon_n) = 0$$

ist, so dass wir bei dem nachherigen Gränzenübergange auf die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ keine Rücksicht mehr zu nehmen brauchen. Nun durchläuft aber in den obigen Gleichungen x das Intervall a bis $a+\overline{n-1}\,\delta$ und zwar in Sprüngen, deren jedesmalige Weite durch δ gemessen wird. Setzen wir $a + n\delta = b$ also $a+\overline{n-1}\,\delta = b - \delta$ und lassen n unendlich wachsen

und folglich δ unausgesetzt abnehmen, so nähert sich die Reihe von Sprüngen, mittelst deren x von a auf $b-\delta$ zunimmt, mehr und mehr einem stetigen Uebergange von a nach b, und folglich kommt unter den Werthen von x auch der zwischen a und b liegende Werth $\varkappa$ vor, und mithin finden sich unter den Gleichungen (5) auch zwei auf einander folgende von der Form

$$\left.\begin{aligned} F(\varkappa)-F(\varkappa-\delta) &= f(\varkappa-\delta)+\varepsilon_k \\ F(\varkappa+\delta)-F(\varkappa) &= f(\varkappa)+\varepsilon_{k+1} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wie man sogleich übersieht, wenn man $\varkappa = k\delta$ setzt. Wollte man nun die Gleichungen (5) schlechthin addiren, so würde links $F(a+\overline{n-1}\delta)-F(a)$ oder für unendlich abnehmende δ, $F(b)-F(a)$ herauskommen, und dabei setzt man stillschweigend voraus, dass sich $F(a+\delta)$ gegen $-F(a+\delta)$, $F(a+2\delta)$ gegen $-F(a+2\delta)$ etc., also überhaupt $F(x)$ gegen $-F(x)$ hebe. Das ist aber nur richtig, sobald $F(x)$ einen einzigen Werth, falsch dagegen, wenn es für irgend einen speziellen Fall zwei verschiedene Werthe hat, oder, was auch dasselbe ist, an einer bestimmten Stelle $x=\varkappa$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet. Denn da in diesem Falle $F(\varkappa-0)$ und $F(\varkappa+0)$ von einander verschieden sind, so wird jetzt $F(\varkappa)-F(\varkappa)=F(\varkappa-0)-F(\varkappa+0)$ nicht mehr Null. Berücksichtigen wir nun, dass unter den Gleichungen (5) die beiden unter (6) verzeichneten d. h.

$$\begin{aligned} F(\varkappa-0)-F(\varkappa-\delta) &= f(\varkappa-\delta)+\varepsilon_k, \\ F(\varkappa+\delta)-F(\varkappa+0) &= f(\varkappa)+\varepsilon_{k+1} \end{aligned}$$

vorkommen, so giebt jetzt die Addition

$$\begin{aligned} &F(a+\overline{n-1}\delta)-F(\varkappa+0)+F(\varkappa-0)-F(a) \\ &=\delta[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\delta)] \\ &\quad+\delta\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2+\delta\varepsilon_3+\ldots+\delta\varepsilon_n \end{aligned}$$

d. i. durch Uebergang zur Gränze

$$\begin{aligned} &F(b)-F(a)+F(\varkappa-0)-F(\varkappa+0) \\ &=\mathrm{Lim}[\delta\{f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\delta)\}], \end{aligned}$$

d. h. mit anderen Worten, es ist jetzt

$$\int_a^b f(x)dx \text{ nicht } = F(b)-F(a)$$

$$\text{sondern } = F(b)-F(a)+\mathrm{Lim}[F(\varkappa-\varepsilon)-F(\varkappa+\varepsilon)],$$

wobei sich das Zeichen Lim auf ein bis zur Null abnehmendes ε be-

zieht. Hieraus folgt sogleich noch das allgemeinere Theorem: Erleidet die Funktion $F(x)=\int f(x)\,dx$ an den zwischen a und b liegenden Stellen $x=\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$ eine Unterbrechung der Continuität, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ nicht } = F(b)-F(a),$$

sondern

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)+\mathrm{Lim}\,[F(\alpha-\varepsilon)-F(\alpha+\varepsilon)]\\ +\mathrm{Lim}\,[F(\beta-\varepsilon)-F(\beta+\varepsilon)]+\ldots+\mathrm{Lim}\,[F(\varkappa-\varepsilon)-F(\varkappa+\varepsilon)]\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hierzu wird das folgende Beispiel nicht überflüssig sein. Es ist

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{1-x} + C. \quad (8)$$

Nimmt man hier $x=1+c$, wo c eine positive Grösse ist, dann $x=0$ und subtrahirt, so kommt

$$\int_0^{1+c} \frac{dx}{x^2-2x+2} = -\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{c} - \frac{\pi}{4},$$

oder, weil $\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{c} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,c$ ist,

$$\int_0^{1+c} \frac{dx}{x^2-2x+2} = -\left(\frac{3\pi}{4} - \mathrm{Arctan}\,c\right) \quad (9)$$

Die Unrichtigkeit dieses Resultates ist aber leicht zu sehen, denn da $\mathrm{Arctan}\,c < \frac{\pi}{2}$ oder höchstens $=\frac{\pi}{2}$ ist, so fällt $\frac{3\pi}{4} - \mathrm{Arctan}\,c$ immer negativ aus, wie auch die vorhergehende Form zeigt, und folglich wäre der Werth des Integrales negativ. Nun hat man aber für jedes reelle x, $x^2+1 \geqq 2x$, folglich ganz sicher $x^2+2>2x$ oder $x^2-2x+2>0$ d. h. positiv; es müsste also das Integral einer stets positiv und endlich bleibenden Funktion eine negative Grösse sein. Aus der Gleichung (9) lässt sich aber sogleich das richtige Resultat ableiten, wenn man bemerkt, dass die Funktion

$$F(x) = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{1-x},$$

welche als unbestimmtes Integral genommen wurde, an der innerhalb

des Integrationsintervalles 1 bis $1+c$ liegenden Stelle $x=1$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, indem nämlich $F(1-0)$ $=\text{Lim Arctan}\frac{1}{1-(1-\varepsilon)}=\text{Arctan}\,\infty=+\frac{\pi}{2}$, dagegen $F(1+0)=\text{Lim}$ $\text{Arctan}\frac{1}{1-(1+\varepsilon)}=\text{Arctan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$ ist. Die rechte Seite von (9) bedarf daher noch der Correktion $\text{Lim}\,[F(1-\varepsilon)-F(1+\varepsilon)]$ d. i.

$$\text{Lim}\left[\text{Arctan}\frac{1}{\varepsilon}-\text{Arctan}\frac{1}{-\varepsilon}\right]=2\,\text{Lim Arctan}\frac{1}{\varepsilon}$$
$$=2\,\text{Arctan}\,\infty=\pi,$$

und jetzt ergiebt sich aus Nro. (9)

$$\int_0^{1+c}\frac{dx}{x^2-2x+2}=\frac{\pi}{4}+\text{Arctan}\,C.$$

Die Richtigkeit dieses Resultates ergiebt sich auch dadurch, dass man statt der Form (8) die folgende braucht:

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+2}=\text{Arctan}(x-1)+C,$$

woraus man den Werth $\text{Arctan}\,c-\text{Arctan}(-1)$ findet, der mit dem vorigen zusammenfällt*).

Ein zweites Beispiel ist das folgende. Man hat

$$\int\frac{dx}{1-2x\cos\vartheta+x^2}=\frac{1}{\sin\vartheta}\text{Arctan}\frac{x\sin\vartheta}{1-x\cos\vartheta}+C,$$

und mithin für $x=b$ und $x=-b$

(10)
$$\int_{-b}^{b}\frac{dx}{1-2x\cos\vartheta+x^2}=\frac{1}{\sin\vartheta}\left[\text{Arctan}\frac{b\sin\vartheta}{1-b\cos\vartheta}+\text{Arctan}\frac{b\sin\vartheta}{1+b\cos\vartheta}\right].$$

*) Man sieht hieraus, dass die gewöhnliche Definition des bestimmten Integrales, welche dasselbe als die Differenz $F(b)-F(a)$ bezeichnet, eine höchst unsichere ist, da sie ganz verschiedene Werthe giebt, jenachdem man für $F(x)=\int f(x)\,dx$ diese oder jene Form benutzt. Diese Unsicherheit rührt daher, dass man die beiden extremen Werthe $F(a)$ und $F(b)$ durch einen Akt willkührlichen Setzens zum Vorschein bringt, oder zwei isolirte Stellen von $F(x)$ aus dem Verlaufe der Funktion herausgreift, unbekümmert um den Verlauf selbst zwischen diesen Stellen, während wir dagegen in den Gleichungen (5) statt eines Sprunges von $F(a)$ auf $F(b)$ einen stetigen Uebergang ver-

Dieses Resultat ist aber nur so lange richtig, als

$$F(x)=\frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{Arctan}\frac{x\sin\vartheta}{1-x\cos\vartheta}$$

continuirlich bleibt; wird nun $1-x\cos\vartheta=0$, also $x=\sec\vartheta$, so tritt eine Discontinuität in $F(x)$ ein, denn für $\varkappa=\sec\vartheta$ ist

$$\begin{aligned}F(\varkappa-0)&=\operatorname{Lim}\frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{Arctan}\frac{(\sec\vartheta-\varepsilon)\sin\vartheta}{1-(\sec\vartheta-\varepsilon)\cos\vartheta}\\&=\frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{Lim}\operatorname{Arctan}\frac{\tan\vartheta-\varepsilon\sin\vartheta}{\varepsilon\cos\vartheta}=\frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{Arctan}(+\infty)\\&=\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

und ebenso für negative

$$\begin{aligned}F(\varkappa+0)&=\frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{Lim}\operatorname{Arctan}\frac{\tan\vartheta+\varepsilon\sin\vartheta}{-\varepsilon\cos\vartheta}=\frac{1}{\sin\vartheta}\operatorname{Arctan}(-\infty)\\&=-\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Für $b<\sec\vartheta$ kommt in dem Intervalle $x=-b$ bis $x=+b$ der Werth $x=\sec\vartheta$ nicht vor, folglich wird dann $F(x)$ nicht diskontinuirlich und die Gleichung (10) gilt daher nur unter der Bedingung $b<\sec\vartheta$. Für $b>\sec\vartheta$ dagegen erleidet $F(x)$ innerhalb des Intervalles $-b$ bis $+b$ eine Unterbrechung der Continuität und folglich bedarf es dann noch der Addition von

$$\begin{aligned}\operatorname{Lim}[F(\varkappa-\varepsilon)-F(\varkappa+\varepsilon)]&=F(\varkappa-0)-F(\varkappa+0)\\&=\frac{\pi}{\sin\vartheta},\end{aligned}$$

so dass es also für $b>\sec\vartheta$ heissen muss:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-b}^{b}\frac{dx}{1-2x\cos\vartheta+x^2}\\&=\frac{1}{\sin\vartheta}\left[\pi-\operatorname{Arctan}\frac{b\sin\vartheta}{b\cos\vartheta-1}+\operatorname{Arctan}\frac{b\sin\vartheta}{b\cos\vartheta+1}\right]\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

mittelt haben. Beides kommt nun bei einer continuirlichen Funktion auf Dasselbe hinaus, weil man hier auf ununterbrochenem Pfade dem Sprunge nachlaufen kann, bei einer diskontinuirlichen Funktion dagegen giebt es gar keinen Uebergang von $F(a)$ nach $F(b)$, beide sind nicht Stellen eines und desselben Weges, sondern völlig getrennter Pfade. Beachtet man diess nicht, so verwickelt man sich leicht in die gröbsten Widersprüche.

Lässt man b ins Unendliche zunehmen, so ist die genannte Bedingung immer erfüllt, und man hat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-2x\cos\vartheta+x^2} = \frac{\pi}{\sin\vartheta} \tag{12}$$

Auch hier lässt sich leicht eine Controle anstellen, sobald man für $F(x)$ eine Form braucht, welche keiner Diskontinuität unterworfen ist, nämlich die folgende:

$$\int \frac{dx}{1-2x\cos\vartheta+x^2} = \frac{1}{\sin\vartheta} \operatorname{Arctan} \frac{x-\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + C.$$

Man erhält dann auf alle Fälle

$$\int_{-b}^{b} \frac{dx}{1-2x\cos\vartheta+x^2} = \frac{1}{\sin\vartheta}\left[\operatorname{Arctan}\frac{b-\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \operatorname{Arctan}\frac{b+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right]$$

und die Uebereinstimmung dieser Formel mit denen in (10) und (11) lässt sich jetzt leicht dadurch nachweisen, dass man in jeder der drei Gleichungen die beiden darin vorkommenden Bögen mittelst der Formeln

$$\operatorname{Arctan}\alpha - \operatorname{Arctan}\beta = \operatorname{Arctan}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta},$$

$$\operatorname{Arctan}\alpha + \operatorname{Arctan}\beta = \operatorname{Arctan}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}, \text{ für } \alpha\beta < 1$$

$$= \pi - \operatorname{Arctan}\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta-1}, \text{ für } \alpha\beta > 1$$

in einen einzigen Bogen zusammenzieht. Man findet so:

$$\int_{-b}^{b} \frac{dx}{1-2x\cos\vartheta+x^2}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta} \operatorname{Arctan}\frac{2b\sin\vartheta}{1-b^2}, \qquad \text{, für } b<1$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\left[\pi - \operatorname{Arctan}\frac{2b\sin\vartheta}{b^2-1}\right], \quad \text{,, } b>1$$

Ein drittes nicht weniger bemerkenswerthes Beispiel liefert das Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Man erhält nämlich zuerst durch unbestimmte Integration

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$$

und daraus scheint zu folgen

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos \pi} - \frac{1}{\cos 0} = -2,$$

was aber offenbar unrichtig ist, weil die Funktion $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ von $x=0$ bis $x=\pi$ positiv bleibt und mithin auch ein positives Integral haben muss. Da nun $\frac{1}{\cos x}$ an der Stelle $x=\frac{\pi}{2}$ unstetig wird, indem hier die Funktion aus $+\infty$ nach $-\infty$ überspringt, so bedarf es noch der Addition von

$$\text{Lim}\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}\right] = \text{Lim}\,\frac{2}{\sin\varepsilon} = \infty,$$

und mithin ist

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \infty.$$

Von der Richtigkeit dieses Resultates überzeugt man sich leicht durch die Bemerkung, dass die Funktion $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ von $x=\frac{\pi}{2}$ bis $x=\pi$ ganz dieselben Werthe annimmt, wie von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$, dass folglich die durch die Gleichung

$$y = \frac{\sin x}{\text{css}^2 x}$$

repräsentirte Curve innerhalb des Intervalles 0 bis π aus zwei congruenten positiven Zweigen besteht. Ihre Fläche ist demnach das Doppelte von derjenigen, welche über der Abscisse $\frac{\pi}{2}$ steht, oder man hat

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

und daraus ergiebt sich derselbe Werth wie oben.

II. Wenn zweitens $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, so müssen wir uns vor

Allem über die Bedeutung verständigen, welche jetzt dem Ausdrucke

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

zugeschrieben werden soll. Denn findet jene Unterbrechung bei $x=\varkappa$ statt, so kommt in der Reihe

$$f(a), f(a+\delta), f(a+2\delta), \ldots f(a+\overline{n-1}\delta)$$

auch das Glied $f(\varkappa)$ vor, sobald $a+k\delta=\varkappa$ gesetzt wird, und da fragt sich nun, welcher von den beiden dieser Funktion zukommenden Werthen zu nehmen sei. Hierauf ist die Antwort leicht, sobald man sich das Integral in zwei andere zerlegt denkt, welche die Intervalle a bis $\varkappa$ und $\varkappa$ bis b umfassen. Für $\frac{\varkappa-a}{n}=\delta$ und $\frac{b-\varkappa}{n}=\delta'$ ist nämlich dann

$$\int_a^\varkappa f(x)\,dx+\int_\varkappa^b f(x)\,dx$$

dem Gränzwerthe von

$$\delta[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\delta)]$$
$$+\delta'[f(\varkappa)+f(\varkappa+\delta')+f(\varkappa+2\delta')+\ldots+f(\varkappa+\overline{n-1}\delta')]$$

gleich und hier wollen wir $f(a+\overline{n-1}\delta)=f(\varkappa-\delta)$ und das folgende $f(\varkappa)$ dadurch unterscheiden, dass wir $\operatorname{Lim} f(\varkappa-\delta)=f(\varkappa-0)$ und $f(\varkappa)$ für $f(\varkappa+0)$ rechnen, also von den zwei Werthen, welche $f(\varkappa)$ besitzt, den ersten für den Endwerth der ersten, und den zweiten für den Anfangswerth der zweiten Reihe ansehen. Mit anderen Worten, wir schreiben statt der vorigen Zerlegung die folgende

$$\int_a^{\varkappa-0} f(x)\,dx+\int_{\varkappa+0}^b f(x)\,dx$$
$$=\operatorname{Lim}\left[\int_a^{\varkappa-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{\varkappa+\varepsilon'}^b dx\right],$$

wobei ε und ε' zwei bis zur Gränze Null abnehmende Grössen bedeuten. Da nun $f(x)$ hier continuirlich bleibt, einerseits zwischen a und $\varkappa-\varepsilon$, andererseits zwischen $\varkappa+\varepsilon'$ und b, so können wir für $\int f(x)\,dx$ $=F(x)+C$, vorausgesetzt, dass für $F(x)$ keine diskontinuirlich werdende Form genommen wird,

$$\int_a^{\varkappa-\varepsilon} f(x)\,dx = F(\varkappa-\varepsilon) - F(a),$$

$$\int_{\varkappa+\varepsilon'}^b f(x)\,dx = F(b) - F(\varkappa+\varepsilon')$$

setzen, und dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + \operatorname{Lim}[F(\varkappa-\varepsilon) - F(\varkappa+\varepsilon')] \qquad (13)$$

Es findet also hier eine ganz ähnliche Differenz zwischen den beiden Auffassungsweisen des bestimmten Integrales statt, wie vorhin. Wird überhaupt $f(x)$ an den zwischen a und b liegenden Stellen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$ diskontinuirlich, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + \operatorname{Lim}[F(\alpha-\varepsilon) - F(\alpha+\varepsilon')] \\ + \operatorname{Lim}[F(\beta-\eta) - F(\beta+\eta')] + \ldots + \operatorname{Lim}[F(\varkappa-\varrho) - F(\varkappa+\varrho')] \end{array}\right\} \quad (14)$$

wobei $\varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta', \ldots \varrho, \varrho'$ sämmtlich Grössen bezeichnen, die bis zur Null zu vermindern sind.

Man wird leicht bemerken, dass die Werthe solcher Integrale, n denen $f(x)$ eine oder mehrere Unterbrechungen der Stetigkeit erleidet, im Allgemeinen vieldeutig sind. So ist z. B. für $f(x) = \frac{1}{x}$, also $F(x) = \frac{1}{2} l(x^2)$, wo nun $f(x)$ an der Stelle Null diskontinuirlich wird,

$$\int_{-b}^{b} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\, l(b^2) - \tfrac{1}{2}\, l((-b)^2) + \operatorname{Lim}\{\tfrac{1}{2}\, l((-\varepsilon)^2) - \tfrac{1}{2}\, l(\varepsilon'^2)\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{Lim} l\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^2$$

und da ε und ε' bis zur Gränze Null abnehmen, ohne dass ein bestimmter Zusammenhang zwischen beiden statt findet, so wird $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{0}{0}$ d. h. völlig unbestimmt. Setzt man dagegen $\varepsilon' = \varepsilon$ und ebenso $\eta' = \eta, \ldots \varrho' = \varrho$, so fällt diese Unbestimmtheit weg und wir nennen dann

$$F(b) - F(a) + \operatorname{Lim}[F(\alpha-\varepsilon) - F(\alpha+\varepsilon)]$$
$$+ \operatorname{Lim}[F(\beta-\varepsilon)] - F(\beta+\varepsilon)] + \ldots + \operatorname{Lim}[F(\varkappa-\varepsilon) - F(\varkappa+\varepsilon)]$$

den **Hauptwerth** des zwischen den Gränzen a und b genommenen Inte-

grales von $f(x)dx$. Dabei ist statt $\eta, \dots \varrho$ immer ε geschrieben worden, weil alle jene Grössen unendlich abnehmende sind und bei der Willkührlichkeit dieser Abnahme nichts auf ihre Bezeichnung ankommt.

§ 25.

Singuläre Werthe bestimmter Integrale.

Es enthalte ein bestimmtes Integral eine willkührliche Constante r, sei also von der Form

$$\int_a^b f(x,r)\,dx,$$

so ist der Werth desselben offenbar von r abhängig; man darf aber hieraus nicht schliessen, dass, wenn r einen speziellen Werth ϱ bekommt, für welchen $f(x,r)=0$ wird, auch nothwendig das ganze Integral verschwinden müsse. Denn das obige Integral ist gleich

$$\text{Lim}[\delta\{f(a,r)+f(a+\delta,r)+f(a+2\delta,r)+\dots \\ +f(a+\overline{n-1}\delta,r)\}]$$

und hier erhellt nun Folgendes. Annullirt sich $f(x,r)$ für $r=\varrho$ und jedes innerhalb des Intervalles a bis b enthaltene x, so verschwinden alle Glieder der vorstehenden Reihe und man hat dann allerdings

$$\int_a^b f(x,\varrho)\,dx = \text{Lim}[\delta.0]=0.$$

Giebt es dagegen zwischen a und b einen Werth ξ von x der Art, dass $f(\xi,\varrho)$ nicht $=0$, sondern unbestimmt oder gar unendlich wird, so verschwinden nicht alle Glieder der vorigen Reihe und es bleibt

$$\int_a^b f(x,\varrho)\,dx = \text{Lim}[\delta f(\xi,\varrho)]$$

wo nun nicht behauptet werden darf, dass sich die rechte Seite annullire. Im Gegentheile kann das Integral dann noch einen bestimmten Werth haben, welchen man den singulären Werth des bestimmten Integrales nennt.

Ein solcher singulärer Werth tritt z. B. bei dem Integrale

$$\int_{-b}^{b} \frac{r dx}{r^2 + x^2}$$

ein, wenn $r = 0$ genommen wird, denn hier giebt es ein System von Werthen, für welche die Funktion $\frac{r}{r^2 + x^2}$ nicht verschwindet, nämlich $r = 0, x = 0$, wobei der letzte Fall in dem Integrationsintervalle $-b$ bis b enthalten ist. Nun hat man aber

$$\int_{-b}^{b} \frac{r dx}{r^2 + x^2} = \text{Arctan}\,\frac{b}{r} - \text{Arctan}\left(-\frac{b}{r}\right)$$

$$= 2\,\text{Arctan}\,\frac{b}{r},$$

und folglich ist der dem Falle $r = 0$ entsprechende singuläre Werth des Integrales:

$$= 2\,\text{Arctan}\,\infty = \pi.$$

Eine zweite Art singulärer Werthe entsteht häufig dadurch, dass man die Integrationsgränzen einander unendlich nahe kommen lässt. Steht nämlich ein Integral unter der Form:

$$\int_{a}^{a+r} f(x, r)\, dx$$

so ist bekanntlich sein Werth durch

$$r f(a + \lambda r, r) \;,\; 1 > \lambda > 0$$

ausdrückbar. Wenn nun r bis zur Gränze Null abnimmt, so kann oft der Fall vorkommen, dass $f(a + \lambda r, r)$ beim Uebergange in $f(a, 0)$ unendlich und folglich

$$\text{Lim} \int_{a}^{a+r} f(x, r)\, dx = 0.\infty$$

wird, und diess kann eine Ausnahme von der Regel bilden, dass der Werth eines zwischen gleichen Integrationsgränzen genommenen Integrales Null ist. So verschwindet z. B. das Integral

$$\int_{0}^{\sqrt{r}} \frac{r dx}{r^2 + x^2}$$

nicht für $r=0$; denn man hat

$$\int_0^{\sqrt{r}} \frac{r dx}{r^2+x^2} = \text{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{r}} - \text{Arctan}\,0,$$

und folglich für $r=0$

$$\text{Lim} \int_0^{\sqrt{r}} \frac{r dx}{r^2+x^2} = \text{Arctan}\,\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Ein zweites Beispiel hierzu liefert das Integral

$$\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \cdot \frac{r^2}{r^2+x^2}.$$

Für $x = r\cos u$ giebt nämlich die unbestimmte Integration

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{r^2}{r^2+x^2} = -\int \frac{du}{1+\cos^2 u}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan}\left(\frac{\tan u}{\sqrt{2}}\right),$$

mithin, weil aus $\cos u = \frac{x}{r}$ folgt $\tan u = \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{r^2}{r^2+x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan} \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x\sqrt{2}}$$

und

$$\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{r^2}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

und da der Werth des Integrales von r unabhängig ist, so wird auch für unendlich abnehmende r

$$\text{Lim} \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{r^2}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Diese Beispiele werden hinreichend das Vorkommen singulärer Werthe erläutern, und ermahnen zu einer gewissen Vorsicht bei allen die Theorie bestimmter Integrale betreffenden Untersuchungen.

§ 26.

Transformationen bestimmter Integrale.

Es sind hauptsächlich drei Umwandlungen, denen bestimmte Integrale unterworfen werden können, nämlich die der Einführung einer neuen Variabeln, der Zerfällung des Integrationsintervalles und der Anwendung von Differenziation und Integration in Bezug auf eine im Integrale vorkommende arbiträre Constante.

I. Die erste dieser Transformationen besteht darin, dass man in einem Integrale von der Form

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx$$

statt $\varphi(x)$ einen einzigen Buchstaben schreibt, und diese neue Grösse als unabhängige Variabele ansieht. Es folgt daraus ganz wie im §. 3. no. 4. für $\varphi(x) = z$, $x = \psi(z)$ mithin $f[\varphi(x)]\,dx = f(z)\,\psi'(z)\,dz$. Wenn nun ferner x den Werth a erhalten hat, so ist $z = \varphi(a)$ geworden, und ebenso entspricht dem Werthe $x=b$ der Werth $z=\varphi(b)$. Daher ist jetzt

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,\psi'(z)\,dz, \tag{1}$$

wobei man rechts auch wieder x für z schreiben könnte, da, wie leicht zu sehen, in einem bestimmten Integrale nichts auf die Bezeichnung der Variabeln ankommt, nach welcher integrirt wird.

Für $\varphi(x) = hx + k$ ergiebt sich beispielsweis

$$\int_a^b f(hx+k)\,dx = \frac{1}{h}\int_{ha+k}^{hb+k} f(z)\,dz \tag{2}$$

und noch spezieller für $h = -1$, $k = 0$, wenn x für z geschrieben wird,

$$\int_a^b f(-x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx.$$

Schreibt man links

$$-\int_b^a f(-x)\,dx \text{ für } \int_a^b f(-x)\,dx$$

und darauf die Gleichung selbst in umgekehrter Ordnung, so hat man den sehr häufig anwendbaren Satz:

$$\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx = \int_b^a f(-x)\,dx. \qquad (3)$$

Für $a = 0$, $b = 1$ ergiebt sich noch aus no. (2)

$$\int_k^{h+k} f(z)\,dz = h\int_0^1 f(hx+k)\,dx$$

und, wenn $k = \alpha$, $h = \beta - \alpha$ gesetzt wird,

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = (\beta - \alpha)\int_0^1 f[\alpha + (\beta - \alpha)x]\,dx. \qquad (4)$$

Nicht ohne Interesse ist hier noch die Substitution

$$x = \frac{y}{1+y} \text{ also } y = \frac{x}{1-x}.$$

Es folgt daraus zunächst

$$f[\alpha + (\beta - \alpha)x]\,dx = f\left(\frac{\alpha + \beta y}{1+y}\right)\frac{dy}{(1+y)^2},$$

und wenn ferner x die Werthe 0 und 1 angenommen hat, ist $y = 0$ und $y = \frac{1}{0} = \infty$ geworden. So wird dann aus (4)

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = (\beta - \alpha)\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha + \beta y}{1+y}\right)\frac{dy}{(1+y)^2} \qquad (5)$$

und der Sinn der Gleichungen (4) und (5) ist, dass sich jedes bestimmte Integral mit beliebigen endlichen Gränzen in ein anderes verwandeln lässt, welches entweder die Integrationsgränzen 0 und 1 oder 0 und ∞ besitzt.

II. Während die so eben behandelte Transformationsmethode nur in der durch die Existenz von Integrationsgränzen bedingten Modifikation eines auch auf unbestimmte Integrale anwendbaren Verfahrens

war, ist die zweite Art von Umwandlungen den bestimmten Integralen eigenthümlich; sie beruht nämlich auf dem Satze dass für $a < \alpha < \beta < \gamma \ldots < \varkappa < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_\varkappa^b f(x)\,dx$$

ist und besteht in einer Verbindung desselben mit mehrfacher Anwendung von Substitutionen. Das allgemeine Schema derselben ist folgendes. Man betrachte das Integral

$$\int_0^c f(x)\,dx$$

und setze voraus, dass c nächst grösser ist als das $n$fache einer kleineren Grösse k, dass man also $c = nk + r$ setzen kann, wo n eine ganze positive Zahl und r einen Rest $< k$ bezeichnet. Es ist dann

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^{nk+r} f(x)\,dx$$
$$= \int_0^k f(x)\,dx + \int_k^{2k} f(x)\,dx + \int_{2k}^{3k} f(x)\,dx + \int_{3k}^{4k} f(x)\,dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_{(n-1)k}^{nk} f(x)\,dx + \int_{nk}^{nk+r} f(x)\,dx.$$

Nun setze man im ersten Integrale $x = z$, im zweiten $x = k + z$, im dritten $x = 2k + z$, ... im $n$ten $x = (n-1)k + z$ und im letzten $x = nk + z$, so erhält man sogleich

$$\int_0^{nk+r} f(x)\,dx$$
$$= \int_0^k f(z)\,dz + \int_0^k f(k+z)\,dz + \int_0^k f(2k+z)\,dz + \ldots$$
$$\ldots + \int_0^k f(\overline{n-1}k + z)\,dz + \int_0^r f(nk+z)\,dz$$

und hier lassen sich die n ersten Integrale wegen der gleichen Integrationsgränzen in ein einziges zusammenziehen. Schreibt man noch x für z, so ist jetzt

$$\int_0^{nk+r} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^k [f(x)+f(k+x)+f(2k+x)+\ldots+f(\overline{n-1}\,k+x)]\,dx$$

$$+\int_0^r f(nk+x)\,dx, \qquad (6)$$

also das Integral auf zwei andere von kleineren Integrationsintervallen zurückgeführt. Man kann diese Reduktion aber noch weiter treiben, denn es ist

$$\int_0^k F(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}k} F(x) + dx \int_{\frac{1}{2}k}^k F(x)\,dx$$

und wenn im ersten Integrale rechts $x = z$, im zweiten $x = k - z$ gesetzt wird

$$\int_0^k F(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}k} F(z)\,dz + \int_{\frac{1}{2}k}^0 F(k-dz)\,z.$$

Kehrt man im zweiten Integrale rechts die Integrationsgränzen um, so wird dasselbe wieder positiv, und schreibt man jetzt x für z, so ist

$$\int_0^k F(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}k} [F(x)+F(k-x)]\,dx. \qquad (7)$$

Diess lässt sich sogleich auf die Formel (6) für $F(x) = f(x) + f(k+x) + f(2k+x) + \ldots + f(\overline{n-1}\,k+x)$ anwenden und giebt dann:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{nk+r} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}k} [f(x)+f(k-x)+f(k+x)+f(2k-x)+f(2k+x)+\ldots \\ &+\ldots f(\overline{n-1}\,k+x)+f(nk-x)]\,dx + \int_0^r f(nk+x)\,dx \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Hieraus folgt z. B. für $k = \pi$, $f(x) = \varphi(\sin^2 x)$:

$$\int_0^{n\pi+r} \varphi(\sin^2 x)\,dx = 2n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\sin^2 x)\,dx + \int_0^r \varphi(\sin^2 x)\,dx,$$

indem hier $f(k) = f(k-x) = f(k+x) = f(2k-x)$ .... wird.

Eine häufig vorkommende Anwendung dieser Transformationsmethode ist die folgende. Man hat

$$\int_{-c}^{+c} f(x)\,dx = \int_{-c}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+c} f(x)\,dx,$$

und wenn man für das erste Integral rechts die Formel (3) für $a = c$, $b = 0$ benutzt

$$\int_{-c}^{+c} f(x)\,dx = \int_{0}^{+c} f(-x)\,dx + \int_{0}^{+c} f(x)\,dx$$

d. i.

$$\int_{-c}^{+c} f(x)\,dx = \int_{0}^{c} [f(-x)+f(x)]\,dx. \qquad (9)$$

Daraus erhält man z. B.

$$\int_{-c}^{+c} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{c} f(x)\,dx \text{ oder } = 0,$$

jenachdem $f(x)$ die Eigenschaften $f(-x) = f(+x)$ oder $f(-x) = -f(+x)$ besitzt. Der erste Fall hiervon würde z. B. auf die Form $f(x) = \varphi(x^2)$, der zweite auf $f(x) = x\varphi(x^2)$ passen.

III. Enthält ein Integral eine willkührliche Constante r, ist es also von der Form

$$R = \int_{a}^{b} f(x, r)\,dx,$$

wo wir der Einfachheit wegen a und b als unabhängig von r voraussetzen, und bleibt ferner $f''_r(r, x)$ stetig und endlich von $x = a$ bis $x = b$, so haben wir bekanntlich

$$\frac{dR}{dr} = \int_{a}^{b} \left[\frac{df(x,r)}{dr}\right] dx.$$

Es kann nun leicht sein, dass das neue Integral auf der rechten Seite so einfach ausfällt, dass man seinen Werth unmittelbar bestimmen kann. Heisst $\varphi(r)$ derselbe, so wird jetzt

$$\frac{dR}{dr} = \varphi(r)$$

und mithin

$$R = \int \varphi(r)\,dr + C,$$

wo man nun die Constante C noch zu bestimmen hat; diess ist in den Fällen nicht schwer, wo es einen speziellen Werth von r giebt, für welchen $f(x,r)$ und zugleich das Integral davon (R) verschwindet. — Enthält das gegebene Integral von Hause aus keine willkührliche Constante, so trägt man willkührlich eine solche hinein und verallgemeinert es auf

diese Weise. Das Technische des Verfahrens werden die folgenden Beispiele zeigen.

Verlangte man den Werth des Integrales

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (10)$$

so betrachte man das allgemeinere

$$R = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} rx}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hier giebt die partielle Differenziation nach r:

$$\frac{dR}{dr} = \int_0^1 \frac{1}{1+r^2x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

und wenn man $x = \sin t$ setzt,

$$\frac{dR}{dr} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dt}{1+r^2\sin^2 t} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}},$$

wie man mittelst der Formeln des §. 18. auf der Stelle findet. Es ist nun weiter

$$R = \frac{\pi}{2} \int \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} + C.$$

Aus der ursprünglichen Bedeutung des R ersieht man aber ohne Mühe, dass für $r = 0$ auch $R = 0$ wird, und mithin muss auch

$$0 = \frac{\pi}{2} \int \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} + C$$
$$(\text{für } r = 0)$$

sein. Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorhergehenden wird jetzt

$$R = \frac{\pi}{2} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}},$$

und mithin

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} rx}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Daher ist jetzt das ursprüngliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}},$$

und damit hat man das gegebene Integral aus einer transcendenten Form in eine algebraische gebracht. Diess ist immer ein Vortheil, auch wenn man nicht, wie zufällig hier, die Integration nach r ausführen kann.

Ein complizirteres Beispiel, welches später kommenden Entwikkelungen zufolge eine wichtige geometrische Bedeutung besitzt, bildet die Transformation des Integrales:

$$\int_\alpha^\beta \frac{1-x^2}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(\beta^2-x^2)}}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx, \qquad (11)$$

worin α und β ächte Brüche sind. Dasselbe ist ein spezieller Fall des folgenden allgemeineren:

$$R = \int_\alpha^\beta \frac{1-x^2}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(\beta^2-x^2)}}\, l\left(\frac{1+rx}{1-rx}\right) dx,$$

und hier giebt die Differenziation nach r:

$$\frac{dR}{dr} = \int_\alpha^\beta \frac{1-x^2}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(\beta^2-x^2)}} \frac{2x\,dx}{1-r^2x^2}.$$

Setzt man nun $x^2 = y$, also $2x\,dx = dy$, $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, so geht das Integral in

$$\frac{dR}{dr} = \int_a^b \frac{1-y}{1-r^2y} \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(b-y)}}$$

über, wofür man wegen

$$\frac{1-y}{1-r^2y} = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{1-r^2}{1-r^2y}\right]$$

auch die folgende Zerfällung eintreten lassen kann:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r^2}\int_a^b \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} - \frac{1-r^2}{r^2}\int_a^b \frac{dy}{(1-r^2y)\sqrt{(y-a)(b-y)}}.$$

Um nun das Radikal wegzuschaffen, substituiren wir

$$y = \tfrac{1}{2}(b+a) - \tfrac{1}{2}(b-a)\cos u,$$

wodurch

$$y-a = \tfrac{1}{2}(b-a)(1-\cos u),$$
$$b-y = \tfrac{1}{2}(b-a)(1+\cos u);$$

folglich

$$\sqrt{(y-a)(b-y)} = \tfrac{1}{2}(b-a)\sin u$$

wird. Ferner haben wir $dy = \frac{1}{2}(b-a)\sin u\, du$, mithin

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} = du.$$

Wenn ferner y die Werthe a und b angenommen hat, ist entsprechend $\cos u = 1$ und $\cos u = -1$, d. h. $u=0$ und $u=\pi$ geworden, und nach allen diesen Substitutionen wird jetzt

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r^2}\int_0^\pi du - \frac{1-r^2}{r^2}\int_0^\pi \frac{du}{1-\frac{1}{2}(b+a)r^2+\frac{1}{2}(b-a)r^2\cos u}.$$

Die Ausführung beider Integrationen ist nicht schwer, sobald man die Formel

$$\int_0^\pi \frac{du}{h+k\cos u} = \frac{\pi}{\sqrt{(h-k)(h+k)}}$$

in Anwendung bringt, und man erhält so

$$\frac{dR}{dr} = \frac{\pi}{r^2} - \frac{1-r^2}{r^2}\frac{\pi}{\sqrt{(1-ar^2)(1-br^2)}}$$

oder unter Berücksichtigung der Werthe von a und b,

$$\frac{dR}{dr} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}$$
$$+\pi\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}\right]\frac{1}{r^2}$$

Hieraus ergiebt sich nun sogleich

$$R = \pi\int\frac{dr}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}$$
$$+\pi\int\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}\right]\frac{dr}{r^2}+C.$$

Aus der ursprünglichen Bedeutung von R geht aber hervor, dass sich R mit r gleichzeitig annulliren muss; man kann daher zu der vorste-

henden Gleichung noch eine zweite hinzusetzen, deren linke Seite die Null und auf deren rechter Seite nach geschehener Integration $r=0$ zu nehmen ist. Subtrahirt man diese zweite Gleichung von der vorigen, so hat man nach einer Eigenschaft des bestimmten Integrales

$$R = \pi\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}} + \pi\int_0^r \left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}\right]\frac{dr}{r^2}.$$

Nimmt man endlich $r=1$, so geht R in das gegebene Integral (11) über, und es ist dann

$$\left.\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta \frac{1-x^2}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(\beta^2-x^2)}}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx\\ &= \pi\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}\\ &+ \pi\int_0^1 \left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}\right]\frac{dr}{r^2}.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Da wir α und β als ächte Brüche vorausgesetzt haben; so hat es jetzt keine Schwierigkeit, die beiden unter algebraischer Form stehenden Integrale in unendliche Reihen zu verwandeln.

§ 27.

Bestimmte Doppelintegrale mit constanten Gränzen.

Die dritte unter den vorhin entwickelten Transformationsmethoden führt unter Anwendung einer kleinen Modifikation zu einem für die Theorie bestimmter Integrale sehr wichtigem Theoreme. Bleibt nämlich $f''_r(x,r)$ stetig und endlich von $x=a$ bis $x=b$, so ist

$$\frac{d\int_a^b f(x,r)\,dx}{dr} = \int_a^b \left[\frac{df(x,r)}{dr}\right]dx;$$

folglich durch Multiplikation mit dr und nachherige Integration in Bezug auf r

$$\int_a^b f(x,r)\,dx = \int dr \int_a^b \left[\frac{df(x,r)}{dr}\right] dx + C.$$

Setzen wir hier $r = \beta$, $r = \alpha$ und subtrahiren die so entstehenden Gleichungen von einander, so wird

$$\int_a^b f(x,\beta)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_\alpha^\beta dr \int_a^b \left[\frac{df(x,r)}{dr}\right] dx$$

oder

$$\int_a^b dx[f(x,\beta) - f(x,\alpha)] = \int_\alpha^\beta dr \int_a^b \left[\frac{df(x,r)}{dr}\right] dx \qquad (1)$$

und diess ist eigentlich nichts Anderes als der allgemeine Ausdruck der im vorigen Paragraphen unter no. 3. angegebenen Transformationsmethode. Setzen wir weiter

$$\left[\frac{df(x,r)}{dr}\right] = \varphi(x,r), \qquad (2)$$

so folgt

$$f(x,r) = \int \varphi(x,r)\,dr + C,$$

wobei x als constant in Bezug auf die nach r vorzunehmende Integration angesehen wird, und wenn nun $\varphi(x,r)$ für alle r von $r = \alpha$ bis $r = \beta$ endlich und stetig bleibt, so ist jetzt

$$f(x,\beta) - f(x,\alpha) = \int_\alpha^\beta \varphi(x,r)\,dr,$$

und wenn diess in die Gleichung (1) substituirt wird, so ergiebt sich

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta \varphi(x,r)\,dr = \int_\alpha^\beta dr \int_a^b f(x,r)\,dx,$$

d. h. wenn zwei Integrationen in Beziehung auf zwei von einander unabhängige Variabeln zu verrichten sind, so bleibt die Anordnung hinsichtlich der Aafeinanderfolge dieser Integrationen der Willkühr überlassen. Zugleich gilt jede Veränderliche als Constante für die Integration in Beziehung auf die andere Variabele. Man darf aber nicht übersehen, dass hier noch $f''_r(x,r)$ d. h. $\varphi'_r(x,r)$ endlich und stetig bleiben muss von $x = a$ bis $x = b$ und ebenso $\varphi(x,r)$ von $r = \alpha$ bis $r = \beta$; die erste von diesen Bedingungen ist aber erfüllt, wenn $\varphi(x,r)$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig und endlich bleibt, weil die Dif-

ferenziation in $\varphi'_r(x,r)$ nicht nach dem hier in Frage kommenden x geschieht und daher kann man sagen: Bleibt $\varphi(x,\xi)$ endlich und continuirlich für alle Paare von Werthen, welche man willkührlich aus den Intervallen $x=a$ bis $x=b$ und $\xi=\alpha$ bis $\xi=\beta$ herausgreifen kann, so ist

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta \varphi(x,\xi)\,d\xi = \int_\alpha^\beta d\xi \int_a^b \varphi(x,\xi)\,dx \tag{3}$$

Dieser Satz bildet ein Hauptmittel zur Transformation doppelter Integrale, lässt sich aber auch als ein Instrument zur Entdeckung der verschiedensten Integralformeln benutzen, sobald man die Funktion $\varphi(x,\xi)$ so wählt, dass man bei der einen Anordnung der Integrationen nur die eine Integration, bei der anderen dagegen beide Integrationen aus führen kann. So ist z. B. für

$$\varphi(x,\xi) = e^{-x\xi}\sin x$$
$$a=0\,,\; b=\infty\;;\; \alpha=0\,,\; \beta=\infty$$

die linke Seite der Gleichung (3):

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x\xi}\sin x\,d\xi = \int_0^\infty dx \sin x \int_0^\infty e^{-x\xi}\,d\xi$$
$$= \int_0 dx \sin x\,\frac{1}{x}$$

und die rechte mit Hülfe von Formel (8) § 20 für $a=\xi$, $b=1$

$$\int_0^\infty d\xi \int_0^\infty e^{-x\xi}\sin x\,dx = \int_0^\infty d\xi\,\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{2},$$

mithin durch Vergleichung beider Resultate:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es lässt sich diese Formel durch die Substitution $x = cz$ noch etwas verallgemeinern; man erhält nämlich

$$\int_0^\infty \frac{\sin cz}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

wobei aber c eine positive endliche Grösse sein muss, da sonst die Integrationsgränzen für z nicht dieselben sein würden wie die früheren für x.

Ein zweites bemerkenswerthes Beispiel ist das folgende, worin die Anwendung des obigen Prinzips unter etwas anderer Form geschieht. Es sei der unbekannte Werth des Integrales

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = K, \tag{5}$$

wobei jedenfalls K eine endliche Grösse ist, weil die Funktion e^{-t^2} rascher als e^{-t} abnimmt und mithin

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt < \int_0^\infty e^{-t}dt \text{ d. i.} < 1$$

sein muss. Setzt man in der Gleichung (5) $t = \sqrt{r}\,.\,x$, wobei $\sqrt{r}$ als positiv angesehen wird, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-rx^2}dx = K\,\frac{1}{\sqrt{r}}, \tag{6}$$

folglich auch durch Multiplikation mit $e^{-r}dr$ und Integration nach r zwischen den Gränzen $r = 0$, $r = \infty$

$$\int_0^\infty e^{-r}\,dr\int_0^\infty e^{-rx^2}\,dx = K\int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}}\;e^{-r} \tag{7}$$

Für die linke Seite kann man, weil e^{-r} constant für die nach x zu verrichtende Integration ist,

$$\int_0^\infty dr\int_0^\infty e^{-r(1+x^2)}\,dx$$

schreiben, und hier die Integrationsordnung umkehren, wodurch man erhält:

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-(1+x^2)r}\,dr = \int_0^\infty dx\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

also nach No. (7):

$$\frac{\pi}{2} = K\int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}}\;e^{-r}.$$

Das hier vorkommende Integral lässt sich aber sehr einfach durch K ausdrücken; denn setzt man $r = z^2$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}}\;e^{-r} = 2\int_0^\infty dz\,e^{-z^2} = 2K,$$

weil es in der Gleichung (5) einerlei ist, mit welchen Buchstaben die Variabele der Integration bezeichnet wird. Die Gleichung (8) geht jetzt in $\frac{\pi}{2} = 2K^2$ über, woraus $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und nach (5) und (6):

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (9)$$

$$\int_0^\infty e^{-rx^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, r^{-\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

folgt. — Hieran knüpfen sich gleich wieder zahlreiche Consequenzen und zwar durch Anwendung des bereits erläuterten Prinzips, wonach aus einer Gleichung von der Form

$$\int_a^b f(x,r)\, dx = \varphi(r)$$

folgt

$$\int_a^b \left[\frac{df(x,r)}{dr}\right] dx = \frac{d\varphi(r)}{dr},$$

vorausgesetzt, dass $f''_r(x,r)$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig und endlich bleibt. Da nämlich in unserem Falle die Funktion e^{-rx^2} so beschaffen ist, dass ihre successiven partiell nach r genommenen Differenzialquotienten

$$-x^2 e^{-rx^2},\ +x^4 e^{-rx^2},\ -x^6 e^{-rx^2}, \ldots$$

stetig und endlich bleiben von $x = 0$ bis $x = \infty$, so kann man den angeführten Satz mehrmals hintereinander anwenden, und erhält jetzt durch $n$malige partielle Differenziation der Gleichung (10)

$$(-1)^n \int_0^\infty x^{2n} e^{-rx^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{d^n (r^{-\frac{1}{2}})}{dr^n}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\, r^{-n-\frac{1}{2}}$$

oder

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-rx^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{1}{r^n}.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Multiplikation mit

$$\frac{(2b)^{2n}}{1.2.3...(2n)},$$

wo b eine willkührliche Constante bezeichnet, und unter der Rücksicht, dass

$$\frac{2^{2n}}{1.2.3...2n}\cdot\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}=\frac{2^n}{2.4.6...(2n)}=\frac{1}{1.2...n}$$

ist, die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{(2bx)^{2n}}{1.2..(2n)}\,e^{-rx^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}\,\frac{1}{1.2....n}\left(\frac{b^2}{r}\right)^n.$$

Addirt man jetzt zur Gleichuug (10) alles Dasjenige, was sich aus dem Vorigen für $n=1,2,3,\ldots$ ergiebt, so wird

$$\int_0^\infty\left[1+\frac{(2bx)^2}{1.2}+\frac{(2bx)^4}{1.2.3.4}+\frac{(2bx)^6}{1.2...6}+\ldots\right]e^{-rx^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}\left[1+\frac{1}{1}\frac{b^2}{r}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{b^2}{r}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{b^2}{r}\right)^3+\ldots\right]$$

d. i. wenn man die hier vorkommenden unter allen Umständen conver genten Reihen summirt,

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\left[e^{2bx}+e^{-2bx}\right]e^{-rx^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}\,e^{\frac{b^2}{r}}. \qquad (11)$$

Da b eine völlig willkührliche Constante war, so darf man sie auch imaginär nehmen, was Dasselbe ist, als hätte man den vorigen Rei hen wechselnde Zeichen gegeben, und dann wird

$$\int_0^\infty \cos 2bx\, e^{-rx^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{r}}\,e^{-\frac{b^2}{a}}$$

oder für $r=a^2$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{-\left(\frac{b}{t}\right)^2} \qquad (12)$$

und diess ist eine der merkwürdigsten Formeln aus der Theorie bestimmter Integrale.

Die vorstehende Gleichung giebt selbst wieder Gelegenheit zur Anwendung des Prinzips der doppelten Integration und zwar auf ganz ähnliche Weise wie vorhin bei der Bestimmung von K. Schreibt man nämlich t für a und die Gleichung in der Form

$$2t\int_0^\infty e^{-t^2x^2}\cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-\left(\frac{b}{t}\right)^2}$$

multiplizirt darauf beiderseits mit

$$e^{-(at)^2}.\,dt$$

und integrirt in Beziehung auf t zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$, so wird

$$\int_0^\infty e^{-a^2t^2}2tdt\int_0^\infty e^{-t^2x^2}\cos 2bxdx = \sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-(at)^2-\left(\frac{b}{t}\right)^2}dt \quad (13)$$

wo wir nun beide Seiten besonders betrachten wollen. Die linke Seite lässt sich, weil t nicht von x abhängt, auch in der Form

$$\int_0^\infty dt\int_0^\infty 2te^{-(a^2+x^2)t^2}\cos 2bxdx$$

schreiben, und wenn man hier die Integrationsordnung umkehrt, so ist diess auch

$$=\int_0^\infty dx\int_0^\infty 2te^{-(a^2+x^2)t^2}\cos 2bxdt$$

$$=\int_0^\infty \cos 2bxdx\int_0^\infty e^{-(a^2+x^2)t^2}2tdt$$

und für $t^2=u$, also $2tdt=du$ wird hieraus

$$\int_0^\infty \cos 2bxdx\int_0^\infty e^{-(a^2+x^2)u}du = \int_0^\infty \cos 2bxdx\,\frac{1}{a^2+x^2}. \quad (14)$$

Die rechte Seite von Nro. (13) lässt sich unter der Gestalt

$$\sqrt{\pi}\,e^{-2ab}\int_0^\infty e^{-\left(at-\frac{b}{t}\right)^2}dt \quad (15)$$

darstellen und wenn man hier $at-\dfrac{b}{t}=x$ setzt, so folgt

$$t=\frac{x\pm\sqrt{x^2+4ab}}{2a},\ dt=\frac{1}{2a}\left[1\pm\frac{x}{\sqrt{x^2+4ab}}\right]dx.$$

Wenn ferner $t=\infty$ und $t=0$ geworden ist, hat x die Werthe $+\infty$ und $-\infty$ angenommen, wobei aber nothwendig vorausgesetzt werden muss, dass a und b wesentlich positive von Null verschiedene Grössen sind. Mit Hülfe dieser Substitutionen wird

$$\int_0^\infty e^{-(at-\frac{b}{t})^2}\,dt=\frac{1}{2a}\int_0^\infty\left[1\pm\frac{x}{\sqrt{x^2+4ab}}\right]e^{-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\pm\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty\frac{x}{\sqrt{x^2+4ab}}e^{-x^2}\,dx.$$

Nach einer früheren Bemerkung findet man sogleich

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{x}{\sqrt{x^2+4ab}}e^{-x^2}\,dx=0;$$

und mithin

$$\int_0^\infty e^{-(at-\frac{b}{t})^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Wird diess in Nro. (15) substituirt, so erhält man die rechte Seite der Gleichung (13) und wenn man den Werth ihrer linken Seite aus Nro. (14) dazu stellt, so ergiebt sich jetzt die merkwürdige Formel

$$\int_0^\infty\frac{\cos 2bx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-2ab},$$

oder wenn man für $2b$ kurz b schreibt:

$$\int_0^\infty\frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-ab},\tag{16}$$

wobei a und b wesentlich positive von Null verschiedene Grössen sein müssen.

Da in der vorstehenden Gleichung zwei willkührliche Constanten vorkommen, so hat man doppelte Gelegenheit zu partiellen Differenziationen. So erhält man zuerst durch partielle Differenziation in Bezug auf b, von deren Statthaftigkeit man sich leicht überzeugen wird:

$$\int_0^\infty\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab}.\tag{17}$$

Eine nochmalige Differenziation nach b würde aber auf ein unrichtiges Resultat führen, denn für

$$f(x,b)=\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}$$

erhält man

$$f''_b(x,b)=-\frac{x^3\sin bx}{a^2+x^2}=-x\sin bx+\frac{a^2x\sin bx}{a^2+x^2},$$

und diese Funktion bleibt nicht endlich von $x=0$ bis $x=\infty$, da für $x=\infty$ das Produkt $x\sin bx$ in die völlig unbestimmte Grösse $\infty\sin\infty$ übergeht, die auch etwas Unendliches bedeuten kann, so bald man sich x unter der Form $\frac{2m+1}{2b}\pi$ denkt und hier die ganze Zahl m ins Unendliche zunehmen lässt. Auch a posteriori ergiebt sich leicht die Unstatthaftigkeit einer Differenziation der Gleichung (17) in Bezug auf b, denn es würde

$$\int_0^\infty \frac{x^2\cos bx}{a^2+x^2}dx=-a\frac{\pi}{2}e^{-ab}$$

zum Vorschein kommen, d. i. wegen $\frac{x^2}{a^2+x^2}=1-\frac{a^2}{a^2+x^2}$:

$$\int_0^\infty \cos bx dx-a^2\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx=-a\frac{\pi}{2}e^{-ab}$$

oder

$$\frac{\sin\infty}{b}-a\frac{\pi}{2}e^{-ab}=-a\frac{\pi}{2}e^{-ab},$$

folglich $\sin\infty=0$, was augenscheinlich falsch ist.

Dagegen kann man die Gleichungen (16) und (17) beliebig viele Male in Beziehung auf a differenziren, wie man ohne Mühe aus der zu solchen Differenziationen nothwendigen Bedingung erkennen wird. Die gedachte Operation selbst führt man leicht dadurch aus, dass man zunächst $a^2=r$ also $a=\sqrt{r}$ setzt, woraus

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{r+x^2}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{r}}e^{-b\sqrt{r}}=-\frac{\pi}{b}D_r(e^{-b\sqrt{r}}),$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{r+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-b\sqrt{r}}$$

folgt, und nun hier $n$mal nach r differenzirt. Diess giebt

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{(r+x^2)^{n+1}}dx=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{1.2..n.b}D_r^{n+1}(e^{-b\sqrt{r}}),$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{(r+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{(-1)^n \pi}{1.2..n.2} D_r{}^n (e^{-b\sqrt{r}}).$$

Die auf den rechten Seiten blos angedeuteten Differenziationen sind nach der am Ende von §. 19. der Differenzialrechnung stehenden Formel leicht ausführbar; setzt man nachher wieder a^2 für r, so findet man unmittelbar die Werthe der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} \text{ und } \int_0^\infty \frac{x \sin bx\,dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}.$$

Wir wollen noch eines Umstandes erwähnen, der bei der Vertauschung zweier auf einander folgenden Integrationen häufig vorkommt und einige Aufmerksamkeit verdient, obgleich er keine Schwierigkeiten darbietet. Es kann nämlich leicht sein, dass sich in einem Doppelintegrale wie

$$\int_\alpha^\beta du \int_a^b f(x,u)\,dx \tag{18}$$

die Integration nach x nicht in einer und derselben Form ausführen lässt, sondern zu zwei verschiedenen Formen Veranlassung giebt, jenachdem die als willkührliche Constante für die Integration nach x geltende Variabele u zwischen verschiedenen Intervallen liegt. Wäre z. B. $f(x,u)$ eine solche Funktion von x und der Constanten u, dass das Integral

$$\int f(x,u)\,du$$

durch Logarithmen ausgedrückt würde, sobald u zwischen α und γ liegt, dagegen durch Kreisbögen, wenn u zwischen γ und β enthalten ist, und wäre ausserdem $\alpha < \gamma < \beta$, so würde man, da u in der späteren Integration von α bis β ausgedehnt wird, für das ebengenannte Integral die beiden Fälle $\alpha < u < \gamma$ und $\gamma < u < \beta$ unterscheiden müssen. Diess geschieht, indem man das Doppelintegral (18) in die beiden folgenden

$$\int_\alpha^\gamma du \int_a^b f(x,u)\,dx + \int_\gamma^\beta du \int_a^b f(x,u)\,dx$$

zerlegt; hier ist nun im ersten Integrale $\alpha < u < \gamma$, im zweiten $\gamma < u < \beta$, und folglich wird man das nach x genommene Integral im ersten Falle durch die erste Form (die logarithmische) und im zweiten durch die

zweite (durch Kreisbögen) ausdrücken. Ein Beispiel hierzu bietet das Doppelintegral:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2x^2 u}}. \tag{19}$$

Integrirt man zuerst nach u, indem man die Formel

$$\int \frac{du}{\sqrt{\alpha + \beta u}} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\alpha + \beta u} + C$$

für $\alpha = a^2 + x^2$, $\beta = -2x^2$ anwendet, so findet man dafür:

$$\int_0^1 dx \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}. \tag{20}$$

Bei Umkehrung der Integrationsordnung ist dagegen das Integral in (19) auch gleich

$$\int_0^1 du \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2 + (1-2u)x^2}}. \tag{21}$$

Man weiss aber, dass ein Integral von der Form;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{h + kx^2}}$$

durch Logarithmen oder Kreisbögen ausgedrückt wird, jenachdem k positiv oder negativ ist, und daher sind in No. (11) die Fälle zu unterscheiden, ob $1-2u$ positiv oder negativ d. h. $u < \frac{1}{2}$ oder $u > \frac{1}{2}$ ist. Wir zerlegen daher das Integral (21) wie folgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0 \frac{dx}{\sqrt{a^2 + (1-2u)x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (2u-1)x^2}}$$

und hier ist im ersten Doppelintegrale $1-2u$, im zweiten $2u-1$, immer positiv. Führt man jetzt die Integrationen nach x aus, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\int_0 du \frac{1}{\sqrt{1-2u}}\, l \left(\frac{\sqrt{1-2u}}{a} + \sqrt{1 + \frac{1-2u}{a^2}} \right)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 du \frac{1}{\sqrt{2u-1}} \text{ Arcsin } \frac{\sqrt{2u-1}}{a}.$$

Durch Substitution von $1-2u = v$ im ersten, und $2u-1 = w$ im zweiten Integrale wird hieraus noch:

$$\int_0^1 dv\, l\left(\frac{v}{a}+\sqrt{1+\frac{v^2}{a^2}}\right)+\int_0^1 dw \operatorname{Arcsin}\frac{w}{a},$$

und die Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit dem in No. (20) verzeichneten ist leicht dadurch nachzuweisen, dass man die noch übrigen Integrationen nach x, v und w ausführt, was mit Hülfe von Reduktionsformeln und des Princips partieller Integration keine Schwierigkeiten hat.

§ 28.

Fälle der Diskontinuität.

Wir haben bereits erwähnt, dass in einem Doppelintegrale wie:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt \qquad (1)$$

die Anordnung der Integrationen nicht mehr der Willkühr überlassen bleibt, sobald $f(x,t)$ nicht endlich und stetig bleibt von $x=a$ bis $x=b$ und gleichzeitig von $t=\alpha$ bis $t=\beta$. Dass in der That in den Fällen, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist, sehr verschiedene Resultate zum Vorschein kommen können, jenachdem man die Aufeinanderfolge der Integrationen ändert, geht leicht aus einzelnen Beispielen hervor. So hat man z. B.

$$\int_0^c dx \int_0^1 \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dt = \int_0^c dx\,\frac{1}{x^2+1} = \operatorname{Arctan} c.$$

Dagegen bei umgekehrter Anordnung:

$$-\int_0^1 dt \int_0^c \frac{(t^2-x^2)}{(t^2+x^2)^2}\,dx = -\int_0^1 dt\,\frac{c}{t^2+c^2} = -\operatorname{Arctan}\frac{1}{c},$$

und diess sind allerdings zwei sehr verschiedene Resultate, aber man

*) Die hier ausgeführte Integration nach t, so wie die später nach x bewerkstelligte gründen sich auf die Formel:

$$\int \frac{k^2-r^2}{(k^2+r^2)^2}\,dr = \frac{r}{k^2+r^2} + C.$$

durfte auch nicht übersehen, dass es ein paar Werthe von x und t giebt, für welche

$$f(x,t) = \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2}$$

unendlich wird, und zwar geschieht diess für die noch innerhalb der Integrationsintervalle liegenden Werthe $x = 0$, $t = 0$. Man kann nun verlangen, dass die Differenz zwischen den beiden verschiedenen Resultaten angegeben werde, welche die Integrationen

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt \text{ und } \int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(x,t)\,dx$$

in dem Falle zum Vorschein bringen, wo die Funktion $f(x,t)$ für eines oder mehrere in den Integrationsintervallen begriffene Werthsysteme von x und t unendlich oder diskontinuirlich oder beides zugleich werden. Diese Aufgabe ist auf folgende Weise leicht zu lösen. Wir nehmen vorerst an, die Funktion $f(x,t)$ werde diskontinuirlich für $x=k$ (zwischen a und b) und einen weiter nicht in Frage kommenden Werth von t (zwischen α und β). Dann können wir das unter (1) verzeichnete Integral in

$$\int_a^k dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt + \int_k^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt$$

zerlegen, und diess als den Gränzwerth ansehen, welchem sich der Ausdruck

$$\int_a^{k-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt + \int_{k+\varepsilon}^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt$$

für bis zur Null abnehmende ε nähert. Setzen wir für jetzt aber ε noch als positive von Null verschiedene Grösse voraus, so wird $f(x,t)$ in keinem der vorstehenden Doppelintegrale diskontinuirlich, weil im ersten Integrale immer $x < k - \varepsilon$ und im zweiten $x > k + \varepsilon$ ist, folglich der Werth $x = k$ gar nicht vorkommt. Mithin ist in jedem dieser Doppelintegrale die Umkehrung der Integrationsordnung erlaubt und die Summe in (2) gleich der folgenden:

$$\int_\alpha^\beta dt \int_a^{k-\varepsilon} f(x,t)\,dx + \int_\alpha^\beta dt \int_{k+\varepsilon}^b f(x,t)\,dx. \qquad (3)$$

Setzen wir weiter $\int f(x,t)\,dx = F(x,t) + C$, so haben wir, weil $f(x,t)$ continuirlich bleibt, von $x=a$ bis $x=k-\varepsilon$ und von $x=k+\varepsilon$ bis $x=b$

$$\int_a^{k-\varepsilon} f(x,t)\,dx = F(k-\varepsilon,t) - F(a,t),$$

$$\int_{k+\varepsilon}^b f(x,t)\,dx = F(b,t) - F(k+\varepsilon,t);$$

folglich ist die Summe in Nro. (3) gleich

$$\int_\alpha^\beta dt[F(k-\varepsilon,t) - F(a,t)] + \int_\alpha^\beta dt[F(b,t) - F(k+\varepsilon,t)]$$

$$= \int_\alpha^\beta dt[F(b,t) - F(a,t)] + \int_\alpha^\beta dt[F(k-\varepsilon,t) - F(k+\varepsilon,t)] \quad (4)$$

Hier ist nun das erste Integral nichts Anderes, als Dasjenige, was man bekommt, wenn man in dem Doppelintegrale

$$\int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(x,t)\,dx$$

die Integration nach x ohne alles Weitere ausführt, und daher haben wir durch Vergleichung von (2) mit (4)

$$\int_a^{k-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt + \int_{k+\varepsilon}^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(x,t)\,dt + \int_\alpha^\beta dt[F(k-\varepsilon,t) - F(k+\varepsilon,t)],$$

und wenn wir jetzt ε bis zur Gränze Null abnehmen lassen

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt = \int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(x,t)\,dx \\ + \operatorname{Lim} \int_\alpha^\beta [F(k-\varepsilon,t)] - F(k+\varepsilon,t)]\,dt \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

d. h. die Resultate der in verschiedener Reihenfolge ausgeführten Integrationen differiren von einander um den singulären Werth eines bestimmten Integrales, worin $F(x,t) = \int f(x,t)\,dx$ ist. — Erleidet $f(x,t)$ mehrere Unterbrechungen der Continuität für die zwischen a und b lie-

genden Werthe $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ und gewisse zugehörige, in dem Intervalle α bis β begriffene Werthe von t, so würde man die nämlichen Schlüsse wie vorhin mehrmals anwenden, indem man das Integral in (1) als Gränzwerth von

$$\int_a^{k_1-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt + \int_{k_1+\varepsilon}^{k_2-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt + \int_{k_2+\varepsilon}^{k_3-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt + \ldots$$

$$\ldots + \int_{k_n-\varepsilon}^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt$$

ansähe und man würde ebenso leicht finden

$$\left.\begin{aligned}\int_a dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt &= \int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(x,t)\,dx \\ &+ \operatorname{Lim} \int_\alpha^\beta [F(k_1-\varepsilon,t) - F(k_1+\varepsilon,t)]\,dt \\ &+ \operatorname{Lim} \int_\alpha^\beta [F(k_2-\varepsilon,t) - F(k_2+\varepsilon,t)]\,dt \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \operatorname{Lim} \int_\alpha^\beta [F(k_n-\varepsilon,t) - F(k_n+\varepsilon,t)]\,dt\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wobei ebenso viele singuläre Werthe hinzuzusetzen sind, als es Unterbrechungen der Continuität oder Endlichkeit giebt und $F(x,t)$ die obige Bedeutung besitzt.

Um diess an einem Beispiele zu zeigen, betrachten wir das Doppelintegral

$$\int_{-c}^c dx \int_0^\gamma \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \varphi(t)\,dt,$$

worin $\varphi(t)$ eine willkührliche Funktion von t bezeichnet. Hier ist durch Umkehrung der Integrationsfolge

$$\int_0^\gamma dt \int_{-c}^c \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \varphi(t)\,dt = -\int_0^\gamma \varphi(t)\,dt \int_{-c}^c \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}\,dx$$

$$= -\int_0^\gamma \varphi(t)\,dt \frac{2c}{t^2+c^2};$$

ferner wird die Funktion

$$f(x,t)=\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\varphi(t)$$

unendlich für das System von Werthen $x=0$, $t=0$, mithin ist $k=0$ und

$$F(x,t)=\int f(x,t)\,dt=-\varphi(t)\frac{x}{t^2+x^2},$$

folglich nach Nro. (5)

$$\left.\begin{aligned}\int_{-c}^{c}dx\int_0^\gamma \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\varphi(t)\,dt &= -\int_0^\gamma \varphi(t)\,dt\frac{2c}{c^2+t^2}\\ &+\text{Lim}\int_0^\gamma \varphi(t)\,dt\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Die Lim. auf der rechten Seite bestimmt sich auf folgende Weise. Wenn $\varphi'(t)$ stetig und endlich bleibt von $t=0$ bis $t=\gamma$, so ist für alle diese Werthe von t

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(\lambda t)\ ,\ 1>\lambda>0,$$

mithin

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\gamma \varphi(t)\,dt\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2} &= \varphi(0)\int_0^\gamma \frac{2\varepsilon dt}{\varepsilon^2+t^2}+\int_0^\gamma \frac{2\varepsilon t dt}{\varepsilon^2+t^2}\varphi'(\lambda t)\\ &= \varphi(0)\,2\,\text{Arctan}\,\frac{\gamma}{\varepsilon}+\int_0^\gamma \frac{2\varepsilon t dt}{\varepsilon^2+t^2}\varphi'(\lambda t)\end{aligned}\right\}(8)$$

Da nun $\varphi'(t)$ endlich und stetig bleibt von $t=0$ bis $t=\gamma$, so sind das Maximum und Minimum, welche $\varphi'(t)$ während des genannten Intervalles erlangt, gewiss endliche Grössen. Heissen diese A' und B', so ist für das ganze Intervall $\varphi'(t)\leqq A'$ und $\varphi'(t)\geqq B'$, und da λt so wie t selbst innerhalb des Intervalles 0 bis γ liegt, auch

$$\varphi'(\lambda t)\leqq A'\ ,\ \varphi'(\lambda t)\geqq B'.$$

Da ferner der Faktor $\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}$ sein Vorzeichen nicht ändert, so folgt nach einem schon früher erwähnten Satze, dass das Integral

$$2\varepsilon\int_0^\gamma \frac{tdt}{\varepsilon^2+t^2}\varphi'(\lambda t)$$

zwischen den Gränzen

$$2\varepsilon A'\int_0^\gamma \frac{tdt}{\varepsilon^2+t^2}=A'\left[\varepsilon l(\varepsilon^2+\gamma^2)-\varepsilon l(\varepsilon^2)\right]$$

und

$$2\varepsilon B' \int_0^{\gamma} \frac{tdt}{\varepsilon^2 + t^2} = B' [\varepsilon l(\varepsilon^2 + \gamma^2) - \varepsilon l(\varepsilon^2)]$$

enthalten ist. Es nähern sich aber, wie leicht zu sehen ist, die Grössen $\varepsilon l(\varepsilon^2+\gamma^2)$ und $\varepsilon l(\varepsilon^2)$ mit ε gleichzeitig der Gränze Null, und hieraus folgt, dass für unendlich abnehmende ε

$$\text{Lim}\, 2\varepsilon \int_0^{\gamma} \frac{tdt}{\varepsilon^2 + t^2} \varphi'(\lambda t)$$

zwischen 0 und 0 liegt, also selbst $=0$ ist. Aus Nro. 8. ergiebt sich jetzt wegen Lim. Arctan $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \text{Arctan}\,\infty = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{Lim} \int_0^{\gamma} \varphi(t)\, dt \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2} = \pi \varphi(0),$$

und wenn wir diess für die Gleichung (7) benutzen, so gelangen wir zu der Relation

$$\int_{-c}^{c} dx \int_0^{\gamma} \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \varphi(t)\, dt = \pi \varphi(0) - \int_0^{\gamma} \varphi(t)\, dt \frac{2c}{c^2 + t^2} \tag{9}$$

wozu man leicht zahlreiche Beispiele finden wird.

Die Betrachtung, auf welche sich die Formel (5) stützt, bedarf übrigens noch in dem Falle einer kleinen Modifikation, wo der Werth k, für den $f(x,t)$ unstetig oder unendlich wird, nicht zwischen a und b liegt, sondern einer der Integrationsgränzen gleich ist. Denn hier würde es unpassennd sein, für $k=a$ den Werth $k-\varepsilon=a-\varepsilon$ oder wenn $k=b$ ist, den Werth $k+\varepsilon=b+\varepsilon$ in die Rechnung einzuführen, da x die Integrationsgränzen nicht überschreiten, folglich gar nicht $=a-\varepsilon$ oder $=b+\varepsilon$ werden kann. Ist nun $k=a$, so setzt man einfach

$$\int_a^b dx \int_a^{\beta} f(x,t)\, dt = \text{Lim} \int_{a+\varepsilon}^b dx \int_a^{\beta} f(x,t)\, dt,$$

und findet nun durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite für $\int f(x,t)\, dx = F(x,t) + C$

$$\int_a^b dx \int_a^{\beta} f(x,t)\, dt = \int_a^{\beta} F(b,t)\, dt - \text{Lim} \int_a^{\beta} F(a+\varepsilon, t)\, dt \tag{10}$$

Ebenso wenn $k=b$ wäre, setzt man

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt = \text{Lim} \int_a^{b-\varepsilon} dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt$$

und erhält ebenso leicht

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt = \text{Lim} \int_\alpha^\beta F(b-\varepsilon,t)\,dt - \int_\alpha^\beta F(a,t)\,dt \quad (11)$$

Als Beispiel für die Formel (10) kann man das Doppelintegral

$$\int_0^c dx \int_0^\gamma \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\varphi(t)\,dt$$

benutzen, wo das Unendlichwerden von $f(x,t)$ für $x=0, t=0$ eintritt, also $k=a=0$ ist. Es hat dann $F(x,t)$ denselben Werth wie im vorigen Beispiele, und demnach ergiebt sich

$$\int_0^c dx \int_0^\gamma \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\varphi(t)\,dt = -\int_0^\gamma \frac{c\varphi(t)\,dt}{t^2+c^2}$$
$$+ \text{Lim} \int_0^\gamma \frac{\varepsilon\varphi(t)\,dt}{t^2+\varepsilon^2},$$

d. i. weil wir den Gränzwerth rechts schon bestimmt haben,

$$\int_0^c dx \int_0^\gamma \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\varphi(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\varphi(0) - \int_0^\gamma \frac{c\varphi(t)\,dt}{c^2+t^2}, \quad (12)$$

und diess stimmt mit dem unter (9) erhaltenen Resultate überein, da für

$$\int_0^\gamma \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\varphi(t)\,dt = \psi(x^2)$$

die Gleichung

$$\int_{-c}^c \psi(x^2)\,dx = 2\int_0^c \psi(x^2)\,dx$$

statt finden muss. Bemerkenswerth ist noch der Fall $c=\infty$. Da nämlich $\varphi'(t)$ endlich und stetig bleibt von $t=0$ bis $t=\gamma$, so ist diess mit $\varphi(t)$ selbst der Fall und folglich sind das Maximum und Minimum, welche $\varphi(t)$ innerhalb dieses Intervalles annimmt, endliche Grössen. Bezeichnen wir sie mit A und B, so liegt der Werth des Integrales

$$\int_0^c \frac{c\varphi(t)\,dt}{c^2+t^2}$$

zwischen den Gränzen

$$A\int_0^\gamma \frac{c\,dt}{c^2+t^2} = A\,.\,\text{Arctan}\,\frac{\gamma}{c}$$

und

$$B\int_0^\gamma \frac{cdt}{c^2+t^2}=B.\operatorname{Arctan}\frac{\gamma}{c}.$$

Beide Grössen convergiren aber, wenn c unbegränzt wächst, gleichzeitig gegen die Null, folglich ist auch

$$\operatorname{Lim}\int_0^\gamma \frac{c\varphi(t)\,dt}{c^2+t^2}=0,$$

und wenn wir diess für die Gleichung (12) benutzen, so ergiebt sich jetzt

$$\int_0^\infty dx\int_0^\gamma \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\varphi(t)\,dt=\frac{\pi}{2}\varphi(0),$$

oder wenn man u für x schreibt und nachher $\varphi(t)=f(x+t)$ setzt, wo x als willkührliche Constante für beide Integrationen gilt

$$\int_0^\infty du\int_0^\gamma \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}f(x+t)dt=\frac{\pi}{2}f(x). \qquad (13)$$

Dieses Theorem bietet ein schönes Beispiel zu der in der Lehre von den bestimmten Integralen nicht seltenen Erscheinung, dass sich zwei auf einander folgende Integrationen gegenseitig gewissermassen so weit aufheben, dass ihr Gesammtresultat eine willkührliche Funktion darstellt, deren Variable als arbiträre Constante in dem Doppelintegrale figurirte. Hier findet noch die Eigenthümlichkeit statt, dass der Werth des Integrales unabhängig von der Grösse γ ist, mithin die letztere willkührlich gewählt werden darf, wenn nur $f'(x+t)$ stetig und endlich bleibt, sobald t das Intervall 0 bis γ durchläuft.

§ 29.

Doppelintegrale mit variablen Gränzen.

Bisher haben wir die Integrationsgränzen für die zwei auf einander folgenden Integrationen als unabhängig von einander vorausgesetzt und wir sahen, dass in diesem Falle die Umkehrung der Integrationsfolge ein Hauptmittel zur Reduktion des Doppelintegrales auf ein einfaches Integral bildete. Dieser Vortheil geht aber verloren, sobald die Integrationsgränzen von einander abhängig sind, denn in einem Integrale von der Form

$$S=\int_a^b dx\int_{\psi(x)}^{\chi(x)} f(x,y)\,dy \tag{1}$$

ist die Aufeinanderfolge der Integrationen durch die Bedingung, dass nach Ausführung der auf y bezogenen Integration $y=\chi(x)$ und $y=\psi(x)$ gesetzt werden soll, ganz unabänderlich vorgeschrieben. Wir müssen daher zunächst unser Augenmerk auf Transformationen richten, durch welche dem Integrale constante Gränzen verschafft werden, weil dann die Anordnung der Integrationen eine willkührliche ist. Nun haben wir aber zunächst

$$S=\int_0^b dx\int_{\psi(x)}^{\chi(x)} f(x,y)\,dy-\int_0^a dx\int_{\psi(x)}^{\chi(x)} f(x,y)\,dy,$$

und wenn wir ferner

$$\int_{\psi(x)}^{\chi(x)} f(x,y)\,dy \text{ in} \int_0^{\chi(x)} f(x,y)\,dy-\int_0^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

zerlegen, so zerfällt S in die vier Integrale

$$S=\int_0^b dx\int_0^{\chi(x)} f(x,y)\,dy-\int_0^b dx\int_0^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$
$$-\int_0^a dx\int_0^{\chi(x)} f(x,y)\,dy+\int_0^a dx\int_0^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,$$

welche sämmtlich unter der gemeinschaftlichen Form

$$T=\int_0^c dx\int_0^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy \tag{2}$$

stehen, und hierauf können wir jetzt unsere Betrachtungen beschränken.

I. Die erste Transformation besteht sehr einfach darin, dass man für y eine neue Variable t einführt, welche mit y durch die Gleichung $y=\varphi(x)t$ verbunden ist, worin $\varphi(x)$ wie x selbst als constanter Faktor für die nach t zu verrichtende Integration erscheint. Die Integrationsgränzen für t ergeben sich aus den Gleichungen $0=y=\varphi(x)t$ und $\varphi(x)=y=\varphi(x)t$, sie sind nämlich $t=0$ und $t=1$. Mithin wird jetzt

$$T=\int_0^c dx\int_0^1 f[x,\varphi(x)t]\,\varphi(x)\,dt,$$

und da hier die Integrationsgränzen sämmtlich constant sind, so ist

unter der Voraussetzung, dass $f[x,\varphi(x)t]\varphi(x)$ von $x=0$ bis $x=c$ und $t=0$ bis $t=1$ endlich und stetig bleibt, die Umkehrung der Integrationsfolge erlaubt, wobei es sich häufig treffen kann, dass in der nunmehrigen Form

$$T=\int_0^1 dt\int_0^c f[x,\varphi(x)t]\varphi(x)\,dx$$

die Integration nach x ausführbar wird. — Ein Beispiel hierzu giebt das Integral

$$T=\int_0^\infty dx\int_0^{\sqrt{1+x^2}}\frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)},$$

worin sich die Integration nach y nicht in geschlossener Form ausführen lässt, da wir keine Integralformel für

$$\int\frac{dy}{\sqrt{k+y^2}}\,e^{-\beta^2y^2}$$

besitzen. Substituirt man nun in T den Ausdruck $y=\sqrt{1+x^2}\,t$, so ergiebt sich sogleich

$$T=\int_0^\infty dx\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\,e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2t^2+\beta^2x^2t^2)},$$

und durch Umkehrung der Integrationenfolge

$$T=\int_0^1 dt\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{1+t^2}}\,e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2t^2+\beta^2x^2t^2)}$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\,e^{-\beta^2t^2}\int_0^\infty dx\,e^{-(\alpha^2+\beta^2t^2)x^2}$$

d. i. wenn man die Integration in Beziehung auf x vollendet

$$T=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(\alpha^2+\beta^2t^2)}}\,e^{-\beta^2t^2},$$

und hiermit ist das Doppelintegral auf ein einfaches zurückgeführt.

II. Für die zweite Transformationsmethode setzen wir $c=1$ und etwa

$$U=\int_0^1 dx\int_0^{\varphi(x)}f(x,y)\,dy.$$

Diese Annahme hat durchaus nichts Beschränkendes, denn für $x=c\xi$ geht das Integral (2) in

$$T=c\int_0^1 d\xi\int_0^{\varphi(c\xi)} f(c\xi,y)\,dy$$

über, und wenn man statt ξ wieder x, statt $\varphi(c\xi)$ kurz $\varphi(\xi)=\varphi(x)$ und statt $f(c\xi,y)$ schreibt $f(\xi,y)=f(x,y)$, so kommt das Integral T seiner Form nach mit U überein. Kennt man nun eine allgemeinere Funktion $\varphi(r,x)$, welche so beschaffen ist, dass sie für $r=1$ in die gegebene $\varphi(x)$, dagegen für $x=r$ in Null übergeht*), so geht U aus dem allgemeineren Integrale

$$R=\int_0^r dx\int_0^{\varphi(r,x)} f(x,y)\,dy \qquad (4)$$

durch die Spezialisirung $r=1$ hervor. Setzen wir noch

$$\int_0^{\varphi(r,x)} f(x,y)\,dy = F(r,x), \qquad (5)$$

mithin

$$R=\int_0^r F(r,x)\,dx, \qquad (6)$$

so ergiebt sich jetzt durch partielle Differenziation in Beziehung auf die willkührliche Constante r

$$\frac{dR}{dr}=F(r,r)+\int_0^r\left[\frac{dF(r,x)}{dr}\right]dx. \qquad (7)$$

Nach No. (5) ist aber

$$F(r,r)=\int_0^{\varphi(r,r)} f(x,y)\,dy$$

oder, weil wir voraussetzen, dass $\varphi(r,r)=0$ sei,

$$F(r,r)=\int_0^0 f(x,y)dy=0;$$

*) Es ist meistentheils nicht schwer, eine solche allgemeinere Funktion $\varphi(r,x)$ aufzutreiben. Für $\varphi(x)=lx$ z. B. setze man $\varphi(r,x)=l\left(\frac{x}{r}\right)$, dann sind in der That die Bedingungen $\varphi(1,x)=\varphi(x)$ und $\varphi(r,r)=0$ erfüllt.

Ferner haben wir durch partielle Differenziation der Gleichung (5)

$$\left[\frac{dF(r,x)}{dr}\right] = f[x,\varphi(r,x)]\left[\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right]$$

und wenn wir diess nebst dem Werthe $F(r,r) = 0$ in die Gleichung (7) substituiren, so ergiebt sich:

$$\frac{dR}{dr} = \int_0^r f[x,\varphi(r,x)]\left[\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right]dx,$$

mithin

$$R = \int dr \int_0^r f[x,\varphi(r,x)]\left[\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right]dx + C.$$

Setzt man nun $r = 1$, $r = 0$, subtrahirt diese beiden Werthe von einander und berücksichtigt, dass für $r=1$, $R=U$ und für $r=0$, $R=0$ wird, wie man sogleich aus no. (4) erkennt, so folgt vermöge der Bedeutung von U:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy\\ &= \int_0^1 dr \int_0^r f[x,\varphi(r,x)]\left[\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right]dx.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Es ist nicht schwer, hier auch der ersten Integration die Gränzen 0 und 1 zu verschaffen, man braucht nur nach Ausführung der durch $\left[\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right]$ angedeuteten partiellen Differenziation statt x eine neue Variable t einzuführen, welche mit x durch die Gleichung $x = rt$ also $dx = rdt$ verbunden ist.

Eine ziemlich allgemeine Anwendung hiervon liefert die Annahme $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$; wir setzen dann $\varphi(r,x) = \sqrt{r^2-x^2}$, wodurch die Bedingungen $\varphi(1,x) = \varphi(x)$ und $\varphi(r,r) = 0$ erfüllt werden, und haben jetzt

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\\ &= \int_0^1 dr \int_0^r f(x,\sqrt{r^2-x^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx\end{aligned}$$

oder für $x = rt$:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 r dr \int_0^1 f(rt, r\sqrt{1-t^2}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (9)$$

Bleibt die Funktion

$$\frac{f(rt, r\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}}$$

endlich und stetig von $r = 0$ bis $r = 1$ und $t = 0$ bis $t = 1$, so giebt die Umkehrung der Integrationsordnung

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_0^1 f(rt, r\sqrt{1-t^2})\, r dr. \quad (10)$$

Um hiervon einen speziellen Fall zu haben, setzen wir

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1-\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2}{1-x^2-y^2}};$$

es wird dann nach No. (9):

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{\frac{1-\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2}{1-x^2-y^2}}$$

$$= \int_0^1 r dr \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\beta^2 r^2 t^2 - \alpha^2 r^2 (1-t^2)}{1-r^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

und dabei können wir die Integrationsordnung umkehren, wenn wir die Werthe $r = 1$ und $t = 1$ dadurch vermeiden, dass wir statt der oberen Integrationsgränzen vorläufig eine Zahl $\varepsilon < 1$ substituiren. Es ist dann die rechte Seite

$$= \int_0^\varepsilon \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{1-[\beta^2 t^2 + \alpha^2 (1-t^2)] r^2}{1-r^2}}\, r dr.$$

Hier ist die Integration nach r ausführbar; denn nehmen wir zur Abkürzung

$$\alpha^2 (1-t^2) + \beta^2 t^2 = u^2$$

und führen die Variable $z = r^2$ ein, für welche $dz = 2 r dr$ wird, so geht unser Doppelintegral in:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^{\sqrt{z}}\sqrt{\frac{1-u^2z}{1-z}}\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1-u^2z}{\sqrt{(1-z)(1-u^2z)}}\,dz$$

über. Vollendet man die Integration nach z und lässt darauf ε gegen die Einheit convergiren, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\left[1+\frac{1-u^2}{2u}\,l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1-u^2}{u}\,l\left(\frac{1+u}{1-u}\right),$$

wo statt u sein durch die Gleichung (12) bestimmter Werth zu setzen wäre. Behält man aber u sogleich als neue Variable bei, drückt t durch u aus, nämlich:

$$t=\sqrt{\frac{u^2-\alpha^2}{\beta^2-u^2}}$$

und leitet hieraus $dt:\sqrt{1-t^2}$ ab, so ergiebt sich zuletzt:

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\sqrt{\frac{1-\beta^2x^2-\alpha^2y^2}{1-x^2-y^2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1-u^2}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(\beta^2-u^2)}}\,l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)du.$$

Das Integral zur Rechten ist aber mit dem im §. 26. betrachteten identisch und daher haben wir zufolge der dort vorgenommenen Transformation

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\sqrt{\frac{1-\beta^2x^2-\alpha^2y^2}{1-x^2-y^2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{dr}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}$$

$$+\frac{\pi}{4}\int_0^1\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2r^2)(1-\beta^2r^2)}}\right]\frac{dr}{r^2},$$

und obgleich sich der Werth der rechten Seite nicht unmittelbar in ge-

schlossener Form angeben lässt, so wird doch kein Zweifel über die Wichtigkeit und Brauchbarkeit der ausgeführten Reduktion obwalten*)

§ 30.

Transformation vielfacher Integrale.

Eines der durchgreifendesten Mittel zur Reduktion vielfacher Integrale auf einfache, es mögen jene constante oder variable Gränzen besitzen, bildet die Einführung neuer Variablen statt der früheren, in Beziehung auf welche ursprünglich integrirt werden sollte. Ehe wir aber die allgemeine Untersuchung vornehmen, die uns eine Regel für die erwähnte Substitution an die Hand geben wird, wollen wir erst ein paar Worte über die Transformation der einfacheren Integrale vorausschicken.

Will man in das Integral

$$\int_a^b F(x)\,dx$$

eine neue Variable ξ einführen, welche mit der früheren x durch die Gleichung $f(x,\xi)=0$ verbunden ist, so kann man einen doppelten Weg einschlagen. Entweder löst man die Gleichung erst nach x auf, wodurch man ein Resultat von der Form $x=\psi(\xi)$ erhält, und hat dann $dx=\psi'(\xi)\,d\xi$, folglich $F(x)\,dx=F[\psi(\xi)]\,\psi'(\xi)\,d\xi$, worauf man die für ξ geltenden Integrationsgränzen aus den Gleichungen $f(a,\xi)=0$ und $f(b,\xi)=0$ bestimmt, oder man differenzirt die Gleichung $f(x,\xi)=0$ total in Bezug auf x und ξ, woraus

$$D_x f(x,\xi)\,.\,dx + D_\xi f(x,\xi)\,.\,d\xi=0$$

folgt, und hat dann

*) Die direkteste Methode zur Reduktion vielfacher Integrale auf einfache, die in ihrem Principe ebenso natürlich als leicht in der Ausführung ist, konnte hier nicht mitgetheilt werden, weil sie die Theorie der Fourier-schen Integrale voraussetzt. M. s. hierüber das zweite Heft meiner „Analytischen Studien.“

$$dx = -\frac{D_\xi f(x,\xi)}{D_x f(x,\xi)} d\xi,$$

und hier kann man nachträglich den Werth $x=\psi(\xi)$ substituiren. Die letztere Methode ist nun die einzige, welche eine allgemeinere Anwendung gestattet sobald man die Aufgabe umfassender stellt.

Hat man statt der Variabeln x und y in dem Doppelintegrale

$$\int\int F(y,x)\,dy\,dx,$$

worin die erste Integration in Beziehung auf x geschieht und die Gränzen einstweilen noch unbestimmt gelassen sind, zwei neue Variable ξ und η einzuführen, welche mit x und y durch die Gleichungen

$$x=f_1(\xi,\eta),\, y=f_2(\xi,\eta) \qquad (2)$$

liirt sind, so muss man sich zuerst darüber entscheiden. auf welche von den neuen Variablen die erste Integration des neuen Doppelintegrales bezogen werden soll. Wählen wir hierzu ξ, verlangen wir also, dass das transformirte Integral die Form

$$\int\int \Phi(\eta,\xi)\,d\eta\,d\xi$$

haben solle, so müssen wir zunächst dx durch $d\xi$ dergestalt ausdrücken, dass $dx=\Omega d\xi$ wird, wo Ω von ξ und η abhängt. Da in (1) zuerst nach x integrirt wird, so ist y vorerst als constant anzusehen und die Gleichungen (2) enthalten demnach 3 variable Grössen x, ξ, η. Man erhält zunächst, wenn man $f_1(\xi,\eta)$ und $f_2(\xi,\eta)$ kurz mit f_1 und f_2 bezeichnet, durch Differenziation der Gleichungen (2) in Bezug auf x, ξ, η

$$dx=\left(\frac{df_1}{d\xi}\right)d\xi+\left(\frac{df_1}{d\eta}\right)d\eta,$$

$$0=\left(\frac{df_2}{d\xi}\right)d\xi+\left(\frac{df_2}{d\eta}\right)d\eta,$$

oder nach einer compendiöseren Bezeichnung der partiellen Differenzialquotienten

$$dx=D_\xi f_1 . d\xi + D_\eta f_1 . d\eta,$$

$$0=D_\xi f_2 . d\xi + D_\eta f_2 . d\eta.$$

In dem für dx gesuchten Ausdrucke $\Omega d\xi$ darf aber $d\eta$ nicht vorkommen, weil die Integration nach ξ die erste, der früheren nach x entsprechende ist, und diese natürlich unabhängig von den folgenden

Integrationen sein muss; wir eliminiren daher $d\eta$ aus den vorstehenden zwei Gleichungen und erhalten

$$D_\eta f_2 . dx = (D_\xi f_1 . D_\eta f_2 - D_\xi f_2 . D_\eta f_1) d\xi$$

oder

$$dx = \frac{D_\xi f_1 . D_\eta f_2 - D_\xi f_2 . D_\eta f_1}{D_\eta f_2} d\xi.$$

Wir haben nun noch die für dy eintretende Substitution aufzusuchen. Nachdem aber in Bezug auf x früher und jetzt in Beziehung auf ξ integrirt worden ist, bleibt dort noch eine Variable y und hier ebenfalls nur die eine η übrig; alles Andere, also x und ξ, muss jetzt in den Gleichungen (2) als constant angesehen werden. Differenzirt man mit dieser Rücksicht die zweite der Gleichungen (2) in Bezug auf y und η, so wird

$$dy = D_\eta f_2 . d\eta,$$

und diess giebt mit dem Vorigen zusammen

$$dxdy = (D_\xi f_1 . D_\eta f_2 - D_\xi f_2 . D_\eta f_1) d\xi d\eta.$$

Setzen wir endlich statt $F(y,x)$

$$F[f_2(\xi,\eta), f_1(\xi,\eta)] = \Phi(\eta,\xi),$$

so ergiebt sich die Reduktionsformel

$$\left.\begin{aligned} &\int\int F(y,x)\, dydx \\ = &\int\int \Phi(\eta,\xi) (D_\xi f_1 . D_\eta f_2 - D_\xi f_2 . D_\eta f_1) d\eta d\xi \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Um den Gebrauch derselben an einem Beispiele zu zeigen, substituiren wir in

$$\int_0^k \int_0^{k-y} F(y+x)\, dy\, dx = \int_0^k dy \int_0^{k-y} F(y+x)\, dx \quad (4)$$

$x = \xi\eta, y = \xi(1-\eta)$. Es wird dann für $f_1 = \xi\eta, f_2 = \xi - \xi\eta$

$$dy\, dx = [-\eta\xi - (1-\eta)\xi]\, d\eta d\xi = -\xi d\eta d\xi;$$

ferner, weil hier $y + x = \xi$ wird, das Integra in (4) gleich

$$-\int\int F(\xi)\, \xi d\eta\, d\xi = -\int d\eta \int F(\xi)\, \xi d\xi,$$

wo noch die Integrationsgränzen zu bestimmen sind. Nun waren dieselben für x, $x = 0$ und $x = k - y$, mithin haben wir in Bezug auf ξ

$$dx = -\frac{D_\xi f(x,\xi)}{D_x f(x,\xi)} d\xi,$$

und hier kann man nachträglich den Werth x … letztere Methode ist nun die einzige, wel… wendung gestattet sobald man die Aufg… … ich in

Hat man statt der Variabeln x … ehener

$$\int\int F(y,x \ldots \quad \ldots -\eta)=0$$

worin die erste Integration in B… zen einstweilen noch unbesti… ξ und η einzuführen, welche …

$$x \ldots$$

liirt sind, so muss m… von den neuen Vari… … man $f''(\xi)$ an die Stelle grales bezogen wer… … $r(y+x)$ setzt und dann die Inte- dass das transfor…

…un den allgemeinen Fall, worin es sich darum …tegrale

haben soll…

$$S=\int\int\int \ldots F(t,s,\ldots z,y,x)\, dt\, ds \ldots dz\, dy\, dx \tag{5}$$

dass dx … nach x … geschrieben Gleic… erh…

$$S=\int\int\int \ldots F\, dt\, ds \ldots dz\, dy\, dx,$$

statt der n Variablen $x, y, z, \ldots s, t$, in Bezug auf welche in der Reihe, wie sie genannt sind, integrirt wird, die n Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \ldots \sigma, \tau$ einzuführen, die mit jenen durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} x=f_0(\xi,\eta,\zeta,\ldots\tau)\ ,\ y=f_1(\xi,\eta,\zeta,\ldots\tau),\ldots \\ t=f_{n-1}(\xi,\eta,\zeta,\ldots\tau) \end{array}\right\} \tag{6}$$

verbunden sind. — Nennen wir zunächst Φ Das, was aus F wird, wenn man die genannten Substitutionen vornimmt, und setzen $dt\, ds \ldots dy\, dx = \Omega\, d\tau\, d\sigma \ldots d\eta\, d\xi$, so ist

$$S=\int\int\int \ldots \Phi\Omega\, d\tau\, d\sigma \ldots d\zeta\, d\eta\, d\xi \tag{7}$$

und hier handelt es sich noch um die Bestimmung von Ω.

Da die erste Integration in (5) nach x geschieht, so sind zunächst $y, z, \ldots t$ als Constanten anzusehen und mithin enthalten die Gleichungen (6) die $n+1$ Variablen $x, \xi, \eta, \ldots \tau$. Durch Differenziation der genannten Gleichungen in Beziehung auf diese Variablen ergibt sich nun

$$\begin{aligned} dx &= D_\xi f_0 . d\xi + D_\eta f_0 . d\eta + D_\zeta f_0 . d\zeta + \ldots + D_\tau f_0 . d\tau \\ 0 &= D_\xi f_1 . d\xi + D_\eta f_1 . d\eta + D_\zeta f_1 . d\zeta + \ldots + D_\tau f_1 . d\tau \\ 0 &= D_\xi f_2 . d\xi + D_\eta f_2 . d\eta + D_\zeta f_2 . d\zeta + \ldots + D_\tau f_2 . d\tau \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= D_\xi f_{n-1} . d\xi + D_\eta f_{n-1} . d\eta + D_\zeta f_{n-1} . d\zeta + \ldots + D_\tau f_{n-1} . d\tau \end{aligned}$$

und aus diesen n Gleichungen wären nun alle mit $d\eta$, $d\zeta, \ldots$ versehenen Glieder herauszuschaffen. Diess geschieht mittelst eines Satzes, welcher folgendermassen lautet: wenn unter n Unbekannten X, Y, $Z \ldots T$ die n linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 X + b_0 Y + c_0 Z + \ldots + h_0 T &= k_0 \\ a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \ldots + h_1 T &= k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} X + b_{n-1} Y + c_{n-1} Z + \ldots + h_{n-1} T &= k_{n-1} \end{aligned}$$

statt finden, so ist

$$X = \frac{\Sigma(\pm k_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}$$

und hier bedeutet $\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})$ die Summe aller der Glieder, welche man dadurch erhält, dass man in dem Produkte $a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}$ alle möglichen Vertauschungen der Indices vornimmt und das positive oder negative Vorzeichen zusetzt, jenachdem man eine gerade oder ungerade Anzahl von derartigen Permutationen vorgenommen hat*). Wendet man diess auf unseren Fall für $X = d\xi$, $k_0 = dx$, $k_1 = k_2 \ldots = 0$ an, so folgt unter der Rücksicht, dass für $k_1 = k_2 \ldots = 0$, offenbar $\Sigma(\pm k_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}) = k_0 \Sigma(\pm b_1 c_2 \ldots h_{n-1})$ ist:

$$d\xi = \frac{\Sigma(\pm D_\eta f_1 . D_\zeta f_2 \ldots . D_\tau f_{n-1}) . dx}{\Sigma(\pm D_\xi f_0 . D_\eta f_1 . D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}$$

oder

$$dx = \frac{\Sigma(\pm D_\xi f_0 . D_\eta f_1 . D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}{\Sigma(\pm D_\eta f_1 . D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})} d\xi. \qquad (8)$$

*) Also z. B. $\Sigma(\pm a_0 b_1) = a_0 b_1 - a_1 b_0$, $\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2) = a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0$ u. s. w. Den Beweis des obigen Satzes s. am Ende dieses Paragraphen.

In den Gleichungen (6) sind jetzt noch die n Variablen $y, \eta, \zeta, \ldots \tau$ vorhanden, da wegen der nun ausgeführten Integrationen in Beziehung auf x und ξ, diese letztern Variabeln entweder geradezu verschwunden oder als constant zu betrachten, wegen der jetzt folgenden Integration nach y aber, $z, \ldots s, t$ für Constanten anzusehen sind. Differenziren wir nun in Bezug auf $y, \eta, \zeta, \ldots \tau$ die $(n-1)$ Gleichungen $y=f_1$, $z=f_2, \ldots t=f_{n-1}$, so wird

$$dy = D_\eta f_1 . d\eta + D_\zeta f_1 . d\zeta + \ldots + D_\tau f_1 . d\tau$$
$$0 = D_\eta f_2 . d\eta + D_\zeta f_2 . d\zeta + \ldots + D_\tau f_2 . d\tau$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = D_\eta f_{n-1} . d\eta + D_\zeta f_{n-1} . d\zeta + \ldots + D_\tau f_{n-1} . d\tau$$

und hieraus findet man durch ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin:

$$dy = \frac{\Sigma(\pm D_\eta f_1 . D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}{\Sigma(\pm D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})} d\eta. \qquad (9)$$

Den Fortgang dieser Schlüsse wird man leicht übersehen. Es sind nämlich jetzt noch die $(n-1)$ Variablen $z, \zeta, \varrho, \ldots \tau$ vorhanden und wenn man die $(n-2)$ Gleichungen $z=f_2$, $r=f_3, \ldots t=f_{n-1}$ in Beziehung auf diese differenzirt und dann dz entwickelt, so findet man:

$$dz = \frac{\Sigma(\pm D_\zeta f_2 . D_\varrho f_3 \ldots D_\tau f_{n-1})}{\Sigma(\pm D_\varrho f_3 \ldots D_\tau f_{n-1})} d\zeta \qquad (10)$$

Fährt man so fort, so kommt man gegen das Ende auf die Gleichungen:

$$ds = \frac{\Sigma(\pm D_\sigma f_{n-2} . D_\tau f_{n-1})}{\Sigma(\pm D_\tau f_{n-1})} d\sigma = \frac{\Sigma(\pm D_\sigma f_{n-2} . D_\tau f_{n-1})}{D_\tau f_{n-1}} d\sigma \quad (11)$$

und zuletzt, wo nur die Variablen t und τ übrig sind, also blos noch die Gleichung $t = f_{n-1}$ zu differenziren ist:

$$dt = D_\tau f_{n-1} d\tau.$$

Multiplizirt man nun rückwärts mit einander $dt, ds, \ldots dz, dy, dx$, so hebt sich jeder Zähler gegen den darauf folgenden Nenner und es bleibt:

$$dt\, ds \ldots dz\, dy\, dx = \Sigma(\pm D_\xi f_0 . D_\eta f_1 . D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})\, d\tau\, d\sigma \ldots d\zeta\, d\eta\, d\xi,$$

oder, wenn man statt f_0, f_1, $\ldots$ f_{n-1} die ihnen gleichbedeutenden Variablen $x, y, z, \ldots t$ setzt und diese nunmehr als von $\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau$ abhängig ansieht,

$$dt\, ds \ldots dz\, dy\, dx = \Sigma(\pm D_\xi x . D_\eta y . D_\zeta z \ldots D_\tau t)\, dt\, d\sigma \ldots d\zeta\, d\eta\, d\xi,$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Glieder bezieht, welche aus dem Produkte $D_\xi x . D_\eta y \ldots D_\tau t$ durch alle möglichen Vertauschungen der Indices hervorgehen. Wir erhalten demnach jetzt die Transformationsformel:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint \ldots F dt\, ds \ldots dz\, dy\, dx \\ = &\iiint \ldots \Phi \Sigma (\pm D_\tau t . D_\sigma s \ldots D_\zeta z . D_\eta y . D_\xi x)\, d\tau\, d\sigma \ldots d\zeta\, d\eta\, d\xi \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wobei $\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau$ mit $x, y, z, \ldots t$ durch Gleichungen von der Form $x = \varphi(\xi, \eta, \ldots \tau)$, $y = \psi(\xi, \eta, \ldots \tau)$ etc. verbunden sind.

Wir kommen nun unserm Versprechen der Beweisführung für die benutzte allgemeine Eliminationsformel nach. — Wenn man unter den Grössen $a, b, c, \ldots g, h$ die Differenzen zwischen jeder derselben und allen ihren Vorgängern, also die Ausdrücke:

$$\begin{gathered} b - a \\ c - a\ ,\ c - b, \\ d - a\ ,\ d - b\ ,\ d - c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h - a\ ,\ h - b\ ,\ h - c\ ,\ \ldots\ h - g \end{gathered}$$

bildet, so hat das Produkt aus ihnen, nämlich:

$$P = (b-a) \times (c-a)(c-b) \times \ldots \times (h-a)(h-b) \ldots (h-g) \quad (13)$$

offenbar die Eigenschaft sich zu annulliren, wenn man durchweg für die eine der Grössen eine der übrigen setzt, also z. B. statt a überall b, oder statt c überall g setzt. Denkt man sich die angedeutete Multiplikation ausgeführt und bezeichnet man mit Q Dasjenige, was aus diesem vollständig entwickelten Produkte P hervorgeht, wenn man statt der Exponenten Indices substituirt, wodurch sich z. B. $a^2 b^3 c^4$ in $a_2 b_3 c_4$ oder $b^5 c^9 = a^0 b^5 c^9$ in $a_0 b_5 c_9$ verwandelt, so hat der neue Ausdruck Q offenbar noch dieselbe Eigenschaft. Sind z. E. nur 3 Grössen a, b, c vorhanden, so ist

$$\begin{aligned} P &= (b-a) \times (c-a)(c-b) \\ &= a^0 b^1 c^2 - a^0 b^2 c^1 + a^1 b^2 c^0 - a^1 b^0 c^2 + a^2 b^0 c^1 - a^2 b^1 c^0, \\ Q &= a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0 \end{aligned}$$

und diess reduzirt sich auf Null, wenn man statt a schreibt b oder c (natürlich ohne die Indices zu stören). Diese Eigenschaft findet aber auch allgemein statt. Denn das Annulliren des P geschieht in seiner unentwickelten Form dadurch, dass P den Faktor Null erhält, sobald

man irgend eine der Grössen $a, b, c, \ldots g, h$ einer der anderen gleich setzt, in der entwickelten Form dadurch, dass sich zu jedem Gliede ein anderes findet, welches blos dem Vorzeichen nach von ihm verschieden ist. Die letztere Erscheinung bleibt aber dieselbe, wenn man die Exponenten in Indices, also P in Q verwandelt. Nennt man $A_0 a_0$ die Summe aller der Glieder, welche a_0 als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, $A_1 a_1$ die Summe aller mit dem Faktor a_1 versehenen Terme u. s. w., so kann man Q unter der Form:

$$Q = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1} \qquad (14)$$

darstellen, und wenn man der Reihe nach $b, c, \ldots h$ für a setzt, so ist zufolge der vorigen Bemerkung

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots + A_{n-1} b_{n-1} \\ 0 = A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \ldots + A_{n-1} c_{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_{n-1} h_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Die Gleichungen (14) und (15) lassen sich nun zur Auflösung der n linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{c} a_0 X + b_0 Y + c_0 Z + \ldots + h_0 T = k_0 \\ a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \ldots + h_1 T = k_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1} X + b_{n-1} Y + c_{n-1} Z + \ldots + h_{n-1} T = k_{n-1} \end{array}$$

in folgender Weise benutzen. Man multiplizire die erste Gleichung mit A_0, die zweite mit A_1, die dritte mit A_2 etc. und addire Alles, so hat man

$$\begin{array}{l} (A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}) X \\ + (A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots + A_{n-1} b_{n-1}) Y \\ + \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + (A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_{n-1} h_{n-1}) T \\ = A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}. \end{array}$$

Hier verschwinden zufolge der Gleichungen (15) die Coeffizienten von $Y, Z, \ldots T$ und es folgt jetzt:

$$X = \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}}.$$

Der Nenner ist hier zufolge der Gleichung (14) $= Q$ d. h. Das, was aus P durch Verwandlung der Exponenten in Indices hervorgeht; der

Zähler aber entsteht aus dem Nenner, indem man k für a schreibt und kann jetzt ähnlich wie Q durch P ausgedrückt werden. Es lässt sich daher X unter der Form

$$X = \frac{(b-k)(c-k)(c-b)\ldots(h-k)(h-b)\ldots(h-g)}{(b-a)(c-a)(c-b)\ldots(h-a)(h-b)\ldots(h-g)} \quad (16)$$

darstellen, wenn man nach ausgeführten Multiplikationen überall die Exponenten in Indices übergehen lässt. Ebenso könnte man Y, Z, etc. ausdrücken; man würde denselben Nenner hinschreiben, den Zähler aber dadurch aus dem Nenner bilden, dass man nicht wie oben a, sondern der Reihe nach b, c etc. in k verwandelte. — Nun bedarf es aber nur geringer Aufmerksamkeit auf den Gang der gewöhnlichen Multiplikation, um einzusehen, dass aus der Multiplikation der $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen

$$\begin{array}{c} b-a \\ c-a\ ,\ c-b, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h-a\ ,\ h-b\ ,\ \ldots\ h-g, \end{array}$$

wo n die Anzahl der Grösseu a, b, $c \ldots h$ bezeichnet, lauter Partialprodukte von der Form:

$$\pm\, a^p b^q c^r \ldots . h^s$$

entstehen, worin immer $p+q+\cdots+s =$ der Faktorenanzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, dass ferner kein Exponent $> n-1$ sein kann und endlich die Anordnung der Exponenten immer anders ausfällt. Hieraus folgt, dass $p, q, \ldots s$, abgesehen von ihrer Ordnung, mit $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ identisch sein müssen, mithin die $n(n-1)$ entstehenden Partialprodukte aus

$$\pm\, a^0 b^1 c^2 \ldots . h^{n-1}$$

hervorgehen, wenn man die Exponenten auf alle möglichen Weisen [deren es $n(n-1)$ giebt] permutirt. Nach No. (16) ist nun durch Verwandlung der Exponenten in Indices, und wenn man der Reihe nach a dann $b, c, \ldots h$ in k übergehen lässt,

$$X = \frac{\Sigma(\pm k_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})},\quad Y = \frac{\Sigma(\pm a_0 k_1 c_2 \ldots h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}, \ldots .$$

$$Z = \frac{\Sigma(\pm a_0 b_1 k_2 \ldots h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}, \ldots T = \frac{\Sigma(\pm a_0 b_1 \ldots g_{n-2} k_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}.$$

Diess sind die Formeln, deren erste vorhin benutzt wurde. Der wichtigste Gebrauch des allgemeinen Transformationstheoremes besteht nun darin, dass man mit seiner Hülfe oft vielfache Integrale auf einfache zurückführen kann, wenn nämlich die Gleichungen $x = f_0$, $y = f^1$ etc. so gewählt sind, dass nach ihrer Substitution die neuen Variablen ξ, η, ζ etc. gesondert auftreten und dadurch das vielfache Integral in ein blosses Produkt einfacher Integrale zerfällt, wie in dem vorhin gegebenen Beispiele für die Transformation eines Doppelintegrales.

Kap. VII. Analytische Anwendungen.

§ 31.

Summirung der Taylor'schen Reihe.

Schon in §. 47 der Differenzialrechnung hatten wir bemerkt, dass sich manche Reihen leicht summiren lassen, wenn die Summe derjenigen Reihe bekannt ist, welche durch Differenziation aus der ersten hervorgeht, zugleich aber auch erwähnt, dass diese Methode der Reihensummirung den Gebrauch der Integralrechnung wesentlich erfordere. In der That, wenn y die noch unbekannte Summe der Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ bezeichnet, folglich

$$\frac{dy}{dx} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots$$

st und es sich nun trifft, dass die Summe dieser letzteren Reihe schon bekannt und etwa $= f(x)$ ist, so folgt jetzt aus $\frac{dy}{dx} = f(x)$ durch Integration $y = \int f(x)\,dx$; kann man nun die hier postulirte Integration in geschlossener Form ausführen, so gelangt man damit unmittelbar zur gesuchten Reihensumme. Wir wollen als Beispiel für diese Methode die Summirung einer Reihe zeigen, welche bereits im §. 35. der Diff.R. vorkam, und wenn uns hierbei auch keine materiell neuen Resultate geboten werden, so hat diese Betrachtung doch wenigstens

den Vortheil, die schon dort entwickelte Summe unter einer anderen und zwar in vielen Fällen sehr vortheilhaften Form darzustellen. Sei nämlich

$$\left.\begin{aligned} y = F(c-z) + \frac{z}{1} F'(c-z) + \frac{z^2}{1.2} F''(c-z) + \dots \\ \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n-1)}(c-z), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

so ergiebt sich durch Differenziation in Bezug auf z:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n)}(c-z),$$

mithin

$$y = -\frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} \int z^{n-1} F^{(n)}(c-z)\,dz + C.$$

Denken wir uns für die linke Seite die Reihe in (1) geschrieben, nehmen darauf $z = h$, $z = 0$ und subtrahiren diese beiden Werthe von einander, so folgt:

$$\begin{aligned} F(c-h) + \frac{h}{1} F'(c-h) + \frac{h^2}{1.2} F''(c-h) + \dots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{(n-1)}(c-h) - F(c) \\ = -\frac{1}{1.2\dots(n-1)} \int_0^h z^{n-1} F^{(n)}(c-z)\,dz, \end{aligned}$$

oder für $c = a + h$, und durch Transposition von $F(c) = F(a+h)$:

$$\left.\begin{aligned} F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} F^{(n-1)}(a) \\ = F(a+h) - \frac{1}{1.2\dots(n-1)} \int_0^h z^{n-1} F^{(n)}(a+h-z)\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Diess ist nichts Anderes, als die Summirung der n ersten Glieder der Taylorschen Reihe, wobei der Rest derselben unter der Form eines bestimmten Integrales erscheint. Man kann dem letztern, welches mit J_{n-1} bezeichnet werden möge, noch mancherlei andere Gestalten geben; nimmt man z. B. $z = h - u$, so geht dasselbe in

$$J_{n-1} = \int_0^h (h-u)^{n-1} F^{(n)}(a+u)\,du$$

über und dieses letztere verwandelt sich für $u = ht$ in

$$J_{n-1} = h^n \int_0^1 (1-t)^{n-1} F^{(n)}(a+ht)\,dt.$$

Die letztere Form ist wegen der constanten Integrationsgränzen die meistentheils brauchbarste.

Für $a = 0$, $h = x$ wird aus (2):

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{J_{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

wobei man für J_{n-1} eine der Formen

$$\int_0^x z^{n-1} F^{(n)}(x-z)\,dz \;,\; \int_0^x (x-u)^{n-1} F^{(n)}(u)\,du,$$
$$x^n \int_0^1 (1-t)^{n-1} F^{(n)}(xt)\,dt$$

wählen kann. — Setzt man noch $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$, so folgt $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = f'(x)$ etc. und mithin ergiebt sich:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{f(0)}{1} x + \frac{f'(0)}{1.2} x^2 + \frac{f''(0)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-2)}(0)}{1.2\ldots(n-1)} x^{n-1} + \frac{J_{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

oder, wenn $n+1$ an die Stelle von n geschrieben wird,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^x f(x)\,dx = \frac{f(0)}{1} x + \frac{f'(0)}{1.2} x^2 + \frac{f''(0)}{1.2.3} x^3 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots n} x^n + \frac{J_n}{1.2\ldots n} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wobei man für J_n einen der Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^x z^n f^{(n)}(x-z)\,dz \;,\; \int_0^x (x-u)^n f^{(n)}(u)\,du \;, \\ &\qquad x^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n)}(xt)\,dt \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

nach Belieben wählen kann. Will man die Reihe (3) ins Unendliche fortsetzen, so muss man entweder sich versichern, dass für unendlich wachsende n

$$\text{Lim}\,\frac{J_n}{1.2\ldots n}=0$$

ist, oder man wendet das allgemeine Criterium für die Verwandelbarkeit einer Funktion auf $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$ an und bestimmt dadurch a priori die Gränzen der Gültigkeit für die Gleichung (3). So findet man z. B. ohne Schwierigkeit

$$l(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{x}{1}-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\ldots$$

gültig innerhalb der Gränzen $x=-1$ bis $x=+1$, da für $F(x)=l(x+\sqrt{1+x^2})$ die Differenzialquotienten

$$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ F''(x)=-\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3},\ldots$$

unendlich werden, sobald $x=\sqrt{-1}$ oder der Modulus von x der Einheit gleich genommen wird.

§ 32.

Reihensummirungen durch singuläre Werthe bestimmter Integrale.

In vielen Fällen lässt das Integral, welches die Summe einer Reihe darstellt, keine Werthangabe in geschlossener Form zu und dann gelangt man zu keiner unmittelbaren Summirung; aber es kann dabei oft vorkommen, dass Spezialisirungen jener Reihe summirbar werden, wenn der entsprechende spezielle Werth des Integrales ein singulärer Werth ist, der sich vollständig entwickelt angeben lässt. Eines der bemerkenswerthesten Beispiele dieser Art gründet sich auf die singulären Werthe der Integrale

$$\int_0^c \frac{1-r}{1-2r\cos x+r^2}\varphi(x)\,dx \text{ und } \int_0^c \frac{1-r}{1+2r\cos x+r^2}\varphi(x)\,dx \quad (1)$$

die für $r=1$ hervorgehen. Dass nämlich für $r=1$ das erste dieser

Integrale nicht nothwendig verschwinden müsse, erkennt man leicht daraus, dass der Nenner in diesem Falle $=2(1-\cos x)$ wird und es mithin einen Werth von x giebt, für welchen

$$\frac{1-1}{1-2\cos x+1^2}$$

nicht $=0$ zu werden braucht, nämlich den Werth $x=0$. Man hat nun zunächst wegen $\cos x=1-2\sin^2\frac{1}{2}x$

$$\int_0^c \frac{1-r}{1-2r\cos x+r^2}\varphi(x)\,dx=\int_0^c \frac{1-r}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{1}{2}x}\varphi(x)\,dx,$$

und diess geht für $\frac{1}{2}x=z$, $\frac{1-r}{2\sqrt{r}}=\varepsilon$ in $\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\varphi(2z)\,dz$ über.

Bezeichnen wir $\varphi(2z)$ mit $\psi(z)$, und berücksichtigen, dass für $r=1$ auch $\sqrt{r}=1$ und $\varepsilon=0$ wird, so ergiebt sich, dass der dem Falle $r=1$ entsprechende singuläre Werth des in Rede stehenden Integrales

$$=\text{Lim}\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\psi(z)\,dz$$

ist, wobei sich das Zeichen Lim auf ein bis zur Null abnehmendes ε bezieht. Bleibt nun der Differenzialquotient $\psi'(z)$ endlich und stetig von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}c$, so ist es für alle in dem Integrationsintervalle enthaltene z erlaubt, $\psi(z)=\psi(0)+z\psi'(\lambda z)$ zu setzen, wo λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet; dann wird

$$\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon\,\psi(z)\,dz}{\varepsilon^2+\sin^2 z}=\psi(0)\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon\,dz}{\varepsilon^2+\sin^2 z}+\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon\,z\,\psi'(\lambda z)\,dz}{\varepsilon^2+\sin^2 z},$$

und wenn man die erste Integration rechts ausführt und in der zweiten noch den Faktor $\frac{2\sin z\cos z}{\sin 2z}$ zusetzt

$$\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon\,\psi(z)\,dz}{\varepsilon^2+\sin^2 z}$$

$$=\psi(0)\,\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\tan\tfrac{1}{2}c\right)$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{2\varepsilon\sin z\cos z}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\,\frac{z}{\sin 2z}\,\psi'(\lambda z)\,dz,$$

mithin, wenn man ε bis zur Null abnehmen lässt,

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Lim}\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon\,\psi(z)\,dz}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\\&=\psi(0)\cdot\frac{\pi}{2}+\operatorname{Lim}.\,\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{2\sin z\cos z}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\,\frac{z}{\sin 2z}\,\psi'(\lambda z)\,dz\end{aligned}\right\}(3)$$

Da nun $\psi'(z)$ der Voraussetzung nach von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}c$ endlich und stetig bleibt, folglich diess mit $\psi'(\lambda z)$ um so mehr der Fall sein muss (wegen $\lambda z < z$), so würde auch das Produkt

$$\frac{z}{\sin 2z}\,\psi'(\lambda z)$$

innerhalb jenes Intervalles endlich und stetig bleiben, wenn der Faktor $\frac{z}{\sin 2z}$ dieselbe Eigenschaft besässe. Hierzu ist nöthig, dass $2z$ nicht $=\pi$ werden darf, und mithin muss man, da $2.\frac{1}{2}c=c$ der grösste Werth ist, den $2z$ innerhalb des Integrationsintervalles erhalten kann, voraussetzen, dass $c<\pi$ sei. Da unter dieser Beschränkung $\frac{z}{\sin 2z}$ von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}c$ endlich und continuirlich bleibt, dieselbe Eigenschaft dann auch dem vorhin genannten Produkte zukommt, so können wir jetzt behaupten, dass das Maximum M und das Minimum N, welche jenes Produkt innerhalb des Intervalles 0 bis $\frac{1}{2}c$ erreicht, endliche Grössen sind und mithin haben wir

$$\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{2\sin z\cos z}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\,\frac{z}{\sin 2z}\,\psi'(\lambda z)\,dz$$

$$<\varepsilon M\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{2\sin z\cos z}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\,dz \text{ und } >\varepsilon N\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{2\sin z\cos z}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\,dz$$

d. i.

$$<M[\varepsilon l(\varepsilon^2+\sin^2\tfrac{1}{2}c)-\varepsilon l(\varepsilon^2)]$$

$$\text{und}\qquad >N[\varepsilon l(\varepsilon^2+\sin^2\tfrac{1}{2}c)-\varepsilon l(\varepsilon^2)].$$

Daraus folgt augenblicklich, weil $\operatorname{Lim}\ \varepsilon l(\varepsilon^2+\sin^2\frac{1}{2}c)$ und $\operatorname{Lim}\ \varepsilon l(\varepsilon^2)$ beide $=0$ sind

$$\operatorname{Lim}\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{2\sin z\cos z}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\,\frac{z}{\sin 2z}\,\psi'(\lambda z)\,dz=0$$

und mithin nach Nro. (3)

$$\text{Lim}\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\sin^2 z}\,\psi(z)\,dz=\frac{\pi}{2}\,\psi(0).$$

Berücksichtigen wir endlich, dass wegen $\psi(z)=\varphi(2z)$, $\psi(0)=\varphi(0)$ ist und die Bedingung, dass $\psi'(z)$ von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}c$ stetig und endlich bleiben soll, nunmehr in die übergeht, dass $\varphi'(z)$ von $z=0$ bis $z=c$ endlich und continuirlich bleiben muss, so ist jetzt für $r=1$

$$\int_0^c\frac{1-r}{1-2r\cos x+r^2}\,\varphi(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)\ ,\ c<\pi, \qquad (4)$$

wobei Stetigkeit und Endlichkeit von $\varphi'(x)$ innerhalb der Gränzen $x=0$ bis $x=c$ vorausgesetzt wird.

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich der singuläre Werth des zweiten in Nro. (1) vorkommenden Integrales bestimmen, indem man $\cos x=2\cos^2\frac{1}{2}x-1$, darauf wieder $x=2z$ und $\frac{1-r}{2\sqrt{r}}=\varepsilon$ setzt. Derselbe ist nämlich

$$=\text{Lim}\int_0^{\frac{1}{2}c}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\cos^2 z}\,\psi(z)\,dz\ ,\ [\psi(z)=\varphi(2z)]$$

und dafür findet man den Werth Null unter denselben Bedingungen wie vorhin. Diess ergiebt sich auch unmittelbar aus der Bemerkung, dass für $r=1$ der Ausdruck

$$\frac{1-1}{1+2\cos x+1^2}\,\varphi(x)=\frac{1-1}{2\,(1+\cos x)}\,\varphi(x)$$

immer Null ist, sobald $\varphi'(x)$ und folglich auch $\varphi(x)$ endlich und stetig, zugleich aber $1+\cos x$ von Null verschieden bleibt. Diese letztere Bedingung ist aber erfüllt, wenn der grösste Werth des x d. h. $c<\pi$ genommen wird. Wir haben daher

$$\int_0^c\frac{1-r}{1+2r\cos x+r^2}\,\varphi(x)\,dx=0\ ,\ c<\pi. \qquad (5)$$

Von den beiden Sätzen (4) und (5) kann man nun folgende Anwendung machen. Es ist für ein ächt gebrochenes r

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$$
$$=1+2\{r\cos x+r^2\cos 2x+r^3\cos 3x+\ldots\}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $f(x)dx$, integrirt darauf zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = \pi$ und setzt zur Abkürzung:

$$\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = A_n,$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx$$
$$= A_0 + 2\{A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + \ldots\}.$$

Es kann nun leicht sein, dass die Reihe rechts für $r = \pm 1$ noch convergirt, und wenn diess festgestellt ist, so muss ihre Summe offenbar dem singulären Werthe des Integrales links gleich sein. Um den letzteren zu finden, müssen wir, da die Bedingung $c < \pi$ nicht erfüllt ist, vorerst die Zerlegung

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx$$

eintreten lassen, wobei wir im zweiten Integrale rechts $x = \pi - x'$ setzen; es findet sich dann ohne Schwierigkeit:

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1-r^2}{1+2r\cos x'+r^2} f(\pi-x')\,dx'.$$

Hieraus ergiebt sich für $r = +1$, indem man rechts $1-r^2$ in $(1+r)(1-r)$ zerlegt nach no. (4) und (5)

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx = \pi f(0),$$

dagegen für $r = -1$

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} f(x)\,dx = \pi f(\pi)$$

und somit gelangen wir zu dem Satze: wenn die Funktion $f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich und stetig bleibt, so gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{2} f(0) &= \frac{1}{2} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \\ \frac{\pi}{2} f(\pi) &= \frac{1}{2} A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

so lange die Reihen, in welchen A_n die früher angegebene Bedeutung hat, convergent bleiben *).

Ein gutes Beispiel hierzu bildet die Annahme $f(x) = \cos\mu x$, worin μ keine ganze Zahl sein soll. Es wird dann

$$A_n = \int_0^\pi \cos\mu x \cos nx\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi \cos(n-\mu)x dx + \int_0^\pi \cos(n+\mu)x dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-\mu)\pi}{n-\mu} + \frac{\sin(n+\mu)\pi}{n+\mu}\right] = \frac{(-1)^{n+1}\mu\sin\mu\pi}{n^2-\mu^2}.$$

Die beiden in (8) vorkommenden Reihen sind jetzt:

$$\mu\sin\mu\pi\left[\frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{1}{2^2-\mu^2} + \frac{1}{3^2-\mu^2} - \dots\right],$$
$$\mu\sin\mu\pi\left[\frac{1}{2\mu^2} - \frac{1}{1^2-\mu^2} - \frac{1}{2^2-\mu^2} - \frac{1}{3^2-\mu^2} - \dots\right]$$

und ihre Convergenz erhellt leicht aus der Bemerkung, dass für

$$u_n = \frac{1}{n^2-\mu^2},\ \mathrm{Lim}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] = 2 \text{ d. i. } > 1$$

ausfällt. Die Summe der ersten Reihe ist daher $\frac{\pi}{2}\cos\mu 0$, und die der zweiten $\frac{\pi}{2}\cos\pi\mu$, woraus durch Multiplikation mit 2 und Division mit $\sin\mu\pi$ folgt

$$\pi\operatorname{cosec}\mu\pi = \frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2-\mu^2} - \frac{2\mu}{2^2-\mu^2} + \frac{2\mu}{3^2-\mu^2} - \dots \quad (9)$$

$$\pi\cot\mu\pi = \frac{1}{\mu} - \frac{2\mu}{1^2-\mu^2} - \frac{2\mu}{2^2-\mu^2} - \frac{3\mu}{3^2-\mu^2} + \dots \quad (10)$$

---

*) Man kann diese Betrachtungen noch etwas allgemeiner halten und dabei die Summe derjenigen Reihen ermitteln, von denen

$$\int_0^\pi f(x)\cos n(x-a)\, dx$$

das allgemeine Glied darstellt, aber die Untersuchung selbst hat auf diesem Wege wenig Werth und trifft den Nerv der ganzen schönen Theorie solcher Reihen nicht. Die angemessenere Behandlungsweise besteht darin, dass man

Die halbe Differenz beider Gleichungen führt unter der Rücksicht, dass $\operatorname{cosec} u - \cot u = \tan \frac{1}{2} u$ ist, noch zu der Formel

$$\frac{\pi}{2} \tan \tfrac{1}{2} \mu \pi = \frac{2\mu}{1^2 - \mu^2} + \frac{2\mu}{3^2 - \mu^2} + \frac{2\mu}{5^2 - \mu^2} + \ldots \qquad (11)$$

Schreibt man die Gleichung (10) in der Form

$$\pi \cot \mu \pi - \frac{1}{\mu} = -\frac{2\mu}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\mu}{2^2 - \mu^2} - \frac{2\mu}{3^2 - \mu^2} - \ldots$$

multiplizirt beiderseits mit $d\mu$ und integrirt zwischen den Gränzen $\mu = 0, \mu = \lambda$, so findet man

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\lambda \left(\pi \cot \mu \pi - \frac{1}{\mu}\right) d\mu \\ &= \tfrac{1}{2} l \left(\frac{1^2 - \lambda^2}{1^2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} l \left(\frac{2^2 - \lambda^2}{2^2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} l \left(\frac{3^2 - \lambda^2}{3^2}\right)^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Bei unbestimmter Integration ist aber

$$\begin{aligned} \int \left(\pi \cot \mu \pi - \frac{1}{\mu}\right) d\mu &= \tfrac{1}{2} l (\sin^2 \mu \pi) - \tfrac{1}{2} l (\mu^2) + C \\ &= \tfrac{1}{2} l \left(\frac{\sin \mu \pi}{\mu \pi}\right)^2 + C + \tfrac{1}{2} l (\pi^2), \end{aligned}$$

und daraus erhält man, wenn μ in λ und dann in Null übergeht,

$$\int_0^\lambda \left(\pi \cot \mu \pi - \frac{1}{\mu}\right) d\mu = \tfrac{1}{2} l \left(\frac{\sin \lambda \pi}{\lambda \pi}\right)^2$$

und mithin ist nach Nro. (12)

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} l \left(\frac{\sin \lambda \pi)}{\lambda \pi}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} l [1 - \frac{\lambda^2}{1^2}]^2 + \tfrac{1}{2} l [1 - \frac{\lambda^2}{2^2}]^2 + \tfrac{1}{2} l [1 - \frac{\lambda^2}{3^2}]^2 + \cdots \end{aligned}$$

Ist $\lambda < 1$, so sind die Grössen $\sin \lambda \pi, 1 - \frac{\lambda^2}{1^2}, 1 - \frac{\lambda^2}{2^2}$ etc. sämmtlich positiv und man kann in diesem Falle den Satz anwenden, dass für positive u die Funktionen $\frac{1}{2} l (u^2)$ und lu identisch sind. Erinnert man sich noch, dass aus einer Gleichung von der Form $lA = la + lb + lc + \ldots$ folgt $A = abc \ldots$, so ergiebt sich

---

zunächst die ersten n Glieder der Reihe summirt und darauf die Gränze bestimmt, gegen welche diese Summe bei unendlich wachsenden n convergirt. M. s. hierüber das zweite Heft meiner „Analytischen Studien."

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}=(1-\frac{\lambda^2}{1^2})(1-\frac{\lambda^2}{2^2})(1-\frac{\lambda^2}{3^2})\ldots \tag{13}$$

Multiplizirt man ebenso die Gleichung (11) mit $d\mu$ und integrirt darauf zwischen den Gränzen $\mu=0, \mu=\lambda$, so führen ganz ähnliche Schlüsse zu der Formel

$$\cos\tfrac{1}{2}\lambda\pi=(1-\frac{\lambda^2}{1^2})(1-\frac{\lambda^2}{3^2})(1-\frac{\lambda^2}{5^2})\ldots \tag{14}$$

die man auch durch die Relation $\cos\frac{1}{2}\lambda\pi=\frac{\sin\lambda\pi}{2\sin\frac{1}{2}\lambda\pi}$ aus der in Nro. (13) verzeichneten hätte ableiten können. Setzt man endlich $\lambda\pi=x$, so ergeben sich die Gleichungen

$$\sin x=x\,(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2})\ldots \tag{15}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}x=(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{5^2\pi^2})\ldots \tag{16}$$

deren Gültigkeit zufolge ihrer Herleitung an die Bedingung $\lambda<1$, d. i. $\lambda\pi<\pi$ oder $x<\pi$ gebunden ist, wobei es nur auf den absoluten Werth von x ankommt. Man kann sich aber leicht überzeugen, dass die aufgestellten Gleichungen, abgesehen von ihrer Herleitung, allgemein gelten. Denn man hat, wenn $\varphi(x)$ die rechte Seite der Gleichung (15) bezeichnet, auch

$$\varphi(x)=x\,\frac{\pi-x}{\pi}\cdot\frac{\pi+x}{\pi}\cdot\frac{2\pi-x}{2\pi}\cdot\frac{2\pi+x}{2\pi}\cdot\frac{3\pi-x}{3\pi}\cdot\frac{3\pi+x}{3\pi}\cdots$$

folglich

$$\varphi(\pi+x)=(\pi+x)\,\frac{-x}{\pi}\cdot\frac{2\pi+x}{\pi}\cdot\frac{\pi-x}{2\pi}\cdot\frac{3\pi+x}{2\pi}\cdot\frac{2\pi-x}{3\pi}\cdot\frac{4\pi+x}{3\pi}\cdots$$

oder wenn man je zwei auf einander folgende Faktoren im Zähler vertauscht (nach dem Schema $ab.cd.ef\ldots=ba.dc.fe\ldots$)

$$\varphi(\pi+x)=-x\,\frac{\pi+x}{\pi}\cdot\frac{\pi-x}{\pi}\cdot\frac{2\pi+x}{2\pi}\cdot\frac{2\pi-x}{2\pi}\cdot\frac{3\pi+x}{3\pi}\cdot\frac{3\pi-x}{3\pi}\cdots$$

d. i. $\varphi(\pi+x)=-\varphi(x)$. Hieraus folgt, wenn wieder $\pi+x$ für x gesetzt wird, $\varphi(2\pi+x)=-\varphi(\pi+x)$ d. i. $\varphi(2\pi+x)=\varphi(x)$, dann wieder $\varphi(3\pi+x)=\varphi(\pi+x)$ oder $\varphi(3\pi+x)=-\varphi(x)$ u. s. f. Die Funktion $\varphi(x)$ ändert sich demnach ebenso periodisch wie $\sin x$, und da von $x=0$ bis $x=\pi$ die Funktionen $\sin x$ und $\varphi(x)$ identisch sind, so ergiebt sich jetzt ihre Identität von $x=0$ bis $x=\infty$. Da man ferner

die Gleichung (16) als eine blose Folge von ihrer Vorgängerin ansehen kann, so muss auch sie für alle x gelten.

Giebt man in den Gleichungen (13) und (14) dem λ solche Werthe, dass $\sin\lambda\pi$ oder $\cos\frac{1}{2}\lambda\pi$ unmittelbar bekannt ist, so erhält man unendliche Produkte, aus denen sich π bestimmen lässt. So erhält man aus Nro. (13) für $\lambda=\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\frac{5.7}{6^2}\cdot\frac{7.9}{8^2}\cdots$$

mithin

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdot\frac{8.8}{7.9}\cdots$$

Wir wollen nun noch eine Reihe für die Sekante nebst der daraus folgenden Produktenformel entwickeln. Schreibt man die Gleichung (9) in der Form

$$\pi\operatorname{cosec}\mu\pi=\frac{1}{\mu}+\left[\frac{1}{1-\mu}-\frac{1}{1+\mu}\right]-\left[\frac{1}{2-\mu}-\frac{1}{2+\mu}\right]$$
$$+\left[\frac{1}{3-\mu}-\frac{1}{3+\mu}\right]-\left[\frac{1}{4-\mu}-\frac{1}{4+\mu}\right]+\ldots,$$

setzt darauf $\frac{1+\mu}{2}$ an die Stelle von μ und dividirt dann überall mit 2, so ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2}\sec\tfrac{1}{2}\mu\pi=\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{1-\mu}-\frac{1}{3+\mu}-\frac{1}{3-\mu}$$
$$+\frac{1}{5+\mu}+\frac{1}{5-\mu}-\ldots,$$

oder durch Vereinigung je zweier mit gleichen Vorzeichen versehener Glieder

$$\frac{\pi}{2}\sec\tfrac{1}{2}\mu\pi=\frac{2.1}{1^2-\mu^2}-\frac{2.3}{3^2-\mu^2}+\frac{2.5}{5^2-\mu^2}-\ldots \qquad (17)$$

Multiplizirt man auch diese Gleichung mit $d\mu$ und integrirt zwischen den Gränzen $\mu=0, \mu=\lambda$, so findet man leicht

$$\tfrac{1}{2}\,l\tan^2\frac{1+\lambda}{4}\pi$$
$$=\tfrac{1}{2}\,l\left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right]^2-\tfrac{1}{2}\,l\left[\frac{3+\lambda}{3-\lambda}\right]^2+\tfrac{1}{2}\,l\left[\frac{5+\lambda}{5-\lambda}\right]^2-\ldots$$

und wenn man $\lambda < 1$ voraussetzt, so entspringt daraus die Produktenformel

$$\tan\frac{1+\lambda}{4}\pi = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{3-\lambda}{3+\lambda}\cdot\frac{5+\lambda}{5-\lambda}\cdot\frac{7-\lambda}{7+\lambda}\cdots \tag{18}$$

Von besonderem Interesse sind noch die Resultate, welche man dadurch erhält, dass man die für die Tangente, Cotangente, Sekante und Cosekante gefundenen Reihen in andere transformirt, welche nach Potenzen von μ fortschreiten. Diese Umwandlung bietet unter Anwendung der Formel

$$\frac{1}{n^2-\mu^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\mu}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{\mu^2}{n^4} + \frac{\mu^4}{n^6} + \frac{\mu^6}{n^8} + \cdots$$

keine Schwierigkeit dar, sobald man $\mu < n$, d. h. weil $n = 1, 2, 3, \ldots$ genommen werden muss, $\mu < 1$ voraussetzt. Benutzt man z. B. die vorstehende Gleichung zur Entwickelung jedes einzelnen Gliedes der in Nro. (10) vorkommenden Reihe und ordnet hierauf Alles nach Potenzen von μ, so erhält man

$$\begin{aligned}&\pi\cot\mu\pi\\ &= \frac{1}{\mu} - 2\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right]\mu\\ &\quad - 2\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right]\mu^3\\ &\quad - 2\left[\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots\right]\mu^5\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

d. i. wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots = S_m$$

und $\mu = \frac{x}{\pi}$ setzt, wo nun $x < \pi$ sein muss

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2S_2\frac{x}{\pi^2} - 2S_4\frac{x^3}{\pi^4} - 2S_6\frac{x^5}{\pi^6} - \cdots$$

Vergleicht man diess mit der schon früher für $\cot x$ gefundenen Reihe [Differenzialrechnung S. 232, Formel (7)], so folgt

$$\frac{2S_{2n}}{\pi^{2n}} = \frac{2^{2n} B_{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n)}$$

oder

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} \ldots = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)} \qquad (19)$$

womit eine Summenformel für die geraden Potenzen der reziproken natürlichen Zahlen gewonnen ist. So hat man z. B. für $n=1$, $B_1 = \frac{1}{6}$ (S. 236 der Diff.-R.) folglich

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Dividirt man die Gleichung (19) mit 2^{2n}, so ist auch

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^2{}_n} + \frac{1}{6^{2n}} + \ldots = \frac{1}{2} \frac{B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)},$$

und wenn man diess von Nro. (19) subtrahirt

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n}-1}{2} \frac{B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2\ldots(2n)} \qquad (20)$$

In eleganterer Form erhält man noch diese Reihenvergleichungen, wenn man statt der Bernoullischen Zahlen die Tangentenkoeffizienten $G_1, G_3, G_5, \ldots$ und die ihnen analogen Sekantenkoeffizienten $G_0, G_2. G_4, \ldots$ einführt. Setzen wir vorerst zur Abkürzung

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \ldots = U_m,$$

$$\frac{1}{1^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \ldots = V_m;$$

so ergiebt sich aus den Gleichnngen (17) und (11), wenn man die darin vorkommenden Reihen für $\mu < 1$ ähnlich wie vorhin transformirt,

$$\frac{\pi}{2} \sec \tfrac{1}{2}\mu\pi = 2V_1 + 2V_3\mu^2 + 2V_5\mu^4 + 2V_7\mu^6 + \ldots$$

$$\frac{\pi}{2} \tan \tfrac{1}{2}\mu\pi = 2U_2\mu + 2U_4\mu^3 + 2U_6\mu^5 + \ldots$$

oder für $\mu = \frac{2x}{\pi}$, wo nun $2x < \pi$ oder $x < \frac{\pi}{2}$ sein muss,

$$\sec x = \frac{2^2 V_1}{\pi} + \frac{2^4 V_3}{\pi^3} x^2 + \frac{2^6 V_5}{\pi^5} x^4 + \ldots$$

$$\tan x = \frac{2^3 U_2}{\pi^2} x + \frac{2^5 U_4}{\pi^4} x^3 + \frac{2^7 U_6}{\pi^6} x^5 + \ldots$$

und wenn man diess mit den Reihen

$$\sec x = G_0 + \frac{G_2}{1.2} x^2 + \frac{G_4}{1.2.3.4} x^4 + \ldots$$

$$\tan x = \frac{G_1}{1} x + \frac{G_3}{1.2.3} x^3 + \frac{G_5}{1.2..5} x^5 + \ldots$$

vergleicht, wobei $1.2.3\ldots m$ kurz mit m' bezeichnet werden möge, so ist vermöge der Bedeutungen von V_m und U_m,

$$\frac{G_{2n}}{(2n)'} = \frac{2^{2n+2}}{\pi^{2n+1}} \left[\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots \right]$$

$$\frac{G_{2n+1}}{(2n+1)'} = \frac{2^{2n+3}}{\pi^{2n+2}} \left[\frac{1}{1^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{5^{2n+2}} + \ldots \right]$$

Beide Gleichungen lassen sich zusammenfassen, wenn man

$$\frac{G_m}{m'} = \frac{2^{m+2}}{\pi^{m+1}} \left[\frac{1}{1^{m+1}} + \frac{\varepsilon}{3^{m+1}} + \frac{1}{5^{m+1}} + \frac{\varepsilon}{7^{m+1}} + \ldots \right] \tag{21}$$

setzt, worin ε eine Grösse bezeichnet, die $= -1$ oder $= +1$ wird, jenachdem m gerade oder ungerade ist. Setzt man

$$\varepsilon = \frac{(-1)^{m-1} - (-1)^m}{2} \tag{22}$$

so ist diese dem ε auferlegte Bedingung erfüllt und somit die Dualität der Gleichungen für $G_m : m'$ vermieden. Der Fall $\varepsilon = +1$ stimmt übrigens, wie sich von selbst versteht, mit der Formel (20) überein.

Ein anderweites Beispiel für die Gleichung (8) würde die Annahme $f(x) = e^{\beta x}$ bilden; man findet aber dabei fast nur Resultate, welche aus den bisher entwickelten durch die Substitution $\mu = \beta \sqrt{-1}$ hervorgehen würden.

§ 33.

Andere Methode der Reihensummirung.

Die eleganteste Ausführung des Gedankens, Reihen durch be-

stimmte Integrale zu summiren, besteht in folgendem Kunstgriffe. Die gegebene Reihe sei:

$$\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots, \qquad (1)$$

was bekanntlich die allgemeine Form jeder regelmässigen Reihe ist; gesetzt nun, es wäre ein bestimmtes Integral bekannt, dessen Werth gerade $\varphi(n)$ ausmachte, also etwa

$$\int_a^b f(x,n)\,dx = \varphi(n), \qquad (2)$$

so wäre die Reihe in No. (1) auch gleich der folgenden:

$$\int_a^b f(x,0)\,dx + \int_a^b f(x,1)\,dx + \int_a^b f(x,2)\,dx + \ldots$$
$$= \int_a^b [f(x,0)+f(x,1)+f(x,2)+f(x,3)+\ldots]\,dx \qquad (3)$$

und man übersieht jetzt auf der Stelle, dass die Summirung der ursprünglich gegebenen Reihe auf die Summirung einer anderen Reihe, nämlich $f(x,0)+f(x,1)+\ldots$ reduzirt ist. Kann man nun diese letztere Summe finden und heisst dieselbe etwa $F(x)$, so hat man durch Vergleichung von (1) und (3):

$$\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots = \int_a^b F(x)\,dx, \qquad (4)$$

und wenn sich die auf der rechten Seite postulirte Integration in geschlossener Form ausführen lässt, so hat man damit die ursprüngliche Reihe summirt.

Dieses Verfahren ist z. B. mit Leichtigkeit auf die Reihe

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+m-1)} + \frac{u}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+m-1)} \\ &+ \frac{u^2}{(p+2q)(p+2q+1)\ldots(p+2q+m-1)} \\ &+ \frac{u^3}{(p+3q)(p+3q+1)\ldots(p+3q+m-1)} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (5)$$

anwendbar, worin m eine ganze positive Zahl bezeichnet, p und q be ebige rationale Grössen sind; es giebt nämlich ein bestimmtes Inte-

gral, dessen Werth das allgemeine Glied der gegebenen Reihe darstellt. Man gelangt hierzu, wenn die Reduktionsformel

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$$
$$= \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+np} + \frac{npa}{m+np}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$

auf das Integral

$$\int x^{r-1}(1-x)^{s-1}dz$$

angewendet wird, worin s eine ganze positive Zahl bezeichnet. Man findet so:

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx = \frac{s-1}{r+s-1}\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-2}dx,$$

und wenn man auf das Integral rechts die Reduktionsformel selbst wieder anwendet, indem man $s-1$, $s-2$, etc. der Reihe nach für s setzt:

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx = \frac{s-1}{r+s-1}\,\frac{s-2}{r+s-2}\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-3}dx$$
$$= \frac{s-1}{r+s-1}\,\frac{s-2}{r+s-2}\,\frac{s-3}{r+s-3}\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-4}dx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{s-1}{r+s-1}\,\frac{s-2}{r+s-2}\cdots\frac{s-\overline{s-1}}{r+s-\overline{s-1}}\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-s}dx,$$

d. i. wenn man die letzte Integration jetzt ausführt,

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx$$
$$= \frac{s-1}{r+s-1}\,\frac{s-2}{r+s-2}\cdots\frac{2}{r+2}\,\frac{1}{r+1}\,\frac{1}{r}.$$

Schreibt man m für s und dividirt beiderseits mit $1.2.3\ldots(m-1)$, was kurz mit $(m-1)'$ bezeichnet werden möge, so ist

$$\frac{1}{(m-1)'}\int_0^1 (1-x)^{m-1}x^{r-1}dx = \frac{1}{r(r+1)(r+2)\ldots(r+m-1)}. \qquad (6)$$

Setzt man endlich $p+kq$ für r und multiplizirt beiderseits mit u^k, wo u constant für die Integration ist, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{(m-1)'}\int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{p-1} (ux^q)^k \, dx$$
$$= \frac{u^k}{(p+kq)(p+kq+1)(p+kq+2)\dots(p+kq+m-1)}$$

und hier ist die rechte Seite nichts Anderes, als das allgemeine Glied der in No. (5) verzeichneten Reihe. Man erhält letztere daraus, indem man $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ setzt und Alles addirt. Die Summe jener Reihe ist demnach gleich

$$\frac{1}{(m-1)'}\int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{p-1} [1 + ux^q + (ux^q)^2 + \dots] \, dx$$

Hier lässt sich die eingeklammerte Reihe summiren, sobald der absolute Werth von $ux^q < 1$ ist. Berücksichtigt man, dass vermöge der Integrationsgränzen x nicht ausserhalb des Intervalles 0 bis 1 liegen kann, so erfüllt sich jene Bedingung dadurch, dass man q positiv und $u < 1$ nimmt. Das vorstehende Integral giebt dann die Summenformel:

$$\frac{1}{p(p+1)\dots(p+m-1)} + \frac{u}{(p+q)(p+q+1)\dots(p+q+m-1)}$$
$$+ \frac{u^2}{(p+2q)(p+2q+1)\dots(p+2q+m-1)} + \dots$$
$$= \frac{1}{(m-1)'}\int_0^1 \frac{(1-x)^{m-1} x^{p-1}}{1-ux^q} \, dx \, , \; u^2 < 1. \tag{7}$$

Dass nun die auf der rechten Seite vorkommende Integration jederzeit ausführbar ist, sobald p und q positive rationale Zahlen sind, ergiebt sich leicht auf folgende Weise. Man entwickele zunächst $(1-x)^{m-1}$ nach dem Binomialtheoreme für ganze positive Exponenten, so zerfällt das vorstehende Integral in m andere von der Form

$$\int_0^1 \frac{x^{p+s-1} dx}{1-ux^q} \, , \; s \text{ ganz und positiv.}$$

Bringt man die beiden rationalen Zahlen p und q auf gleichen Nenner, so kann man $p = \frac{h}{n}$, $q = \frac{k}{n}$ setzen, wo h, k, n sämmtlich ganze positive Zahlen bedeuten. Mit Hülfe der Substitution $x = z^n$ geht jetzt das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{h}{n}+s-1}\,dx}{1-ux^{\frac{k}{n}}}$$

in das folgende

$$n\int_0^1 \frac{z^{h+ns-1}}{1-uz^k}\,dz$$

über, worin der Faktor von dz eine rationale gebrochene algebraische Funktion von z und dessen Werth mithin nach den Lehren des Cap. II jederzeit vollständig entwickelbar ist. So findet man z. B. aus der Gleichung (7) für $p = q = 1$ und $m = 3$,

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{u}{2.3.4}+\frac{u^2}{3.4.5}+\frac{u^3}{4.5.6}+\cdots$$
$$=\frac{3}{4u}-\frac{1}{2u^2}-\frac{(1+u)^2}{2u^3}\,l\,(1+u)$$
$$1>u>-1,$$

wobei man übrigens auch noch $u = +1$ und $u = -1$ setzen darf, weil die Reihe links für diese Werthe noch convergirt und die Funktion rechts dabei weder unendlich noch diskontinuirlich wird. Nimmt man $m = 3$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$ und schreibt u^2 für u, so erhält man

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}+\frac{u^2}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}+\frac{u^4}{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}+\cdots$$
$$=\frac{5}{3u^2}-\frac{1}{u^4}+\frac{(1-u^2)^2}{u^5}\,\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$
$$1>u>-1,$$

oder nach Division mit $2^3 = 8$,

$$\frac{1}{1.3.5}+\frac{u^2}{3.5.7}+\frac{u^4}{5.7.9}+\cdots$$
$$=\frac{5}{24u^2}-\frac{1}{8u^4}+\frac{(1-u^2)^2}{8u^5}\,\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$
$$1>u>-1.$$

Schreibt man $u\sqrt{-1}$ für u, so folgt hieraus noch:

$$\frac{1}{1.3.5}-\frac{u^2}{3.5.7}+\frac{u^4}{5.7.9}-\ldots$$
$$=-\frac{5}{24u^2}-\frac{1}{8u^4}+\frac{(1+u^2)^2}{8u^5}\operatorname{Arctan}u$$
$$1>u>-1.$$

Da die Reihe für $u=1$ noch convergirt und die Funktion rechts an dieser Stelle weder unendlich noch diskontinuirlich wird, so gilt dieses Resultat auch für $u=1$ und giebt:

$$\frac{1}{1.3.5}-\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}-\ldots=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}.$$

Will man die hier auseinandergesetzte sehr fruchtbare Summirungsmethode mit Leichtigkeit anwenden, so muss man im Besitze einer Tabelle der verschiedensten bestimmten Integralformeln sein, um ohne langes Suchen gleich eine Formel zu haben, mittelst deren man das allgemeine Glied einer gegebenen Reihe in ein bestimmtes Integral verwandeln kann *).

Cap. VIII. Geometrische Anwendungen.

§ 34.

Quadratur ebener Curven.

In der Einleitung zur Differenzialrechnung ist schon gezeigt worden, dass wenn $y=f(x)$ die auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Gleichung einer Curve und $F(x)$ ihre Fläche bezeichnet — gleichviel von welcher Ordinate aus man dieselbe rechnet, — zwischen $F(x)$ und $f(x)$ die Relation

$$f(x)=\operatorname{Lim}\frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}\text{ d. i. }=\frac{dF(x)}{dx}$$

statt findet, und hieraus folgt augenblicklich

*) Weitere Ausführungen konnten hier nicht gegeben werden; man sehe hierüber meine Analytischen Studien, 1stes Heft.

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C = \int y\,dx + C,$$

wo die willkührliche Constante die Willkührlichkeit der Stelle anzeigt, von wo aus die Flächen gerechnet werden. Will man diejenige Fläche u haben, welche über dem Stücke $\beta - \alpha$ der Abscissenachse steht, von den zu $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehörenden Ordinaten der Curve und der letzteren selbst begränzt wird, so muss man die beiden Flächen subtrahiren, welche von dem willkührlichen Anfangspunkte bis $x = \alpha$ und $x = \beta$ gerechnet sind. Diess giebt

$$u = \int_\alpha^\beta y\,dx. \qquad (1)$$

Dabei darf man jedoch nicht übersehen, dass die vorstehende Formel nur gilt, wenn die durch $y = f(x)$ charakterisirte Curve von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ endlich und stetig verläuft, denn ausserdem ist das bestimmte Integral der Differenz zweier spezieller Werthe des unbestimmten Integrales nicht gleich. So z. B. für $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, würde man ohne diese Vorsicht

$$u = \tan\pi - \tan 0 = 0$$

finden, was offenbar unrichtig ist. Denn die Curve $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ besteht innerhalb des Intervalles 0 bis π aus zwei congruenten Zweigen, von denen der erste sich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und der zweite von $\frac{\pi}{2}$ bis π erstreckt. Beide Zweige gehen an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ins Unendliche hinaus und eine in diesem Punkte errichtete Ordinate bildet die gemeinschaftliche Asymptote von ihnen. Daher ist

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\cos^2 x} = 2\tan\tfrac{1}{2}\pi = \infty,$$

wie man auch dadurch findet, dass man gemäss den Lehren des §. 24. das fragliche Integral als Gränze von

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon'}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

für unendlich abnehmende ε und ε' ansieht.

I. Für die Ellipse, deren Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ oder } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ist, findet man nach der Formel (1) wegen

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}\, a^2 \text{ Arssin } \frac{x}{a} + C,$$

$$u = \frac{b}{2a}\, \beta \sqrt{a^2 - \beta^2} + \frac{1}{2}\, ab \text{ Arcsin } \frac{\beta}{a}$$

$$- \frac{b}{2a}\alpha \sqrt{a^2 - \alpha^2} + \frac{1}{2}\, ab \text{ Arcsin } \frac{\alpha}{a}.$$

Rechnet man, wie es am natürlichsten ist, die Fläche vom Anfangspunkte der Coordinaten an, setzt also $\alpha = 0$ und schreibt ausserdem x für β, so ist die über der Abscisse x stehende Fläche

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \text{ Arcsin } \frac{x}{a}.$$

Für $x = a$ erhält man die Fläche des Quadranten der Ellipse $= \frac{1}{2}ab\frac{1}{2}\pi$, und mithin ist $ab\pi$ die Fläche der ganzen Ellipse.

II. Auf ganz ähnliche Weise kann man die Fläche der Hyperbel bestimmen, nur würde man hier die Fläche nicht vom Anfangspunkte der Coordinaten aus rechnen können, sondern den Scheitel der Hyperbel als Anfangspunkt der Flächen ansehen oder $\alpha = a$ setzen, wo a die grosse Halbachse der Hyperbel bezeichnet. Von besonderem Interesse ist noch der Fall einer gleichseitigen Hyperbel, wenn man die Asymptoten zu Coordinatenachsen nimmt. Die Gleichung dieser Curve steht dann bekanntlich unter der Form

$$xy = k^2 \text{ oder } y = \frac{k^2}{x}$$

und hieraus findet man

$$u = k^2 l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

vorausgesetzt, dass α und β zugleich positiv oder negativ sind. Hieraus folgt für $\alpha = 1$, $\beta = x$, die sehr einfache Relation $u = k^2 lx$ oder $u = lx$, wenn noch $k = 1$ genommen wird. Die Rolle, welche

hier die natürlichen Logarithmen bei der Quadratur der Hyperbel spielen, war die Veranlassung der früher üblichen Benennung: **hyperbolische Logarithmen.**

III. Rechnen wir die Coordinaten der Cykloide vom Anfangspunkte der Bewegung aus, wodurch sie entstanden ist, so gelten die Gleichungen

$$x = r(\vartheta - \sin\vartheta)\ ,\ y = r(1-\cos\vartheta),$$

und wenn wir ϑ als unabhängige Variable ansehen,

$$dx = r(1-\cos\vartheta)\,d\vartheta,$$

mithin

$$\begin{aligned} ydx &= r^2(1-\cos\vartheta)^2 d\vartheta \\ &= r^2(1-2\cos\vartheta+\cos^2\vartheta)\,d\vartheta \\ &= r^2(\tfrac{3}{2}-2\cos\vartheta+\tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta)\,d\vartheta \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$\int ydx = r^2(\tfrac{3}{2}\vartheta - 2\sin\vartheta + \tfrac{1}{4}\sin 2\vartheta) + C.$$

Rechnen wir die Fläche vom Anfangspunkte der Bewegung an, so annullirt sich u mit ϑ gleichzeitig und mithin ist $C = 0$; die Formel

$$u = r^2(\tfrac{3}{2}\vartheta - 2\sin\vartheta + \tfrac{1}{4}\sin 2\vartheta)$$

giebt dann die über der Abscisse x stehende Fläche, wenn ϑ der zu x gehörende Wälzungswinkel ist. Für $\vartheta = 2\pi$ erhalten wir die Fläche der ganzen Cykloide $= 3r^2\pi$ und diese macht demnach das Dreifache von der Fläche des erzeugenden Kreises aus.

§ 35.

Rektifikation ebener Curven.

Sind wieder $x = \alpha$ und $x = \beta$ zwei Abscissen einer durch die Gleichung $y = f(x)$ charakterisirten Curve, so nennt man die Aufgabe: „die Länge des über dem Stücke $\beta - \alpha$ der Abscissenachse stehenden Bogens der Curve zu bestimmen“, das Problem der Rektifikation ebener Curven und man gelangt zur Auflösung desselben durch die folgenden Betrachtungen. Von welchem willkührlichen Punkte K der Curve KPQ aus (fig. 1) man auch die Länge der Bögen messen möge,

so ist der Bogen KP offenbar eine gewisse (noch unbekannte) Funktion der Abscisse $OM = x$. Setzen wir $MP = y$ und lassen x um das Stück $MN = \Delta x$ zunehmen, so ändert sich die Ordinate um $RQ = \Delta y$ ($PR \parallel MN$) und der Bogen KP, welcher mit $\varphi(x)$ bezeichnet werden möge, um $PQ = KQ - KP = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Legen wir ferner im Punkte P eine Tangente ST an die Curve und verlängern NQ bis Q', so ist offenbar

$$PQ' > \text{Arc.}\, PQ > \text{chord.}\ PQ$$

d. i. wenn wir den Winkel $MST = \angle RPQ'$ mit ω bezeichnen:

$$\frac{PR}{\cos\omega} > \text{Arc}\, PQ > \text{Chord.}\, PQ$$

d. i. nach der oben eingeführten Bezeichnung:

$$\frac{\Delta x}{\cos\omega} > \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) > \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

oder durch Division mit Δx:

$$\frac{1}{\cos\omega} > \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} > \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Von dem Winkel ω ist aber die Tangente bekannt, nämlich nach §. 12 der Diff.R. $\tan\omega = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ und mithin ist

$$\frac{1}{\cos\omega} = \sqrt{1 + \tan^2\omega} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die vorige Ungleichung nimmt jetzt die Gestalt

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2} > \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} > \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

an. Gehen wir in ihr zur Gränze für bis zur Null abnehmende Δx über, so wird

$$\text{Lim}\ \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

$$\text{Lim}\ \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Es fallen mithin die zwei Grössen, zwischen denen der Differenzialquotient von $\varphi(x)$ enthalten war, in eine einzige zusammen und die vorige Ungleichung geht in die Gleichung

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

über; hieraus folgt sofort:

$$\varphi(x) = \int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + C,$$

wobei die Willkührlichkeit von C dem willkührlichen Anfangspunkte A der Bögen entspricht. Um diese Unbestimmtheit wegzuschaffen, setzen wir $x = OB = \beta$, $x = OA = \alpha$ und subtrahiren die beiden diesen Annahmen entsprechenden speziellen Fälle der obigen Gleichung. Wir erhalten dann auf der linken Seite $\varphi(OB) - \varphi(OA) = \text{Arc}\, KV - \text{Arc}\, KU = \text{Arc}\, UV$, und wenn wir diesen über der Strecke $AB = \beta - \alpha$ stehenden Bogen mit s bezeichnen, so ist

$$s = \int_\alpha^\beta dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad (1)$$

wobei aber wie im vorigen Paragraphen vorausgesetzt werden muss, dass die Funktion

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

innerhalb des Intervalles $x = \alpha$ bis $x = \beta$ endlich und stetig bleibt*)

---

*) Für $y = \frac{1}{2} l(\cos^2 x)$ erhielte man z. B. ohne diese Vorsicht:

$$\frac{dy}{dx} = -\tan x, \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \tfrac{1}{2} l \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right] + C,$$

und wenn man $x = \pi$ und $x = 0$ setzte:

$$s = \tfrac{1}{2} l \left[\tan^2 \frac{3\pi}{4}\right] - \tfrac{1}{2} l \left[\tan^2 \frac{\pi}{4}\right] = 0.$$

Berücksichtigt man dagegen, dass die fragliche Curve aus zwei congruenten Zweigen besteht, die bei $x = \frac{\pi}{2}$ ins Unendliche hinausgehen, so folgt:

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \infty,$$

wie sich auch ganz von selbst versteht.

I. Für die Parabel, deren Gleichung $y=\sqrt{px}$ ist, findet man $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$, mithin

$$\frac{1}{\cos x}=\sqrt{1+\frac{p}{4x}},$$

und folglich

$$s=\int_\alpha^\beta dx\sqrt{1+\frac{p}{4x}}.$$

Führt man eine neue Variable t der Art ein, dass

$$t=\sqrt{1+\frac{p}{4x}} \text{ mithin } x=\frac{p}{4}\,\frac{1}{t^2-1}$$

ist, so hat man bei unbestimmter partieller Integration

$$\int t\,dx=tx-\int x\,dt=tx-\frac{p}{4}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=tx+\frac{p}{4}\,\frac{1}{4}\,l\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2+C,$$

d. i. vermöge des Werthes von t

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{4x}}=\frac{1}{2}\sqrt{x(4x+p)}+\frac{p}{4}\,\frac{1}{4}\,l\left(\frac{\sqrt{4x+p}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p}-2\sqrt{x}}\right)^2+C,$$

folglich wenn man berücksichtigt, dass die Grösse, von welcher der Logarithmus genommen wird, immer positiv ausfällt,

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\beta(4\beta+p)}+\frac{p}{8}\,l\left(\frac{\sqrt{4\beta+p}+2\sqrt{\beta}}{\sqrt{4\beta+p}-2\sqrt{\beta}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha(4\alpha+p)}+\frac{p}{8}\,l\left(\frac{\sqrt{4\alpha+p}+2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\alpha+p}-2\sqrt{\alpha}}\right).$$

Will man den über der Abscisse x stehenden Bogen der Parabel, so muss man $\alpha=0, \beta=x$ setzen, und hat dann

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{x(4x+p)}+\frac{p}{8}\,l\left(\frac{\sqrt{4x+p}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+p}-2\sqrt{x}}\right).$$

Die Gerade vom Brennpunkte der Parabel nach dem Punkte xy (der Radius Vector) hat bekanntlich die Länge

$$r=\sqrt{(x-\frac{1}{4}p)^2+y^2}=x+\frac{1}{4}p$$

und daraus folgt $\sqrt{4x+p}=2\sqrt{r}$; dadurch nimmt die Formel für s die elegante Gestalt an

$$s=\sqrt{rx}+\frac{1}{8}pl\left(\frac{\sqrt{r}+\sqrt{x}}{\sqrt{r}-\sqrt{x}}\right)$$

die sich, wenn man die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel $=\frac{1}{4}p$ mit q bezeichnet, noch in

$$s=\sqrt{rx}+ql\left(\frac{\sqrt{r}+\sqrt{x}}{\sqrt{q}}\right) \tag{2}$$

überführen lässt.

II. In der Anwendung unserer Rektifikationsformel auf die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \text{ oder } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

charakterisirte Ellipse, haben wir

$$\frac{1}{\cos\omega}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}},$$

oder wenn die numerische Excentricität mit ε bezeichnet, also

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\varepsilon$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{\cos\omega}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}} \tag{3}$$

Nach Formel (1) folgt nun, dass für $\alpha=0, \beta=x$ das Integral

$$s=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}} \tag{4}$$

den über der Abscisse x stehenden elliptischen Bogen angiebt. Man kann den Werth dieses Integrales nicht unmittelbar durch die gewöhnlichen logarithmischen und cyklometrischen Funktionen ausdrücken, sondern nur näherungsweis durch unendliche Reihen berechnen. Zu diesem Zwecke ist es am vortheilhaftesten, dem Integrale erst eine

andere Gestalt zu geben, indem man $x = a\cos u$ setzt, mit u eine neue Variable bezeichnend. Berücksichtigt man, dass für $x=0$ und $x=x$ jetzt $\cos u$ in 0 und $\cos u$ in $\frac{x}{a}$ übergeht, d. h. $u=\frac{\pi}{2}$ und $u = \text{Arc}\cos\frac{x}{a}$ wird, so erhält man leicht aus Nro. (4)

$$s = -a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\text{Arc}\cos\frac{x}{a}} du\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}$$

oder durch Vertauschung der Gränzen

$$s = a\int_u^{\frac{1}{2}\pi} du\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}\,,\ u = \text{Arccos}\,\frac{x}{a}. \tag{5}$$

Da nun $\varepsilon < 1$, also um so mehr $\varepsilon\cos u < 1$ ist, so kann man die unter dem Wurzelzeichen stehende Wurzelgrösse leicht in eine unendliche Reihe verwandeln und dann jedes einzelne Glied integriren. Um den Quadranten der Ellipse auf diese Weise zu rektifiziren, muss man $x=a$ d. h. $u=0$ setzen, und wenn wir den Quadranten mit S bezeichnen, so ist jetzt

$$S = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} du\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}$$

$$= a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 u - \frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\cos^4 u - \frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\cos^6 u - \ldots\right] du.$$

Aus dem bekannten Werthe des unbestimmten Integrales

$$\int \cos^{2n} u\, du$$

findet man aber sogleich für $u=\frac{1}{2}\pi, u=0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n} u\, du = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{\pi}{2},$$

und wenn man diese Formel zur Integration der einzelnen Glieder in der Reihe für S benutzt

$$S = \frac{a\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\varepsilon^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\varepsilon^6 - \ldots\right],$$

woraus sich durch Multiplikation mit 4 der ganze Umfang der Ellipse ergiebt.

Zu bemerken ist übrigens, dass dem Winkel u, für welchen $a\cos u = x$ wird, eine geometrische Bedeutung zukommt. Beschreibt man nämlich über der grossen Achse als Durchmesser einen Kreis, Fig. 2, verlängert die der Abscisse $OM = x$ entsprechende Ordinate MP bis sie denselben in P' schneidet und zieht dann OP', so ist $\angle AOP' = u$. Zieht man den durch die Formel (5) bestimmten Bogen $s = BP$ von dem Quadranten $S = BA$ ab, so giebt die Differenz

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} du\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u} - \int_u^{\frac{1}{2}\pi} du\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u} = \int_0^u du\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u} \tag{6}$$

den über der Strecke $AM = a - x$ stehenden Bogen AP an. Man kann übrigens die Rektifikation der Ellipse noch in anderer Form ausführen, wenn man nämlich den Winkel ω, den die Tangente SP mit der Abscissenachse macht, als unabhängige Variable ansieht. Man hat dann aus der Gleichung (3)

$$x = \frac{a\sin\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\omega}}, \quad dx = \frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\omega\, d\omega}{(1-\varepsilon^2\cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}},$$

mithin

$$s = \int_0^x \frac{1}{\cos} dx = a(1-\varepsilon^2)\int_0^\omega \frac{d\omega}{(1-\varepsilon^2\cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

wobei sich die Integrationsgränzen aus der Bemerkung ergeben, dass ω mit x gleichzeitig wächst und den Werthen $x=0, x=OM$ die Werthe $\omega=0, \omega=\angle MSP=\omega$ entsprechen. Durch gewöhnliche Differenziation wird man sich nun leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$(1-\varepsilon^2)\int \frac{d\omega}{(1-\varepsilon^2\cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{\varepsilon^2\cos\omega\sin\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\omega}} + \int d\omega\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\omega}$$

überzeugen, und daher ist

$$s = \frac{a\varepsilon^2\cos\omega\sin\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\omega}} + \int_0^\omega d\omega\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\omega}$$

Wendet man auf das Integral rechter Hand die vorhin bei dem Integrale (6) gemachte Bemerkung an, so erkennt man leicht, dass das-

selbe ebenfalls einen Bogen der Ellipse darstellt und zwar den über der Strecke $a-\xi$ stehenden, wenn $\xi = a\cos\omega$ ist. Macht man also $\angle AOQ' = \angle MSP = \omega$, fällt von Q' das Perpendikel QN auf OA, so ist $ON = \xi$, $AN = a - \xi$ und folglich Arc AQ der in Rede stehende Bogen, welcher σ heissen möge. Die obige Gleichung verwandelt sich jetzt, wegen

$$x = \frac{a\sin\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\omega}}\,,\quad \frac{\xi}{a} = \cos\omega \tag{7}$$

in die folgende

$$s - \sigma = \varepsilon^2\frac{x\xi}{a}. \tag{8}$$

Dabei sind aber x und ξ mit einander durch eine Relation verbunden, welche man dadurch erhält, dass man die zweite der Gleichungen (7) und die daraus folgende $\sin\omega = \sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2}$ in die vorhergehende Gleichung für x substituirt. Man gelangt so zu dem sehr eleganten zuerst von Fagnano bewiesenen Theoreme: wenn die Abscissen x und ξ dei Gleichung

$$a^4 - a^2(x^2+\xi^2) + \varepsilon^2 x^2\xi^2 = 0$$

befriedigen, so ist die Differenz der über den Strecken x und $a-\xi$ stehenden Bögen (Arc BP und Arc AQ) eine algebraische Grösse, nämlich $\varepsilon^2\frac{x\xi}{a}$.

III. Für die Cykloide mit den Gleichungen $x = r(\vartheta - \sin\vartheta)$, $y = r(1-\cos\vartheta)$ ist

$$dy = r\sin\vartheta\, d\vartheta = 2r\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\, d\vartheta,$$
$$dx = r(1-\cos\vartheta)\, d\vartheta = 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\, d\vartheta;$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \cot\tfrac{1}{2}\vartheta,\ \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}$$

und

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2r\int\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\, d\vartheta = -4r\cos\tfrac{1}{2}\vartheta + C.$$

Wollen wir den über der Abscisse x stehenden Bogen, so müssen wir ϑ von 0 bis ϑ selbst ausdehnen, und dann ist

$$s = -4r\cos\tfrac{1}{2}\vartheta + 4r\cos 0,$$

d. i.

$$s=8r\sin^2\tfrac{1}{4}\vartheta, \tag{9}$$

oder weil aus der Gleichung für y folgt $\vartheta=\mathrm{Arc}\cos(1-\frac{y}{r})$

$$s=8r\sin^2[\tfrac{1}{4}\mathrm{Arc}\cos(1-\frac{y}{r})]. \tag{10}$$

Hieraus ergiebt sich die Länge der ganzen Cykloide, wenn man $\vartheta=2\pi$ setzt, und man findet so, dass dieselbe das Achtfache vom Halbmesser des erzeugenden Kreises beträgt.

Die allgemeine Formel, welche den Zusammenhang zwischen dx, dy und ds angiebt, nämlich

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

kann auch zur Lösung der umgekehrten Aufgabe: „die Gleichung derjenigen Curve zu finden, deren Bogen eine gegebene Funktion der zugehörigen Abscisse ist“, benutzt werden. Man hat nämlich aus der angeführten Formel

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2-1,$$

und mithin nach Ausziehung der Wurzel und Integration:

$$y=\int dx\sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2-1}+C.$$

Nimmt man z. B. $s=\sqrt{x^2-a^2}$, so findet man:

$$y=\int dx\,\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$$

$$=a\tfrac{1}{2}l(x+\sqrt{x^2-a^2})^2+C,$$

oder wenn wir dem x blos positive Werthe geben wollen, wodurch $x+\sqrt{x^2-a^2}$ immer positiv ausfällt,

$$y=al(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

Rechnen wir die Bögen und Ordinaten von einem und demselben Anfangspuukte aus, so müssen beide Grössen gleichzeitig Null werden.

Es annullirt sich aber s für $x = a$ und wenn dann auch $y = 0$ werden soll, so folgt $C = -la$, mithin:

$$y = al\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right].$$

Die Formel (11) lässt sich übrigens auch auf den Fall anwenden, wo s nicht als Funktion der Abscisse, sondern als Funktion der Ordinate gegeben ist. Vertauscht man nämlich die Coordinatenachsen, so vertauschen x und y ebenfalls ihre Rollen, und nachdem man jetzt durch die Formel (11) zu einer Gleichung zwischen x und y gelangt, bedarf es in der letzteren nur wieder einer Vertauschung zwischen x und y, um sogleich zur ursprünglichen Aufgabe zurückzukommen. So würde z. B. die Gleichung derjenigen Curve, worin $s = \sqrt{y^2 - a^2}$ ist, durch

$$x = al\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right]$$

ausgedrückt werden, wo nun y blos positive Werthe bekommen darf. Aus dieser Gleichung folgt weiter:

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1},$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{1}{\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}};$$

d. i. wenn man in der letzteren Gleichung Zähler und Nenner der rechten Seite mit $\frac{y}{a} - \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}$ multiplizirt,

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{y}{a} - \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}$$

und durch Addition dieser und der zweitvorhergehenden Gleichung ergiebt sich jetzt:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

woraus man ersieht, dass die gesuchte Curve die Kettenlinie ist. Der über der Abscisse x stehende Bogen ist

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

wodurch die Bedingung $s = \sqrt{y^2 - a^2}$ erfüllt wird. Vermöge der geometrischen Bedeutung von $\sqrt{y^2 - a^2}$ giebt diess eine sehr einfache Construktion für die Rektifikation des über der Abscisse x stehenden Bogens.

§ 36.

Complanation gekrümmter Flächen.

Während die Aufgaben der Quadratur und Rektifikation krummer Linien in der Ebene auf einfache Integrationen führten, bekommen wir jetzt, wo es sich um die Grösse eines bestimmten Stückes einer gekrümmten Fläche handelt, immer zwei Integrationen auszuführen, die gewissermassen den zwei Dimensionen der Fläche entsprechen. Bevor wir aber die allgemeine Complanationsformel selbst ableiten, müssen wir ein Lemma beweisen, welches die Basis aller dieser Untersuchungen ausmacht.

Es sei in Fig. 3. an einen Punkt A einer Fläche eine Tangentialebene gelegt und in derselben ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet, dessen eine Ecke A mit dem Berührungspunkte der Ebene zusammenfällt. Denken wir uns nun von allen Punkten der Peripherie des Parallelogrammes Gerade gezogen, welche sämmtlich einer willkührlichen Richtung parallel laufen, so erzeugen die Durchschnitte dieser Parallelen und der vorhin genannten Fläche auf letzterer eine krummlinig begränzte Figur $AUVW$, von welcher das Parallelogramm $ABCD$ die schiefwinklige Projektion auf die Tangentialebene darstellt. Nennen wir ω die Fläche von $AUVW$ und ω' die seiner Projektion $ABCD$, so lässt sich nun leicht zeigen, dass der Quotient $\frac{\omega}{\omega'}$ gegen die Gränze 1 convergirt, sobald die Dimensionen von ω', und mithin auch die von ω, beständig vermindert werden, sich also beide Flächen bis auf den blosen Punkt A zusammenziehen. Legt man durch den Punkt A, irgend einen Punkt P der Peripherie von $AUVW$ und seine schiefwinklige Projektion M eine Ebene AMP, verlängert ihren Durchschnitt AM, den sie mit der Ebene von $ABCD$ bildet, soweit

bis M', dass $AM' = \text{Arc}\, AP$ ist, und denkt sich diese Construktion für jeden Punkt der Peripherie $AUVW$ ausgeführt, so entsteht in der darunter liegenden Tangentialebene eine gemischtlinig begränzte Figur $AB'C'D'$, deren Fläche ebensogross wie die von $AUVW$ sein muss, und zwar schliesst man diess aus dem Grundsatze, dass zwei Flächen gleich sind, wenn ihre sämmtlichen correspondirenden Durchschnitte (wie hier z. B. AM' und AP) einander gleich sind. Das Verhältniss von ω zu ω' reduzirt sich jetzt auf das Verhältniss der beiden ebenen Figuren $AB'C'D'$ und $ABCD$, die wir in Fig. 4. näher betrachten wollen. Beschreiben wir um die Figur $AB'C'D'$ ein Parallelogram $AB''C''D''$, so ist offenbar:

$$AB''C''D'' > AB'C'B' > ABCD,$$

oder durch Division mit $ABCD = \omega'$

$$\frac{AB''C''D''}{ABCD} > \frac{\omega}{\omega'} > 1.$$

Die Flächen zweier Parallelogramme mit demselben Winkel (hier BAD verhalten sich aber wie die Produkte aus ihren Seiten, und daher ist auch

$$\frac{AB''.AD''}{AB.AD} > \frac{\omega}{\omega'} > 1.$$

Ziehen wir nach den Punkten H' und K', in welchen das umschriebene Parallelogramm die Figur $AB'C'D'$ berührt, die Geraden AH', AK', so ist

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AH'}{AH}, \quad \frac{AD''}{AD} = \frac{AK'}{AK},$$

oder wenn wir $AH = \zeta_1$, $AH' = \sigma_1$, $AK = \zeta_2$, $AK' = \sigma_2$ setzen und die vorstehenden Verhältnisse in die obige Ungleichung substituiren:

$$\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\zeta_1 \zeta_2} > \frac{\omega}{\omega'} > 1. \qquad (1)$$

Die Linien σ_1, σ_2 und ζ_1, ζ_2 sind aber nur ein Paar aus einer ganzen Klasse zusammengehöriger Linien unserer Figur, sie stehen zu einander in derselben Beziehung wie z. B. $AM' = \sigma$ und $AM = \zeta$, und was von diesem willkührlich gewählten Paare gilt, muss von jedem anderen gelten, weil alle auf dieselbe Weise entstanden sind. In Fig. 3 war nun die Ebene des Parallelogrammes eine Tangentialebene der Fläche und mithin berührt jede durch A gehende Gerade

die Fläche ebenfalls und folgl. auch jede solche Gerade ihren entsprechenden Schnitt. Es ist daher AM die Tangente am Bogen AP und daraus schliesst man nach den Lehren des vorigen Paragraphen leicht, dass

$$\mathrm{Lim}\ \frac{AP}{AM} = 1$$

oder, weil $AP = AM' = \sigma$, $AM = \zeta$ war,

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\sigma}{\zeta} = 1$$

ist. Daraus folgt nach der vorhin gemachten Bemerkung, dass auch $\frac{\sigma_1}{\zeta_1}$ und $\frac{\sigma_2}{\zeta_2}$ sich der Gränze 1 nähern und dadurch geht die Ungleichung (1) in die Gleichung

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\omega}{\omega'} = 1 \qquad (2)$$

über, worin sich der zu beweisende Satz ausspricht*).

*) Heisst ϑ der Winkel, welchen die Tangente im Punkte xy mit der Abscissenachse macht und s der zugehörige Bogen, so ist

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\vartheta\ ,\ \mathrm{Lim}\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\vartheta\ ,\ \mathrm{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta s} = \sin\vartheta$$

oder für $\Delta x = \xi$, $\Delta y = \eta$, $\Delta s = \sigma$,

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\eta}{\xi} = \tan\vartheta\ ,\ \mathrm{Lim}\ \frac{\xi}{\sigma} = \cos\vartheta\ ,\ \mathrm{Lim}\frac{\eta}{\sigma} = \sin\vartheta,$$

wie man sogleich aus den Differenzialformeln des vorigen Paragraphen ersieht. Ist die Tangente selbst die Abscissenachse wie in Fig. 5, so folgt für $AN = \xi$, $NP = \eta$, $\mathrm{Arc}\,AP = \sigma$, $\vartheta = 0$,

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\xi}{\sigma} = 1\ ,\ \mathrm{Lim}\ \frac{\eta}{\sigma} = 0.$$

Nun war aber $AM = \zeta$ d. i. wenn der constante Winkel $PMN = c$ gesetzt wird, $\zeta = AN - NM = \xi - \eta\cot c$, folglich

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\sigma}{\zeta} = \mathrm{Lim}\ \frac{\sigma}{\xi - \eta\cot c}$$

$$= \mathrm{Lim}\ \frac{1}{\frac{\xi}{\sigma} - \frac{\eta}{\sigma}\cot c}$$

d. i. unter Berücksichtigung des Vorhergehenden:

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\sigma}{\xi} = \frac{1}{1 - 0\,.\,\cot c} = 1,$$

wie oben behauptet wurde.

Wir wollen nun zunächst die Grösse desjenigen Stückes einer durch die Gleichung $z = f(x,y)$ charakterisirten Fläche bestimmen, welches von vier den Coordinatenebenen xz und yz parallelen Ebenen begränzt wird, dessen orthographische Projektion auf die Ebene xy, also ein Rechteck ist, Fig. 6. Die der Coordinatenebene yz parallel laufenden zwei Begränzungsebenen mögen in den Entfernungen a und x davon abstehen und die der Coordinatenebene xz parallelen Begränzungsebenen in den Entfernungen b und y, so dass also $x-a$ und $b-y$ die Seiten des die Projektion unseres Flächenstücks bildenden Rechtecks sind. Bezeichnen wir die zu complanirende Fläche, die jedenfalls von x und y abhängt, mit $F(x,y)$, so geht aus dem Obigen zunächst hervor, dass sowohl $F(x,b)$ als $F(y,a)$ gleich Null ist, weil sich in jedem dieser Fälle die Fläche auf eine blose Linie reduzirt, im ersten auf die Curve, deren Projektion $x-a$ und im zweiten auf die, deren Projektion $y-b$ ist. Lassen wir x und y um Δx und Δy zunehmen, so erhält die gesuchte Fläche einen Zuwachs $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)$, dessen Projektion das Rechteck aus Δx und Δy ist, und wenn wir die Senkrechten in den Ecken desselben (die Projektionsstrahlen) verlängern, bis sie die Tangentialebene im Punkte xyz schneiden, so erzeugen sie auf der Tangentialebene ein Parallelogramm, das als schiefwinkliche Projektion des Flächeninkrementes angesehen werden darf. Die Grösse des Flächeninkrementes sei nun ω, also

$$\omega = F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)$$

die schiefwinkliche Projektion desselben auf die Tangentialebene habe die Fläche ω', so ist offenbar

$$\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta x \,.\, \Delta y} = \frac{\omega}{\omega'}\,\frac{\omega}{\Delta x \Delta y}$$

Aber $\Delta x \,.\, \Delta y$ ist die Fläche des aus Δx und Δy construirten Rechtecks und diese $= \omega' \cos\tau$, wenn wir τ den Neigungwinkel nennen, den die Ebenen von ω' und $\Delta x \,.\, \Delta y$ mit einander einschliessen; mihin haben wir auch

$$\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta x \,.\, \Delta y} = \frac{\omega}{\omega'}\,\frac{1}{\cos\tau}\,.$$

Lassen wir nun Δx und Δy bis zur Gränze Null abnehmen, so nähert sich der Ausdruck links dem nach x und y genommenen Differenzial-

quotienten $\frac{d^2 F(x,y)}{dx\,dy}$, rechts ändert sich τ nicht, weil es den Neigungswinkel der Coordinatenebene xy und der Tangentialebene im Punkte xyz bezeichnet; bringen wir endlich noch das vorhin bewiesene Lemma in Anwendung, so ist jetzt:

$$\frac{d^2 F(x,y)}{dx\,dy} = \sec\tau. \tag{3}$$

Daraus folgt nun zunächst durch Integration in Beziehung auf y,

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \int dy \sec\tau + C,$$

oder wenn wir, um die Constante wegzuschaffen, $y = y$, $y = b$ setzen, beide Werthe subtrahiren und die Gleichung $F(x,b) = 0$, also auch $\frac{dF(x,b)}{dx} = 0$ berücksichtigen,

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \int_b^y dy \sec\tau. \tag{4}$$

Die Integration in Beziehung auf x giebt nun weiter:

$$F(x,y) = \int dx \int_b^y dy \sec\tau + C,$$

oder durch Subtraktion der für $x = x$ und $x = a$ entstehenden Gleichungen, wegen $F(a,y) = 0$

$$F(x,y) = \int_a^x dx \int_b^y dy \sec\tau. \tag{5}$$

Der Werth von $\sec\tau$ ist leicht zu bestimmen; τ nämlich ist nichts Anderes, als das Supplement desjenigen Winkels, den die Senkrechten auf der Tangentialebene und auf der Ebene xy mit einander machen, d. h. er ist das Supplement des Winkets, den die Normale im Punkte xyz mit der Axe der z macht; dieser letztere ist bekannt aus S. 326. der Differenzialrechnung, und daher haben wir nach dortiger Bezeichnung $\sec\tau = -\sec\gamma$ oder

$$\sec\tau = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \qquad (6)$$

worin $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ die partiellen Differenzialquotienten von $z = f(x,y)$ bezeichnen.

Man kann die Aufgabe der Complanation in noch allgemeinerer Form lösen, wenn man zuvor berücksichtigt, dass aus der Gleichung (4) folgt:

$$\frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x} = \int_b^y dy \sec\tau + \varepsilon,$$

oder

$$F(x+\Delta x, y) - F(x,y) = \Delta x\left[\int_b^y dy \sec\tau + \varepsilon\right] \qquad (7)$$

wo ε eine mit Δx gleichzeitig bis zur Null abnehmende Grösse bedeutet. Suchen wir jetzt dasjenige Stück der Fläche $z = f(x,y)$ zu bestimmen, dessen Projektion auf xy eine viereckige Figur ist, begränzt von zwei in den Entfernungen a und x zur Achse der y parallelen Geraden und durch zwei Curven, deren Gleichungen $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ sein mögen. Sehen wir das fragliche Flächenstück als eine Funktion $\Phi(x)$ von x an, so hat das Inkrement $\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)$ desselben zur Projektion einen von zwei parallelen Geraden und zwei Bögen der genannten Curven begränzten Streifen. Beschreibt man in und um letzteren Rechtecke, so kann man die Formel (7) leicht anwenden, wenn man berücksichtigt, dass dort $F(x+\Delta x, y) - F(x,y)$ ein Flächeninkrement bedeutet, dessen Projektion auf die Ebene xy ein rechtwinklicher Streifen ist. Das Flächeninkrement $\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)$ ist nämlich offenbar kleiner als dasjenige, dessen Projektion der aus $\varphi(x)$ und $\psi(x+\Delta x)$ rechtwinklich construirte Streifen ist, dagegen grösser als dasjenige, welches den aus $\varphi(x+\Delta x)$ und $\psi(x)$ rechtwinklich construirten Streifen zur Projektion hat. Bestimmt man die Grössen der Flächeninkremente, welche über den so eben genannten zwei rechtwinklichen, um- und eingeschriebenen Streifen stehen, mit Hülfe der Formel (7), so gelangt man zu der Bemerkung, dass

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)$$

zwischen

$$\Delta x\,[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x+\Delta x)} dy\sec\tau+\varepsilon]\text{ und }\Delta x\,[\int_{\varphi(x+\Delta x)}^{\psi(x)} dy\sec\tau+\varepsilon]$$

enthalten ist, und hieraus folgt durch Division mit Δx und nachherigen Uebergang zur Gränze für abnehmende Δx die Gleichung

$$\frac{d\,\Phi(x)}{dx}=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\sec\tau$$

und durch Integration

$$\Phi(x)=\int dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\sec\tau+C,$$

wo wir um die Constante wegzuschaffen $x=x, x=a$ setzen und berücksichtigen, dass $\Phi(a)<0$ ist. So wird

$$\Phi(x)=\int_a^x dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\sec\tau. \qquad (8)$$

Nennen wir also Ω die Grösse des Flächenstückes, dessen Projektion auf xy begränzt wird von zwei in den Entfernungen $x=\alpha, x=\beta$ der Achse der y parallel gezogenen Geraden und von zwei Curven, deren Gleichungen $y=\varphi(x), y=\psi(x)$ sind, so haben wir vermöge des Werthes von $\sec\tau$

$$\Omega=\int_\alpha^\beta dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \qquad (9)$$

und diess ist die allgemeine Complanationsformel, welche nur voraussetzt, dass $\sec\tau$ innerhalb der Integrationsgränzen endlich und stetig bleibt.

Die Fläche des Octanten von einem aus den Achsen a, b, c construirten Ellipsoide findet man hiernach, indem man aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

zunächst

$$z = c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

und darauf die partiellen Differenzialquotienten

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-cx}{a^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-cy}{b^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

entwickelt. Ist ferner $a > b > c$ und zur Abkürzung

$$1-\frac{c^2}{a^2} = \beta^2\ ,\ 1-\frac{c^2}{b^2} = \alpha^2,$$

so sind α und β die beiden Excentricitäten des Ellipsoids und zwar ist α die kleinere. Man findet jetzt leicht

$$dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = dx\,dy\sqrt{\left\{\frac{1-\left(\frac{\beta x}{a}\right)^2-\left(\frac{\alpha y}{b}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}}.$$

Die Projektion des Octanten auf die Ebene der xy ist ein Ellipsenquadrant mit den Halbachsen a und b, daher ist in Nro. (9) das dortige $\alpha = 0, x = a, \varphi(x) = 0, \psi(x) = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ zu setzen und so wird

$$\Omega = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy \sqrt{\left\{\frac{1-\left(\frac{\beta x}{a}\right)^2-\left(\frac{\alpha y}{b}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}}$$

oder für $x = a\xi, y = b\eta$

$$\Omega = ab\int_0^1 d\xi \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\eta \sqrt{\frac{1-\beta^2\xi^2-\alpha^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}. \qquad (10)$$

Dieses Doppelintegral ist wegen der Willkührlichkeit der Buchstaben, wodurch in einem bestimmten Integrale die Variablen bezeichnet werden, mit demjenigen identisch, welches wir schon in §. 29 betrachtet und auf ein einfaches Integral reduzirt haben.

Die doppelte Integration, welche im Allgemeinen zur Complanation einer Fläche nöthig ist, wird übrigens in zwei Fällen zu einer einfachen, wenn nämlich die Fläche entweder eine cylindrische oder eine Rotationsfläche ist. Im ersten Falle hat die Gleichung $z=f(x,y)$ die einfache Form

$$z=f(x)\,,\ y \text{ ad libitum}\,,$$

wobei die Achse des Cylinders der Coordinatenachse parallel liegt und jeder auf dieser senkrechte Schnitt eine ebene, durch die Gleichung $z=f(x)$ charakterisirte Curve bildet. Man hat hier $\frac{dz}{dx}=f'(x)\,,\frac{dz}{dy}=0$ und folglich, wenn man die Integration in Beziehung auf y ausführt,

$$\Omega=\int_{\alpha}^{\beta} dx\,[\psi(x)-\varphi(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2} \qquad (11)$$

wozu man leicht Beispiele finden wird.

Lässt man zweitens eine in der Ebene xy gezeichnete, durch die Gleichung $y=f(x)$ repräsentirte Curve sich um die Achse der x herumdrehen, so entsteht eine Rotationsfläche, deren Gleichung

$$y^2+z^2=[f(x)]^2$$

ist, woraus man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}\,,\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{y}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}$$

findet. Will man nun denjenigen Theil der Rotationsfläche complaniren, der zwischen den zwei Coordinatenebenen xy, xz und zwei in den Entfernungen α und β vom Anfangspunkte der Coordinaten senkrecht auf xy errichteten Ebenen enthalten ist, so hat man $\varphi(x)=0\,,\psi(x)=f(x)$ zu setzen, und erhält jetzt

$$\Omega = \int_\alpha^\beta dx \int_0^{f(x)} dy \frac{f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}$$

$$= \int_\alpha^\beta dx\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\int_0^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}},$$

d. i. wenn man die Integration in Beziehung auf y ausführt.

$$\Omega = \frac{\pi}{2}\int_\alpha^\beta dx\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}, \tag{12}$$

wonach es z. B. sehr leicht ist, die Oberfläche eines Rotationsellipsoides oder noch spezieller die einer Kugel zu bestimmen.

Statt der rechtwinklichen Coordinaten, welche hier benutzt worden sind, kann man auch Polarkoordinaten einführen; setzen wir nämlich in Fig. 8. $OM=x, MN=y, NP=z$, den Radius Vektor $OP=r$, $\angle NOP=u$ und $\angle NOM=t$, so ist

$$x = r\cos u \cos t\,,\; y = r\cos u \sin t\,,\; z = r\sin u, \tag{13}$$

und die Transformation der Complamationsformel geschieht jetzt mit Hülfe der Gleichung

$$\int\int F\,dx\,dy = \int\int \Phi.(D_\xi x\,.\,D_\eta y - D_\xi y\,.\,D_\eta x)\,d\eta\,d\xi,$$

wenn man zunächst x und y gegeneinander vertauscht (weil hier zuerst nach y integrirt wird) und darauf $\xi=t, \eta=u$ setzt; so wird für

$$F = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}, \tag{14}$$

$$\int\int dx\,dy\,F = \int\int du\,dt(D_u x\,.\,D_t y - D_t x\,.\,D_u y)\,\Phi,$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$W = D_u x\,.\,D_t y - D_t x\,.\,D_u \tag{15}$$

setzt,

$$\int\int dx\,dy\,F = \int\int du\,dt\,W\,\Phi, \tag{16}$$

wobei noch Φ durch r, u und t auszudrücken ist. Substituiren wir nun statt x, y, z die obenangegebenen Werthe, so verwandelt sich

die Gleichung $z=f(x,y)$ der Fläche in eine Gleichung zwischen r, u, t, woraus man r als Funktion von u und t entwickelt darstellen kann, und nun kommt es offenbar darauf an, statt der Differenzialquotienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ die nunmehrigen $\left(\frac{dr}{du}\right)$ und $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ in Rechnung zu bringen. Berücksichtigt man, dass z von x und y abhängt, also auch eine Funktion der jetzigen unabhängigen Variablen u und t ist, so hat man

$$\left(\frac{dz}{du}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{du}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right);$$

oder

$$D_u z=\left(\frac{dz}{dx}\right)D_u x+\left(\frac{dz}{dy}\right)D_u y,$$

$$D_t z=\left(\frac{dz}{dx}\right)D_t x+\left(\frac{dz}{dy}\right)D_t y.$$

Eliminirt man hieraus $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, wobei zur Abkürzung

$$V=D_u z \,.\, D_t y-D_t z \,.\, D_u y, \tag{17}$$

$$U=D_u x \,.\, D_t z-D_t x \,.\, D_u z \tag{18}$$

sein möge, so findet man vermöge der Bedeutung von W

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{V}{W},\ \left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{U}{W};$$

und mithin

$$\int\int dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$=\int\int du\,dt\,W\sqrt{1+\left(\frac{V}{W}\right)^2+\left(\frac{U}{W}\right)^2},$$

oder

$$\Omega=\int\int du\,dt\,\sqrt{U^2+V^2+W^2}. \tag{19}$$

Durch Differenziation der Gleichungen (13) hat man nun

$$D_u x = (D_u r \, . \cos u - r \sin u) \cos t,$$

$$D_t x = (D_t r \, . \cos t - r \sin t) \cos u,$$

$$D_u y = (D_u r \, . \cos u - r \sin u) \sin t,$$

$$D_t y = (D_t r \, . \sin t + r \cos t) \cos u,$$

$$D_u z = D_u r \, . \sin u + r \cos u,$$

$$D_t z = D_t r \, . \sin u;$$

und daraus ergiebt sich zunächst nach (15), (17) und (18)

$$U = -r D_t r \, . \cos t + r (D_u r \, . \sin u + r \cos u) \cos u \sin t,$$

$$V = \quad r D_t r \, . \sin t + r (D_u r \, . \sin u + r \cos u) \cos u \cos t,$$

$$W = \qquad\qquad r (D_u r \, . \cos u - r \cos u) \cos u,$$

$$U^2 + V^2 + W^2 = r^2 [(D_t r)^2 + (D_u r)^2 \cos^2 u + r^2 \cos^2 u].$$

Die Substitution hiervon giebt, wenn man $\left(\frac{dr}{du}\right)$ und $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ für $D_u r$ und $D_t r$ schreibt,

$$\Omega = \int\int r \, du \, dt \sqrt{[r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2] \cos^2 u + \left(\frac{dr}{dt}\right)_2} \qquad (20)$$

wo nun in jedem speziellen Falle die Integrationsgränzen besonders zu bestimmen sind.

Das einfachste Beispiel ist das der Kugel, wo r constant, also von u und t unabhängig ist; dehnt man hier u und t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ aus, os wird Ω zur Oberfläche des Kugeloktanten und

$$\Omega = r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos u \, du \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dt = r^2 . \tfrac{1}{2} \pi \, ,$$

und folglich ist $8 . r^2 \frac{1}{2} \pi = 4 r^2 \pi$ die Oberfläche der ganzen mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel.

§ 37.

Cubatur begränzter Räume.

Um die Aufgabe von der Bestimmung des körperlichen Inhaltes eines allseitig begränzten Raumes in möglichster Allgemeinheit aufzufassen, denken wir uns in der Coordinatenebene xy zwei in den Entfernungen $x=a, x=x$ zu Achse der y parallel gezogene Gerade, welche mit zwei ebendaselbst construirten, durch die Gleichungen $y=\varphi(x)$ und $y=\psi(x)$ charakterisirten Curven eine ebene viereckige Figur $ABNM$ (Fig. 9) bilden. Von allen Punkten der Peripherie dieser Figur lassen wir Gerade parallel zur Achse der z aufsteigen, bis sie zwei durch die Gleichungen $z=\Phi(x,y)$ und $z=\Psi(x,y)$ bestimmte Flächen schneiden; es entsteht dann ein begränzter körperlicher Raum $CDQPP'Q'D'C'$, dessen Projektion auf xy die Figur $ABNM$ darstellt, und jener Raum ist es, dessen Grösse wir aufsuchen wollen.

Ertheilen wir dem $OM'=x$ einen Zuwachs Δx, so ändert sich der fragliche Raum, der $F(x)$ heissen möge, um eine Schicht, die sich leicht in zwei Gränzen einschliessen lässt. Nennen wir $f(x)$ die obere Fläche $PQQ'P'$, so ist diese Schicht ein fast cylindrischer Körper, welcher zwischen den Ebenen $f(x)$ und $f(x+\Delta x)$ enthalten ist. Eine von diesen Flächen muss nun offenbar die grössere sein; ist diess etwa $f(x+\Delta x)$, so beträgt jene Schicht gewiss weniger als ein Cylinder mit der Basis $f(x+\Delta x)$ und der Höhe Δx, dagegen mehr als ein Cylinder mit der Basis $f(x)$ und der Höhe Δx. Da man den kubischen Inhalt eines beliebigen Cylinders immer durch Multiplikation der Grundfläche mit der Höhe findet*), so folgt hieraus, dass die Schicht, welche das Inkrement von $F(x)$ bildet, also die Differenz $F(x+\Delta x)-F(x)$, jederzeit zwischen $f(x)\Delta x$ und $f(x+\Delta x)\Delta x$ oder

---

*) Heisst b die Fläche der Basis eines Cylinders und h seine Höhe, so beschreibe man ein nEck in die Curve, welche die Basis bildet und ebenso ein nEck um dieselbe. Nennen wir β_n die Fläche des ersteren und B_n die des zweiten, so ist der Cylinder grösser als das Prisma aus β_n und der Höhe h, dagegen kleiner als das Prisma mit der Grundfläche B_n und derselben Höhe. Also liegt der kubische Inhalt des Cylinders zwischen $\beta_n h$ und $B_n h$. Für unendlich wachsende n ist aber $\text{Lim}\,\beta = \text{Lim}\,B_n = b$ und folglich der Inhalt unseres Cylinders $=bh$.

$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ zwischen $f(x)$ und $f(x+\Delta x)$

enthalten ist. Diess giebt durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende Δx

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \text{ mithin } F(x)=\int f(x)dx+C.$$

Da aber $F(x)$ sich auf Null reduzirt, wenn x in a übergeht, d. h. die Projektion $ABNM$ zu einer Geraden AB zusammenschmilzt, so ist

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx \qquad (1)$$

zu setzen. Um nun noch $f(x)$ zu bestimmen, bedarf es blos der Anwendung der bekannten Formel für die Quadratur ebener Curven; man hat nämlich offenbar

$$MNQ'P'=\int_{M'M}^{M'N} z'\,dy\;,\; MNQP=\int_{M'M}^{M'N} z\,dy,$$

wo z' und z Ordinaten bedeuten, welche irgend einer von M' aus nach $M'N$ hin gezogenen Abscisse y entsprechen. Da $f(x)=PQQ'P'$ $=MNQ'P'-MNQP$ ist, so folgt

$$f(x)=\int_{M'M}^{M'N}(z'-z)\,dy,$$

oder weil $z=\Phi(x,y)$, $z'=\Psi(x,y)$, $M'M=\varphi(x)$, $M'N=\psi(x)$ war,

$$f(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}[\Psi(x,y)-\Phi(x,y)]\,dy,$$

wofür man auch schreiben kann

$$f(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dy\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)}dz.$$

Nach Nro. (1) folgt jetzt

$$F(x)=\int_a^x dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dy\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)}dz \qquad (2)$$

Nennen wir Θ den kubischen Inhalt desjenigen begränzten Raumes, dessen Projektion auf xy eine aus den in den Entfernungen $x=\alpha, x=\beta$

gezogenen Geraden OY und den zwei schon genannten Curven gebildete viereckige Figur ist, so haben wir endlich

$$\Theta=\int_{\alpha}^{\beta}dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}dy\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)}dz \tag{3}$$

und diess ist die allgemeine Formel der Cubatur.

Wollen wir diess beispielsweis auf den Octanten eines mit den Halbachsen a, b, c beschriebenen Ellipsoids anwenden, so ist

$$\alpha=0, \beta=a, \varphi(x)=0, \psi(x)=b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

$$\Phi(x,y)=0,\ \Psi(x,y)=c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)-\left(\frac{y}{b}\right)^2};$$

und mithin

$$\Theta=c\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

d. i. für $x=a\xi, y=b\eta$

$$\Theta=abc\int_0^1 d\xi\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\eta\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}.$$

Führen wir eine neue Variable τ der Art ein, dass $\eta=\sqrt{1-\xi^2}.\tau$ ist, so folgt ohne Schwierigkeit

$$\Theta=abc\int_0^1 d\xi\int_0^1 d\tau\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2-(1-\xi^2)\tau^2}$$

$$=abc\int_0^1 d\xi(1-\xi^2)\int_0^1 d\tau\sqrt{1-\tau^2}$$

$$=abc\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{6}abc\pi,$$

und das Achtfache hiervon, nämlich $\frac{4}{3}abc\pi$, giebt jetzt den kubischen Inhalt des ganzen Ellipsoides.

Für Rotationskörper vereinfacht sich die Formel (3) wesentlich; denn man hat dann zur Bestimmung desjenigen Volumens, welches von den zwei in den Entfernungen α und β rechtwinklich auf xy stehenden Ebenen ($\| yz$) und den Coordinatenebenen xy und xz begränzt wird,

$$\varphi(x)=0, \psi(x)=f(x)$$

$$\Phi(x,y)=0,\ \Psi(x,y)=z=\sqrt{[f(x)]^2-y^2}$$

zu setzen, wobei $f(x)$ dieselbe Bedeutung hat, wie im vorigen Paragraphen. Es folgt dann

$$\Theta=\int_\alpha^\beta dx\int_0^{f(x)} dy\sqrt{[f(x)]^2-y^2},$$

oder für $y=f(x).\eta$, wo η die neue Variable ist,

$$\Theta=\int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx\int_0^1 d\eta\sqrt{1-\eta^2},$$

d. i.

$$\Theta=\frac{\pi}{4}\int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx. \qquad (4)$$

Diess giebt z. B. für das parabolische Conoid, wo $f(x)=\sqrt{px}$ ist,

$$\Theta=\frac{\pi}{4}p(\tfrac{1}{2}\beta^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2).$$

Will man den kubischen Inhalt der ganzen, vom Scheitel an gerechneten Kappe, welche die Höhe β hat, so muss man $\alpha=0$ setzen und den vorstehenden Ausdruck viermal nehmen; der fragliche Inhalt ist dann $\frac{1}{2}p\beta^2\pi$, also die Hälfteeines Cylinders, welcher die Höhe p und β zum Halbmesser der Grundfläche hat.

Auch hier kann man statt rechtwinklicher Coordinaten Polarkoordinaten einführen, indem man

$$x=r\cos u\cos t,\ y=r\cos u\sin t,\ z=r\sin u \qquad (5)$$

und gemäss der Formel für die Transformation vielfacher Integrale

$$dx\,dy\,dz=\Sigma\pm(D_u x\,.\,D_t y\,.\,D_r z)\,du\,dt\,dr$$

setzt, wobei r,u,t die drei neuen Variablen sind. Führt man die mehr langweilige als schwere Rechnung aus, so ergiebt sich

$$dx\,dy\,dz=r^2\cos u\,du\,dt\,dr,$$

und mithin

$$\Theta=\iiint r^2\cos u\,du\,dt\,dr$$

oder

$$\Theta=\int\cos u\,du\int dt\int r^2\,dr \qquad (6)$$

wo noch die Gränzen für r, t, u zu bestimmen sind. Man findet dieselben dadurch, dass man die Gleichungen (5) auch in die Gleichungen $z=\Phi(x,y), z=\Psi(x,y)$ einführt und zunächst r als Funktion von u und t bestimmt, worauf man im speziellen Falle die Gränzen für t und u noch besonders zu bestimmen hat. Z. B. für das dreiachsige Ellipsoid ist

$$r^2=\frac{1}{\frac{\cos^2 u\cos^2 t}{a^2}+\frac{\cos^2 u\sin^2 t}{b^2}+\frac{\sin^2 u}{c^2}},$$

und mithin ist, wenn es sich um einen Octanten handelt, nach Ausführung der Integration in Beziehung auf r, für r dasjenige zu setzen, was sich hier durch Ausziehung der Quadratwurzel ergiebt; also

$$\Theta=\int\cos u\,du\,dt\cdot\frac{1}{3}r^3$$

$$=\frac{1}{3}\int\cos u\,du\int dt\left[\frac{\cos^2 u\cos^2 t}{a^2}+\frac{\cos^2 u\sin^2 t}{b^2}+\frac{\sin^2 u}{c^2}\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Die Gränzen für t sind $t=0, t=\frac{1}{2}\pi$, die für u ebenso $u=0, u=\frac{1}{2}\pi$, und somit ist Alles bestimmt. Der einfachste Fall wäre der der Kugel, wo $a=b=c$ ist; es wird dann sehr einfach

$$\Theta=\tfrac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos u\,du\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dt=\frac{\pi}{6}a^3,$$

und das Achtfache hiervon giebt den Inhalt der ganzen Kugel.



